[Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.]

14. Jan. 1869. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Borchardt legte aus einer vom 4ten Januar datirten und ihm zur Veröffentlichung im Journal für die reine und angewandte Mathematik von Hrn. Lipschitz in Bonn zugesandten Abhandlung Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen folgenden Auszug vor[1]):

Eine Function von den n independenten Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und deren ersten Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, welche die independenten Variabeln in beliebiger Weise enthält, in Bezug auf die Differentiale aber rational, ganz, homogen und vom $p$ten Grade ist, kann aufgefafst werden als eine algebraische Form des $p$ten Grades von den n Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, deren Coefficienten von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen. Eine solche Form $f(dx)$ geht durch die Einführung eines beliebigen Systems von independenten neuen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ in eine Form $g(dy)$ von entsprechenden Eigenschaften über. Demgemäfs darf man zwei gegebene

---

1) Die von mir in der vorigen Sitzung vorgelegten Untersuchungen des Hrn. Christoffel und die hier folgenden des Hrn. Lipschitz, welche sich beide mit derselben Gattung von Problemen, wenn auch in verschiedenem Grade der Allgemeinheit, beschäftigen, sind gleichzeitig und unabhängig von einander angestellt worden.

Formen $f(dx)$ und $g(dy)$ als zu derselben Classe oder zu verschiedenen Classen gehörig betrachten, je nachdem die eine in die andere in der angegebenen Weise transformirt werden kann oder nicht, und in dem entsprechenden Sinne auch die übrigen Grundbegriffe ausdehnen, die in der Theorie der Transformation der homogenen ganzen Functionen ausgebildet sind. Unter den Formen $f(dx)$ nehmen diejenigen Formen eine ausgezeichnete Stellung ein, deren Coefficienten von den Variabeln $x_\mathfrak{a}$, wo der Zeiger $\mathfrak{a}$ von 1 bis n läuft, unabhängig oder, kürzer, constant sind. Jede Form von dieser besonderen Beschaffenheit hat nämlich die Eigenschaft, durch eine Substitution, bei welcher die neuen Variabeln lineare Functionen der ursprünglichen Variabeln sind, in eine Form von derselben Beschaffenheit verwandelt zu werden, und dadurch kommt die bisher entwickelte Theorie der Transformation der homogenen ganzen Functionen durch lineare Substitutionen unmittelbar zur Anwendung. Ich habe nun gesucht, die Bedingungen zu ermitteln, welche darüber entscheiden, ob eine gegebene Form von n Differentialen, deren Coefficienten von den Variabeln abhängen, in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden könne, oder nicht, und theile die hauptsächlichsten Resultate dieser Arbeit gegenwärtig mit.

Wenn der Grad der gegebenen Form $f(dx)$ der erste ist, so bemerkt man, dafs eine Form mit constanten Coefficienten gleich dem Differential einer linearen Function der Variabeln ist. Die aufgestellte Frage wird daher durch die Bedingungen der Integrabilität beantwortet, welche man wie folgt zusammenfassen kann. Es sei die Form des ersten Grades

$$f(dx) = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_n\, dx_n\,,$$

und durch Verwandlung des Zeichens d in δ bei den Differentialen gehe $f(dx)$ in $f(\delta x)$ über. Dann hat die in Bezug auf die Grössensysteme $dx_\mathfrak{a}$ und $\delta x_\mathfrak{b}$ bilineare Form

$$\delta f(dx) - df(\delta x) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial a_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{\partial a_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}}\right) dx_\mathfrak{a}\, \delta x_\mathfrak{b}\,,$$

wo die Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide von 1 bis n gehen, die Eigenschaft, bei einer Substitution neuer Variabeln sich mit $f(dx)$

so zu ändern, daſs die Beziehung zu dieser Form ungeändert bleibt, und wird dadurch das Analogon einer Covariante. Diese bilineare Form verschwindet ferner dann und nur dann, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann.

Wenn der Grad p der gegebenen Form $f(dx)$ die Einheit übertrifft, so mache ich die Einschränkung, daſs die Determinante Δ, deren Elemente die zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_\mathfrak{a} \partial dx_\mathfrak{b}}$ sind, nicht identisch verschwinde, und laſse die Voraussetzung, daſs die Coefficienten der Form $f(dx)$ nach den Variabeln $x_\mathfrak{a}$ partiell differentiirt werden können, die auch in dem Falle $p = 1$ stillschweigend galt, bestehn. In dem Falle $p \geqq 2$ hängt das Wesen der Form $f(dx)$ sehr genau mit einem Problem der Variationsrechnung zusammen. Dieses Problem verlangt, diejenige Abhängigkeit der n Variabeln $x_\mathfrak{a}$ von einer independenten Variable t anzugeben, bei welcher die erste Variation des zwischen festen Grenzen genommenen Integrals

$$\int f(x')\, dt$$

verschwindet. Hier ist die Differentiation nach der Variable t in der Weise von Lagrange notirt, und die Substitution der Grössen $x'_\mathfrak{a}$ statt der Grössen $dx_\mathfrak{a}$ in die Form $f(dx)$ mit dem Zeichen $f(x')$ angedeutet, wie es auch später in ähnlichen Fällen geschehen soll. Es ist bekannt, daſs das in Rede stehende Problem der Variationsrechnung, wenn man die Bezeichnung

$$F_\mathfrak{a} = \frac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{a}}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_\mathfrak{a}}$$

anwendet, auf die Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$F_\mathfrak{a} = 0$$

führt, und man kann sich dasselbe in der Weise vollständig integrirt denken, daſs für einen bestimmten Werth $t = t_0$ die Grössen $x_\mathfrak{a}$ und $x'_\mathfrak{a}$ beziehungsweise den Integrationsconstanten $x_\mathfrak{a}(0)$ und $x'_\mathfrak{a}(0)$ gleich werden. Wofern nun eine solche Integration dieses Systems von isoperimetrischen Gleichungen vor-

liegt, so kann die in Bezug auf die Form $f(dx)$ aufgeworfene Frage durch die That entschieden werden. Es haben nämlich die durch die bezeichnete Integration erhaltenen Ausdrücke $x_\mathfrak{a}$ die Eigenschaft, reine Functionen der n Grössen $x_\mathfrak{a}(0)$ und der n Grössen $(t-t_0)x'_\mathfrak{a}(0)$ zu werden. Wenn man jetzt die Grössen $x_\mathfrak{a}(0)$ als constant, die Grössen $(t-t_0)x'_\mathfrak{a}(0)$ aber als variabel betrachtet, und dieselben als neue Variabele in die Function $f(\delta x)$ einführt, so dafs die Gleichung

$$f(\delta x) = \phi\left(\delta\overline{(t-t_0)\,x'(0)}\right)$$

entsteht, dann wird die rechte Seite derselben immer eine Form mit constanten Coefficienten, wofern $f(\delta x)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann. Die Form $\phi\left(\delta\overline{(t-t_0)\,x'(0)}\right)$ geht aber aus der Form $f(\delta x)$ dadurch hervor, dafs man die Differentiale $\delta x_\mathfrak{a} = \delta\overline{(t-t_0)x'_\mathfrak{a}(0)}$, und in den Coefficienten der Form $f(\delta x)$ $x_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}(0)$ setzt.

Sobald der Grad p der gegebenen Form $f(dx)$ gleich zwei ist, habe ich aufser dem so eben entwickelten indirecten Criterium ein directes Criterium gefunden, welches sich in seiner Gestalt an das für $p=1$ aufgestellte Criterium genau anschliefst. Es sei die quadratische Form

$$2f(dx) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b}\,,$$

und es werde die mit $F_\mathfrak{a}$ bezeichnete Function, welche zu dieser Form $f(dx)$ gehört, wie folgt dargestellt

$$F_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, x''_\mathfrak{a} + f_\mathfrak{a}(x')\,,$$

dann ist das entsprechende $f_\mathfrak{a}(dx)$ eine quadratische Form der n Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$. Man bezeichne ferner die zu den $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ adjungirten Elemente so:

$$A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}\,, \quad \Delta = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}\,,$$

ferner mit $du_\mathfrak{a}$ und $\delta u_\mathfrak{b}$ zwei independente Systeme von Differentialen der Variabeln $x_\mathfrak{a}$ und $x_\mathfrak{b}$. Alsdann hat die nach den vier Gröfsensystemen $du_\mathfrak{a}$, $\delta u_\mathfrak{b}$, $dx_\mathfrak{g}$, $\delta x_\mathfrak{h}$ quadrilineare Form

$$= \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left\{ \delta \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} - d\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta} \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial f_{\mathfrak{d}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial f_{\mathfrak{d}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} \right) \right\} du_{\mathfrak{a}} \delta u_{\mathfrak{b}} ,$$

› die Zeiger $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sämmtlich sich von 1 bis n er-
·ecken, die Eigenschaft, sich bei einer Substitution neuer
ıriabeln mit der quadratischen Form $f(dx)$ so mitzuändern,
ſs die Beziehung zu dieser Form ungeändert bleibt, ferner
ınn und nur dann identisch zu verschwinden, wenn die Form
dx) in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt
ərden kann. Daſs die quadrilineare Form Ψ unter der in
ede stehenden Voraussetzung identisch verschwinden muſs,
ht unmittelbar aus ihrer Darstellung hervor. Daſs auch das
mgekehrte gilt, habe ich durch eine Zurückführung auf das
ıgegebene indirecte Criterium bewiesen.

Für eine quadratische Form von n Differentialen stimmt
e beantwortete Frage in ihrem Wesen mit einer Frage über-
n, die in der aus Riemann's Nachlasse publicirten Abhand-
ng über die Hypothesen, welche der Geometrie zu
runde liegen, erörtert ist. Daselbst wird untersucht, wann
ne wesentlich positive Form von n Differentialen in das Ag-
egat der Quadrate von den Differentialen der neuen Variabeln
ansformirt werden könne. Es ist aber klar, daſs, sobald eine
gebene Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficien-
n transformirt ist, die fernere Transformation in ein Aggre-
ıt von den Quadraten der Differentiale neuer Variabeln im-
er durch eine lineare Substitution bewirkt werden kann, und
var bei wesentlich positiven Formen auf reelle Weise. Die
iemann'schen Criterien, wenn ich dieselben richtig aufgefaſst
ıbe, setzen die Integration des oben bezeichneten Systems von
operimetrischen Differentialgleichungen voraus, sobald die Zahl
die zwei übertrifft, sind aber auch von dem angeführten in-
recten Criterium wesentlich verschieden.

Reducirt sich die Zahl der Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ auf zwei, so ist
e betreffende Frage in den disquisitiones generales
rca superficies curvas durch Gauss beantwortet. Das

Quadrat des Linearelements einer beliebigen Fläche, in den independenten Variabeln x_1 und x_2 ausgedrückt, ist eine wesentlich positive Form von den Differentialen dx_1 und dx_2

$$f(dx) = a_{1,1}\,dx_1^2 + 2a_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + a_{2,2}\,dx_2^2\,.$$

Die Bedingung dafür, dafs dieselbe in die Form $dy_1^2 + dy_n^2$ transformirt werden könne, ist das Verschwinden des Gaussischen Krümmungsmafses k. Nun besteht aber zwischen dem der Form $f(dx)$ zugehörigen Ausdrucke von k und der quadrilinearen Form Ψ für $n = 2$ die einfache Beziehung

$$\Psi = -2k\Delta(du_1\,\delta u_2 - \delta u_1\,du_2)\,(dx_1\,\delta x_2 - \delta x_1\,dx_2).$$

Also geht das Criterium der quadrilinearen Form in diesem Falle in das Criterium des Krümmungsmafses über.

Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.

rispettoso omaggio di
Ettore Bortolotti

Offerto dall' Autore.

TOMO XVIII. ANNO 1904.

RENDICONTI
DEL
CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

(30, via Ruggiero Settimo, 30)

ADUNANZA DEL 13 MARZO 1904.

ETTORE BORTOLOTTI

Contributo alla teoria dei prodotti infiniti e delle serie a termini positivi.

(Estratto)

Sede della Società
Biblioteca della Società — *30, via Ruggiero Settimo, PALERMO.*
Redazione dei Rendiconti

CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

(Società fondata il 2 marzo 1884)

30, via Ruggiero Settimo, 30.

Per telegrammi: *Tipomate Palermo.* Telefono: *N° 4-50.*

UFFICIO DI PRESIDENZA

pel biennio 1904-1905

(eletto dall'Assemblea dei Soci residenti nell'adunanza del 10 maggio 1904):

Albeggiani, presidente.—**Gebbia,** vice presidente. — **di Simone** e **Guerra,** segretari. — **La Mensa** e **Politi,** vice segretari. — **Porcelli (S.),** tesoriere. — **Alagna** e **Pepoli,** bibliotecari.

CONSIGLIO DIRETTIVO

(COMITATO DI REDAZIONE DEI RENDICONTI)

pel triennio 1903-1904-1905

(eletto dall'intera Società il 18 gennajo 1903):

Albeggiani (Palermo), **Bianchi** (Pisa), **Capelli** (Napoli), **Cerruti** (Roma), **Del Pezzo** (Napoli), **Del Re** (Napoli), **Dini** (Pisa), **Gebbia** (Palermo), **Gerbaldi** (Palermo), **Guccia** (Palermo), **Loria** (Genova), **Mittag-Leffler** (Stockholm), **Pascal** (Milano), **Peano** (Torino), **Pincherle** (Bologna), **Poincaré** (Paris), **Tonelli** (Roma), **Torelli** (Palermo), **Volterra** (Roma), N.N.

Delegato dal Consiglio Direttivo per dirigere la pubblicazione dei RENDICONTI (Art. 20 dello Statuto): ***Guccia.***

STATO DELLA SOCIETÀ AL 22 MAGGIO 1904.

Soci al 2 marzo 1904 (cfr. *Rendiconti,* t. XVIII, p. XXII)	n° 195
Soci nuovi ammessi nelle adunanze del 10 aprile, 8 e 22 maggio 1904 (cfr. *Rendiconti,* t. XVIII, pp. 204, 222, 223).	n° 5
Soci al 22 maggio 1904	n° 200

A contare da oggi, ogni socio autore di Nota o Memoria accettata per la stampa dal Comitato di Redazione e pubblicata nei RENDICONTI riceverà gratis e franco di porto a domicilio 100 Estratti del suo lavoro.

Palermo, 22 maggio 1904.

Il Presidente della Società
M. L. Albeggiani.

Il Direttore dei *Rendiconti*
G. B. Guccia.

CONTRIBUTO ALLA TEORIA DEI PRODOTTI INFINITI E DELLE SERIE A TERMINI POSITIVI.

Nota di **Ettore Bortolotti**, in Modena.

Estratto dal t. XVIII (1904) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*
Adunanza del 13 marzo 1904.

Mi propongo, con questo breve lavoro, di cercare delle relazioni fra il comportamento assintotico della variabile $\varphi_n = \prod_{r=1}^{n}(1 + a_r)$ e la legge di formazione della variabile reale a_n, quando n tenda all'infinito.

Porrò prima in riscontro le variabili φ_n, ed $e^{\sum_1^n a_r}$, ricavandone, per la φ_n, le condizioni di convergenza assoluta e condizionata, e, nel caso della convergenza, un metodo per il calcolo approssimato, nel caso della divergenza, un criterio per determinarne la rapidità di crescenza.

In secondo luogo, ponendo $a'_n + a''_n = a_n$, cercherò di far dipendere la determinazione del comportamento assintotico, od il calcolo numerico nel caso della convergenza, della variabile $\varphi_n = \prod_{1}^{n}(1 + a_r)$, da quello delle variabili $\psi'_n = \prod_{1}^{n}(1 + a'_r)$, $\psi''_n = \prod_{1}^{n}(1 + a''_r)$.

Sarà agevole di qui passare al caso in cui si abbia $a_n = \alpha\, b_n$, e stabilire analoghe relazioni fra le variabili $\varphi_n = \prod_{1}^{n}(1 + a_r)$, $\psi_n = \prod_{1}^{n}(1 + b_r)$.

In particolare si vedrà che, nel caso della divergenza, se l'ordine di infinito (di infinitesimo) della variabile ψ_n si assume come unità, e se α è una costante positiva, l'ordine della φ_n è espresso dal simbolo (α).

Più generalmente, *se a_n, c_n sono variabili reali, soddisfacenti le con-*

dizioni: α) *le* a_n *sono tutte dello stesso segno,* β) *i binomi* $1 + a_n$ $1 + a_n c_n$ *sono tutti positivi, e se* β_1, β_2 *sono i limiti inferiore e superiore di indeterminazione della espressione* $\dfrac{\lg(1 + a_n c_n)}{\lg(1 + a_n)}$, *la variabile* $\prod_1^n (1 + a_n c_n)$ *non è infinita (infinitesima) di ordine inferiore a quello della variabile* $\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^{\beta_1 - \varepsilon}$, *nè di ordine superiore a quello della variabile* $\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^{\beta_1 + \varepsilon}$, ε positivo qualunque.

In particolare, *se* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n=\infty} c_n = \beta$, *si ha* $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, *e cioè, l'ordine di infinito della* $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$, *secondo il concetto di* CAUCHY, *è eguale a quello della variabile* $\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^{\beta}$.

Riprendendo alcune ricerche precedenti, mi studierò in fine di mettere in relazione le variabili

$$\varphi_n = \prod_{r=1}^{n} [1 + a(x_0 + n)], \qquad f(n) = e^{\int_{x_0}^{x_0+n} a(x)dx},$$

estendendo così ai prodotti infiniti un metodo che fu dato dal CAUCHY per le serie a termini positivi.

Di cotesta quistione, per altro, non darò che un rapido cenno, riserbando ad un prossimo studio una più ampia trattazione

Ho voluto nel § I, insieme con alcuni risultamenti che ritengo nuovi, stabilire le principali proposizioni che servono di fondamento alla teoria dei prodotti infiniti, perchè il metodo che ho seguìto porta a dimostrarle, quasi senza sviluppi di calcolo, nel modo che parmi più semplice e naturale *).

---

*) Non richiedo a chi legge che le prime nozioni sui limiti e sulle serie, quali si insegnano nel corso di Algebra ai nostri studenti di primo anno e si trovano, per fissare le idee, nell'*Analisi Algebrica* del CESÀRO.

Il PRINGSHEIM in una dotta memoria del vol. XXXIII dei « Mathematische Annalen » stabilisce i fondamenti sulla convergenza dei prodotti infiniti con metodo certo rigoroso, e, dal suo punto di vista, elementare; ma lungo, difficile, laboriosissimo. Egli trova necessario quel metodo, per evitare la considerazione di trascendenti logaritmiche, usate dal DINI nella sua classica memoria « *Sui prodotti infiniti* » (Annali di Matematica, serie II, t. 2, 1870). Credo che il § I della presente pubblicazione, dove mi sono studiato

Delle *serie a termini positivi*, tratto incidentalmente, nel § II, per mostrare come il metodo che uso per lo studio dei prodotti infiniti, possa giovare anche per quello delle serie, e conduca rapidamente ai criterî, detti logaritmici, di convergenza, ed a criterî che in taluni casi servono per determinare l'ordine di infinito di serie divergenti. Nel § III, e nel IV, poi, studio il comportamento assintotico della serie a termini positivi $\sum [a_n - \lg(1 + a_n)]$, dove a_n è una variabile reale infinitesima per $n = \infty$.

Questa serie, per $a_n = \frac{1}{n}$, ha per somma la costante di EULERO ed è in ogni caso strettamente legata con le variabili

$$\varphi_n = \prod_{r=1}^{n} (1 + a_r), \qquad A_n = \sum_{r=1}^{n} a_r .$$

§ I.

1. Sia a_r una variabile positiva; si indichi con A_n la somma dei primi termini della serie

$$(1) \qquad \sum_1^\infty a_r = a_1 + a_2 + \cdots$$

e con φ_n il prodotto dei primi n fattori nel prodotto infinito:

$$(2) \qquad \prod_1^\infty (1 + a_r) = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots$$

Le variabili A_n, φ_n sono entrambe sempre crescenti; se una almeno di esse è infinita per $n = \infty$, potremo scrivere *):

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\lg \varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{\lg \varphi_n - \lg \varphi_{n-1}},$$

quando esista il secondo membro.

Ma si ha

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{\lg \varphi_n - \lg \varphi_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}};$$

---

di imitare la scioltezza e la eleganza dei metodi del DINI e del CAUCHY, evitando considerazioni di ordine trascendentale, non sarà trovato dai nostri scolari meno elementare di quello del PRINGSHEIM.

*) Cfr. CESÀRO, *Analisi Algebrica,* pag 98.

dunque, quando sia determinato il limite della espressione $\lg(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}$, avremo:

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{A_n}{\lg\varphi_n}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\lg(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}\,;$$

ed, in ogni caso, usando il simbolo $\lim\limits_{n=\infty}\inf. f_n$ per indicare il limite inferiore di indeterminazione della variabile f_n, si avrà *):

$$(6)\qquad \lim_{n=\infty}\inf.\frac{A_n}{\lg\varphi_n}\geqq\lim_{n=\infty}\inf.\frac{1}{\lg(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}\,.$$

2. Supponiamo ora che sia

$$\lim_{n=\infty} a_n=0\,.$$

Per ogni valore finito di n avremo $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}<e$, ed al limite, per $n=\infty$, $\lim\limits_{n=\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$ **).

D'onde si deduce:

$$(7)\qquad \frac{A_n}{\lg\varphi_n}=1+\varepsilon_n\,,\qquad \varepsilon_n>0\,,\qquad \lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$$

ed anche:

$$(8)\qquad \frac{e^{A_n}}{\varphi_n}=\varphi_n^{\varepsilon_n}\,,\qquad \varepsilon_n>0\,,\qquad \lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0.$$

3. Le variabili sempre crescenti A_n, φ_n sono determinate per $n=\infty$.

Se non è $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$, divergono entrambe, se è $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$ possono convergere. La formula (8) però, dimostra che esse sono sempre insieme divergenti: d'onde il noto teorema:

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del prodotto infinito $\prod\limits_1^\infty(1+a_n)$ *è che converga la serie* $\sum\limits_1^\infty a_n$.

4. Le variabili A_n, φ_n *sieno convergenti.* Posto

$$(9)\qquad \alpha_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\qquad Q_n=(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\ldots,$$

*) Cfr. O. Stolz, Mathematische Annalen, Bd. XXXIII, pag. 243.

**) Cesàro, loc. cit., pag. 110.

avremo *)

$$(10)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{\lg Q_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\lg Q_n - \lg Q_{n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{\lg(1 + a_{n+1})} = 1 .$$

Scriveremo perciò

$$(11)\quad \alpha_n = \lg Q_n^{1+\varepsilon_n}, \qquad \frac{e^{\alpha_n}}{Q_n} = Q_n^{\varepsilon_n}, \qquad \varepsilon_n > 0, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ed anche

$$(12)\qquad e^{\sum\limits_{r=n}^{\infty} a_r} > \prod_{r=n}^{\infty}(1 + a_r), \qquad \lim_{n=\infty} \frac{e^{\sum\limits_{r=n}^{\infty} a_r}}{\prod\limits_{r=n}^{\infty}(1 + a_r)} = 1.$$

La variabile $\prod\limits_{1}^{n}(1 + a_r)$ *ha dunque la stessa rapidità di tendenza al limite della variabile* $e^{\sum\limits_{1}^{n} a_r}$.

Calcolando direttamente il prodotto dei primi n fattori, avremo un limite superiore dell'errore commesso trascurando gli altri, se calcoleremo la espressione $e^{\sum\limits_{n}^{\infty} a_r}$, od una espressione approssimata in eccesso di questa.

5. Nel caso della *divergenza,* le formule (7) ci assicurano che *la serie* $\sum\limits_{1}^{\infty} a_r$ *ha lo stesso ordine di infinito e la stessa parte principale del logaritmo del prodotto infinito* $\prod\limits_{1}^{\infty}(1 + a_r)$.

Dalle formule (8) poi ricaviamo

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{A_n}}{\varphi_n} \geqq 1 ,$$

cioè *l'ordine di infinito del prodotto* $\prod\limits_{1}^{\infty}(1 + a_r)$ *è minore od eguale a quello della espressione* $e^{\sum\limits_{1}^{\infty} a_r}$.

Al § III vedremo in quali casi cotesti ordini sieno eguali.

---

*) Ibidem, pag. 99.

6. Indicando con b_n una variabile positiva infinitesima per $n = \infty$, e con B_n la somma $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, poniamo:

$$\psi_n = (1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n).$$

Le variabili B_n, ψ_n, sono entrambe monotone; nel caso che la prima sia infinita, o che la seconda sia infinitesima, potremo scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n}{\lg \psi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{B_n - B_{n-1}}{\lg \psi_n - \lg \psi_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg (1 - b_n)^{\frac{1}{b_n}}} = -1.$$

Se con σ_n indichiamo una variabile positiva infinitesima per $n = \infty$, avremo perciò

$$(14) \quad \frac{-B_n}{\lg \psi_n} = 1 - \sigma_n, \quad \frac{e^{-B_n}}{\psi_n} = \psi_n^{-\sigma_n}, \quad \sigma_n > 0, \quad \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0.$$

Ricordando che per le variabili monotone B_n, ψ_n, esiste sempre limite determinato, ricaveremo di qui la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 - b_n)$ *converga verso un limite diverso dallo zero, è la convergenza della serie* $\sum_1^\infty b_n$.

Inoltre potremo affermare che:

Se la serie $\sum_1^\infty b_n$ *diverge, il prodotto infinito* $\prod_1^\infty (1 - b_n)$ *è infinitesimo di ordine maggiore od eguale a quello della espressione* $e^{-\sum_1^\infty b_n}$.

7. Sia c_n una variabile reale infinitesima per $n = \infty$.

Consideriamo il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_n)$.

Se nella serie $\sum_1^\infty c_n$ distinguiamo coi simboli $a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$ $b_1, b_2, b_3, \dots b_m, \dots$ i termini positivi ed i valori assoluti dei termini negativi rispettivamente, potremo distinguere i tre seguenti casi *):

I. Le serie $\sum a_m$, $\sum b_m$, convergono entrambe.

II. » » » » divergono entrambe.

III. » » » » sono l'una convergente, l'altra divergente.

*) Cfr. Dini, *Sui prodotti infiniti*, Annali di Matematica, serie II, tomo II, pag. 31.

I). Se le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergono entrambe, sono convergenti anche i prodotti infiniti $\prod(1 + a_n)$, $\prod(1 - b_n)$ e la serie $\sum c_n$ converge assolutamente.

Se indichiamo con c'_1, c'_2, c'_3, ... una particolare permutazione dei termini della $\sum c_n$, ad ogni coppia di numeri positivi ε, r faremo corrispondere un numero n_0 tale che le somme

$$a'_{n_1} + a'_{n_1+1} + \cdots + a'_{n_1+r_1}, \quad b'_{n_2} + b'_{n_2+1} + \cdots + b'_{n_2+r_2}$$

dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi contenuti nella somma:

$$c'_n + c'_{n+1} + \cdots + c'_{n+r}, \qquad n \geqq n_0,$$

sieno entrambe minori di ε.

Ma si ha:

$$\lim_{n_1=\infty} \frac{e^{\sum\limits_{s=n_1}^{n_1+r_1} a'_s}}{\prod\limits_{s=n_1}^{n_1+r_1}(1 + a'_s)} = 1, \qquad \lim_{n_2=\infty} \frac{e^{-\sum\limits_{s=n_2}^{n_2+s_2} b'_s}}{\prod\limits_{s=n_2}^{n_2+r_2}(1 - b'_s)} = 1;$$

faremo dunque corrispondere al numero ε un numero N maggiore di n_0 e tale che

$$1 < \frac{e^{\sum\limits_{s=n_1}^{n_1+s_1} a'_s}}{\prod\limits_{s=n_1}^{n_1+r_1}(1 + a'_s)} < 1 + \varepsilon, \quad 1 < \frac{e^{-\sum\limits_{s=n_2}^{n_2+r_2} b'_s}}{\prod\limits_{s=n_2}^{n_2+r_2}(1 - b'_s)} < 1 + \varepsilon, \quad n_1, n_2 > N;$$

cioè:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} < \prod_{s=n_1}^{n_1+r_1}(1 + a'_s) < e^{\varepsilon}, \qquad \frac{e^{-\varepsilon}}{1 + \varepsilon} < \prod_{s=n_2}^{n_2+r_2}(1 - b'_s) < 1;$$

finalmente:

$$\frac{e^{-\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)^2} < \prod_{s=n}^{n+r}(1 + c'_s) < e^{\varepsilon}, \qquad n > N,$$

e ciò dimostra la convergenza del prodotto $\prod\limits_1^{\infty}(1 + c'_n)$ *), cioè la convergenza assoluta del prodotto $\prod\limits_1^{\infty}(1 + c_n)$.

---

*) Cfr. p. es. PRINGSHEIM, Mathematische Annalen, XXXIII, pp. 127, 128.

II. Le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$ divergono entrambe. Cangiando l'ordine dei termini nelle serie $\sum c_n$ in tutti i modi possibili, questa serie verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e ciascuno un numero infinito di volte; e per dati cangiamenti dello stesso ordine diverrà anche indeterminata.

Ordiniamo i termini c_n in modo che la somma $c'_1 + c'_2 + \cdots + c'_n$, per n abbastanza grande, superi qualunque numero positivo M.

Conservando le notazioni usate nel caso precedente, avremo

$$\sum_{s=1}^{n_1} a'_s - \sum_{s=1}^{n_2} b'_s > M\,, \qquad n \geqq n_0\,.$$

Dunque

$$n \geqq n_0\,, \qquad \frac{\sum\limits_{s=1}^{n_1} a'_s}{\sum\limits_{s=1}^{n_2} b'_s} > 1 + \frac{M}{\sum\limits_{s=1}^{n_2} b'_s}$$

e potremo supporre le c'_n ordinate in modo che il quoziente $\dfrac{M}{\sum\limits_1^{n_2} b'_s}$ abbia limite superiore di indeterminazione maggiore di zero.

Da ciò, e dalle relazioni

$$\lim_{n_1=\infty} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n_1} a'_s}{\lg \prod\limits_1^{n_1} (1 + a'_s)} = 1, \qquad \lim_{n_2=\infty} \frac{-\sum\limits_1^{n_2} b'_s}{\lg \prod\limits_1^{n_2} (1 - b'_s)} = 1$$

[formule (7), (14)], dedurremo immediatamente:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_1^{n_1} a'_s - \sum\limits_1^{n_2} b'_s}{\lg \prod\limits_1^{n_1} (1 + a'_s) + \lg \prod\limits_1^{n_2} (1 - b'_s)} = 1,$$

cioè

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c'_s}{\lg \prod\limits_1^{n} (1 + c'_s)} = 1$$

e ciò prova che, nell'ordine indicato, il prodotto $\prod\limits_1^{\infty} (1 + c'_s)$ diverge verso $+\infty$.

La medesima dimostrazione, quando la serie $\sum c_n$ sia ordinata in modo che la somma $c''_1 + c''_2 + \cdots + c''_n$ si mantenga inferiore di qualunque numero negativo $- M$, serve a provare che il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c''_n)$ corrispondente tende al limite zero.

III. Le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$, sieno l'una convergente, l'altra divergente.

La serie $\sum c_n$ in tal caso diverge assolutamente: con ragionamento poco diverso dal precedente, proveremo che il prodotto $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ diverge assolutamente; e cioè: verso $+ \infty$ se la serie $\sum a_n$ diverge, verso lo zero se diverge la serie $\sum b_n$ *).

8. Da tutto quanto abbiamo detto si ricava: *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta del prodotto infinito* $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ *è la convergenza assoluta della serie* $\sum_1^\infty c_n$ **).

La condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta di una serie $\sum c_n$ consiste però, come è noto, nella convergenza della serie dei valori assoluti: $\sum |c_n|$, ed è questa anche condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del prodotto infinito $\prod_1^\infty [1 + |c_n|]$; concludiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_n)$, *è la convergenza del prodotto:*

---

*) Non mi dilungo in molti particolari trattandosi di cose note. Il DINI, nella memoria citata, dimostra di più che: *alterando l'ordine dei fattori si può far prendere al prodotto infinito qualunque valore e anche ridurlo indeterminato.*

Nel § III, studierò la convergenza condizionata, considerando così il problema da un punto di vista più generale.

**) È quasi superfluo avvertire che la *convergenza di un prodotto infinito* si intende al modo indicato dal DINI ed esplicitamente definito dal PRINGSHEIM, cioè si fa dipendere dalla esistenza del limite *finito e diverso dallo zero* per la successione

$$P_n = (1 + c_1)(1 + c_2) \ldots (1 + c_n), \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\prod_{1}^{\infty}(1+|c_n|),$$

formato coi valori assoluti $|c_n|$ *delle variabili* c_n.

§ II.

9. Le presenti ricerche hanno principalmente in vista la teoria dei prodotti infiniti; ma i teoremi or ora dimostrati ed il metodo seguìto possono utilmente servire anche allo studio delle serie a termini positivi.

Servano d'esempio le proposizioni seguenti:

I. *Se la variabile* φ_n *tende all'infinito sempre crescendo e soddisfa la condizione*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}=1,$$

le due serie:

$$(15)\qquad \sum_{1}^{\infty}a_n=\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{\varphi_n},\qquad \sum_{1}^{\infty}b_n=\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{\varphi_{n+1}},$$

divergono entrambe con rapidità pari a quella della variabile $\lg\varphi_n$.

E più esattamente si hanno le relazioni:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{1}^{n}a_n}{\lg\varphi_n}=1,\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{1}^{n}b_n}{\lg\varphi_n}=1.$$

Questa proposizione è una conseguenza immediata della formula (7).

In particolare: facendo $\varphi_n=n$, si ha la nota proprietà della serie armonica, di divergere come $\lg n$.

II. *Se la serie a termini positivi* $\sum\frac{1}{u_n}$ *è divergente e soddisfa la condizione* $\lim_{n=\infty}\frac{1}{u_n}=0$, *se si indica la somma dei suoi primi* n *termini col simbolo* σ_n *e si forma la serie* $\sum\frac{1}{u_n\sigma_n}$, *questa si comporta assintoticamente come* $\lg\sigma_n$.

Più precisamente si ha

$$(16)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{u_r\sigma_r}}{\lg\sigma_n}=1.$$

Si deduce ciò dalla proposizione precedente col fare $\varphi_n=\sigma_n$.

La successiva applicazione di cotesto risultamento conduce alla co-

struzione della scala di serie divergenti

$$(17)\quad \sum \frac{1}{u_n}\,, \quad \sum \frac{1}{u_n\,\sigma_n}\,, \quad \sum \frac{1}{u_n\,\sigma_n \lg \sigma_n}\,, \quad \sum \frac{1}{u_n\,\sigma_n \lg \sigma_n \lg\lg \sigma_n}\,, \ldots$$

con la proprietà che *la somma dei primi n termini di una qualunque di esse serie, tende all'infinito con rapidità eguale a quella del logaritmo della somma analoga, nella serie precedente.*

Le proposizioni precedenti sono note da gran tempo, si trovano infatti nella memoria del DINI « *Sulle serie a termini positivi* » stampata negli « Annali delle Università Toscane » del 1867, e sono qui recate unicamente per dare esempio della brevità del metodo.

Tenendo conto della proposizione:

Se la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{u_n}$ *è divergente, se* ρ *indica un numero positivo, la serie:*

$$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{u_n\,\sigma_n^{1+\rho}}\,, \qquad \left(\sigma_n = \sum_1^n \frac{1}{u_n}\right),$$

è convergente *);

e giovandoci della prop. II, formeremo la scala di serie convergenti:

$$(19)\quad \frac{1}{u_n\,\sigma^{1+\rho}}\,, \quad \frac{1}{u_n\,\sigma_n (\lg \sigma_n)^{1+\rho}}\,, \quad \frac{1}{u_n\,\sigma_n \lg \sigma_n (\lg\lg \sigma_n)^{1+\rho}}\,, \ldots$$

Donde i soliti criterî, detti logaritmici, di convergenza per la serie a termini positivi **).

III. *Se la serie* $\sum_1^\infty \frac{1}{u_n}$ *diverge ed è* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, *la serie* $\sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{u_n}$ *diverge con rapidità eguale a quella della variabile* $\frac{\sigma_n^2}{2}$.

Infatti si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_1^n \frac{\sigma_r}{u_r}}{\frac{\sigma_n^2}{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\sigma_n}{u_n}}{\frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{\sigma_{n-1}^2}{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n - \frac{1}{2u_n}} = 1\,.$$

In particolare: la serie $\sum_1^\infty \frac{\lg n}{n}$ diverge come $\frac{1}{2}(\lg n)^2$, cioè come $\lg\left(n^{\frac{\lg n}{2}}\right)$; la serie $\sum \frac{\lg \sigma_n}{u_n\,\sigma_n}$ diverge come $\lg\left(\sigma_n^{\frac{\lg \sigma_n}{2}}\right)$.

---

*) Cf. DINI, loc. cit., § 6.

**) DINI, loc. cit., § 8.

§ III.

10. Abbiamo visto al n° 5 che l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_n)$ è minore od uguale a quello della espressione $e^{\sum_1^\infty a_n}$.

L'eguaglianza di quegli ordini di infinito può sicuramente affermarsi quando la serie $\sum a_n^2$ *sia convergente.*

Si consideri infatti la serie:

(20) $a_1 - \lg(1 + a_1) + a_2 - \lg(1 + a_2) + a_3 - \lg(1 + a_3) + \cdots$

Se poniamo

$$S_n = C_{2n} = \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)], \qquad S'_n = \sum_1^n a_r^2,$$

abbiamo:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{S'_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - \lg(1 + a_n)}{a_n^2}.$$

Ora si ha:

$$\lim_{x=0} \frac{x - \lg(1 + x)}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{1 - \dfrac{1}{1 + x}}{2x} = \lim_{x=0} \frac{\dfrac{1}{(1 + x)^2}}{2} = \frac{1}{2}:$$

avremo anche perciò:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{S'_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - \lg(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2};$$

d'onde si vede che le somme C_{2n} di un numero pari di termini, della serie (20) convergono verso un limite finito C quando la serie $\sum a_n^2$ sia convergente.

Le somme C_{2n+1} di un numero dispari di termini, differiscono dalle corrispondenti somme C_{2n} per le quantità infinitesime a_{n+1}, e tendono perciò al medesimo limite.

La costante positiva C somma della serie (20), nel caso particolare di $a_n = \frac{1}{n}$, assume il valore 0,577215664 ... ed ha nome da EULERO *).

Se scriviamo la somma C_{2n} dei primi $2n$ termini della serie (20)

*) Cf. CESÀRO, loc. cit. pag. 147.

sotto la forma:

(21) $C_{2n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \lg (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) = A_n - \lg \varphi_n$

abbiamo

$$\lim_{n=\infty} (A_n - \lg \varphi_n) = C$$

e perciò:

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{A_n}}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{e^{\sum\limits_1^n a_r}}{\prod\limits_1^n (1 + a_r)} = e^C; \tag{22}$$

e ciò prova l'eguaglianza negli ordini di infinito delle variabili $e^{\sum\limits_1^n a_r}$, $\prod\limits_1^n (1 + a_r)$.

11. Paragoniamo le serie a termini positivi

$$\sum_1^\infty - [a_n + \lg (1 - a_n)] \tag{23}$$

$$\sum_1^\infty [a_n - \lg (1 + a_n)]. \tag{20}$$

Facendo il rapporto dei termini corrispondenti:

$$\frac{- a_n - \lg (1 - a_n)}{a_n - \lg (1 + a_n)}$$

e considerando che:

$$\lim_{x=0} \frac{- x - \lg (1 - x)}{x - \lg (1 + x)} = \lim_{x=0} \frac{- 1 + \frac{1}{1 - x}}{1 - \frac{1}{1 + x}} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{(1 - x)^2}}{\frac{1}{(1 + x)^2}} = 1,$$

e che la variabile a_n è supposta infinitesima per $n = \infty$, si ricava subito:

$$\lim_{n=\infty} \frac{- a_n - \lg (1 - a_n)}{a_n - \lg (1 + a_n)} = 1.$$

Le due serie (23), (20) *perciò convergono, o divergono insieme.*

Chiamando con C'_n la somma dei primi n termini della (23), avremo

$$C'_n = \sum_{r=1}^n (- a_r) - \lg \prod_{r=1}^n (1 - a_r) > 0,$$

cioè:

$$(24) \qquad \frac{e^{-\sum_1^n a_r}}{\prod_{r=1}^{n}(1-a_r)} = e^{C'_n} > 1.$$

Nel caso che la serie (23) *converga, ciò che in particolare ha luogo quando la serie* $\sum a_n^2$ *è convergente, indicandone la somma con* C', *si ha:*

$$(25) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{e^{-\sum_1^n a_r}}{\prod_1^n (1-a_r)} = e^{C'}.$$

Da cui si scorge che *se la serie* $\sum a_r^2$ *converge e la serie* $\sum a_r$ *diverge, le variabili* $e^{-\sum_1^n a_r}$, $\prod_1^n (1-a_r)$ *hanno lo stesso ordine di infinitesimo.*

12. Le serie $\sum a_r^2$, $\sum b_r^2$, dove le a_r, b_r sono variabili positive, convergano entrambe: convergeranno anche le serie $\sum [a_r - \lg(1+a_r)]$ $\sum -[b_r + \lg(1-b_r)]$.

Indicando con C_a, C'_b le somme di queste serie, avremo:

$$\lim_{n=\infty}\left[\sum_1^n a_r - \lg\prod_1^n(1+a_r) + \sum_1^n(-b_r) - \lg\prod_1^n(1-b_r)\right] = C_a + C'_b;$$

da cui

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\sum_1^n (a_r-b_r)}}{\prod_1^n (1+a_r)(1-b_n)} = e^{C_a+C'_b}.$$

13. Sia c_r una variabile reale infinitesima per $r=\infty$.

Consideriamo la serie

$$(26) \qquad \sum_1^\infty [c_r - \lg(1+c_r)].$$

Potremo supporre tutte le $|c_r|$ minori di 1, ed allora tanto i termini corrispondenti a valori positivi delle c_r, quanto quelli corrispondenti a valori negativi sono positivi, e *la serie* (26) *è a termini positivi.*

Ponendo

$$C_{n,c} = \sum_1^n [c_r - \lg(1 + c_r)],$$

ne verrà, per ogni valore di n:

$$(27) \qquad \frac{e^{\sum_1^n c_r}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = e^{C_{n,c}}.$$

Considerando ora che la serie (26) converge sempre, o diverge, *assolutamente*, si scorge che *la variabile $C_{n,c}$ non cambia il suo comportamento assintotico qualunque inversione si faccia nell'ordine delle c_r*.

La formula (27) ci offre dunque un mezzo semplicissimo per lo studio della *convergenza condizionata* del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_r)$.

14. Senza entrare ora nei dettagli della discussione di quella formula mi limiterò ad osservare che, tutti i teoremi dai vari autori trovati su questo argomento, se ne derivano con la massima facilità.

Taccio del teorema sulla convergenza assoluta, che ne è conseguenza immediata.

Supponiamo che *la serie $\sum c_r^2$ sia convergente.*

Convergeranno entrambe le serie $\sum a_r^2$, $\sum b_r^2$, dove a_r e b_r indicano i termini positivi ed i valori assoluti dei termini negativi delle c_r.

Convergono quindi le serie $\sum[a_r - \lg(1+a_r)]$, $\sum[-b_r - \lg(1-b_r)]$, e la serie (26) converge assolutamente.

La relazione

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{e^{\sum_1^n c_r}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = \lim_{n=\infty} e^{C_{n,c}} = e^C$$

vale perciò *indipendentemente dall'ordine delle c_r*.

Se la serie $\sum_1^\infty c_r^2$ converge ed, in uno speciale ordinamento, la $\sum_1^\infty c_r$ converge, in quello speciale ordinamento converge anche il prodotto $\prod_1^\infty (1+c_r)$;

e soddisfa la relazione

$$(29) \qquad \prod_1^\infty (1 + c_r) = e^{\sum_1^\infty c_r - C} .$$

Se, ordinando diversamente i termini c_r, *la serie* $\sum_1^\infty c_r$ *tende a* $+\infty$ $(-\infty)$, *il prodotto* $\prod_1^\infty (1 + c_r)$ *è infinito (infinitesimo) dello stesso ordine della espressione* $e^{\sum_1^\infty c_r}$.

15. *La serie* $\sum c_r^2$ *sia divergente;* divergerà assolutamente anche la serie a termini positivi (26) e la relazione:

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\sum_1^n c_r}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = +\infty$$

sarà verificata per qualunque ordinamento delle c_r.

Se per un particolare ordine delle c_r *la serie* $\sum_1^\infty c_r$ *risulterà convergente, il corrispondente prodotto* $\prod_1^\infty (1 + c_r)$ *sarà infinitesimo di ordine eguale a quello della espressione* $e^{-\sum_1^\infty c_r^2}$.

§ IV.

16. Sieno a_r, b_r variabili positive.

Poniamo

$$(30)\begin{cases} A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \varphi_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \\ B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \quad \psi_n = (1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n) \\ C_{n,a} = a_1 - \lg(1 + a_1) + a_2 - \lg(1 + a_2) + \cdots + a_n - \lg(1 + a_n) = A_n - \lg\varphi_n \\ C_{n,b} = b_1 - \lg(1 + b_1) + b_2 - \lg(1 + b_2) + \cdots + b_n - \lg(1 + b_n) = B_n - \lg\psi_n . \end{cases}$$

Considerando che la funzione:

$$y = x - \lg(1 + x)$$

è, nel tratto $(0, \ldots +\infty)$, continuamente crescente, si vede che, per

ogni valore di n e qualunque sia il comportamento assintotico della variabile positiva a_n,

$$(31)\qquad A_n > \lg \varphi_n, \qquad e^{\sum\limits_{r=1}^{n} a_r} > \prod_{r=1}^{n}(1 + a_r).$$

Donde in particolare risulta che *l'ordine di infinito del prodotto* $\prod\limits_1^\infty (1 + a_r)$ *non è mai superiore a quello della espressione* $e^{\sum\limits_1^\infty a_r}$.

In secondo luogo supponiamo:

$$a_r \geqq b_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots);$$

avremo

$$A_n - \lg \varphi_n \geqq B_n - \lg \psi_n,$$

cioè

$$(32)\qquad C_{n,a} \geqq C_{n,b}.$$

Dato adunque che le serie $\sum\limits_1^\infty [a_r - \lg(1 + a_r)]$, $\sum\limits_1^\infty [(b_r - \lg(1 + b_r)]$ convergano verso limiti finiti C_a, C_b, avremo

$$C_a \geqq C_b;$$

da cui:

La costante C_a *somma della serie* $\sum [a_r - \lg(1 + a_r)]$ *è tanto più piccola quanto più rapida è la convergenza allo zero della variabile* a_r.

Considerando ora che per la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$ si ha $C = 0{,}577\ldots$, si scorge che, per serie $\sum a_n$ convergenti, si ottengono costanti C_a abbastanza piccole $\left(\text{minori delle somme } \frac{1}{2}\sum\limits_1^\infty a_n^2\right)$ e che, per ottenere una approssimazione in eccesso del valore del prodotto infinito convergente $\prod\limits_1^\infty (1 + a_r)$, si può calcolare la espressione $e^{\sum\limits_1^\infty a_r}$.

17. Conservando le notazioni (30), donde in particolare si deriva:

$$(33)\qquad \sum_1^n [a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r)] = A_n + B_n - \lg \varphi_n \psi_n = C_{n,a} - C_{n,b},$$

poniamo inoltre:

$$(34)\qquad \sum_1^n [a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r)] = C_{n,a+b}.$$

Osservando che per $a_r > 0$, $b_r > 0$, si ha:

$$1 + a_r + b_r < (1 + a_r)(1 + b_r)$$

e che perciò:

$$(35)\quad a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r) > a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r),$$

ricordando inoltre che la funzione $x - \lg(1 + x)$ per valori positivi della x è sempre crescente, abbiamo

$$a_r + b_r + a_r b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r) > a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r)$$
$$> a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r),$$

da cui

$$(36)\qquad C_{n,a} + C_{n,b} + \sum_1^n a_r b_r > C_{n,a+b} > C_{n,a} + C_{n,b}.$$

Ne concludiamo che: *Se esistono, determinati e finiti, i limiti per $n = \infty$ delle $C_{n,a}$, $C_{n,b}$, e se la serie $\sum_1^\infty a_n b_n$ è convergente, esiste anche limite finito per la variabile $C_{n,a+b}$ e soddisfa la limitazione:*

$$\lim_{n=\infty}(C_{n,a} + C_{n,b}) < \lim_{n=\infty} C_{n,a+b} < \lim_{n=\infty}(C_{n,a} + C_{n,b}) + \sum_1^\infty a_r b_r.$$

18. Supponiamo ora che

$$a_r + b_r < 1 \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots).$$

Facilmente verificheremo che:

$$(37)\quad 0 < \lg(1+a_r)(1+b_r) - \lg(1+a_r+b_r) < a_r + b_r - \lg(1+a_r)(1+b_r),$$

da cui

$$(38)\quad 0 < \lg\prod_1^n(1 + a_r)(1 + b_r) - \lg\prod_1^n(1 + a_r + b_r) < C_{n,a} + C_{n,b},$$

infine

$$(39)\qquad 1 < \frac{\prod_1^n(1 + a_r)(1 + b_r)}{\prod_1^n(1 + a_r + b_r)} < e^{C_{n,a}+C_{n,b}}.$$

In particolare: *se le serie $C_{n,a}$, $C_{n,b}$ convergono, ed i due prodotti infiniti $\prod_1^\infty(1 + a_n)(1 + b_n)$, $\prod_1^\infty(1 + a_n + b_n)$ sono divergenti, essi hanno lo stesso ordine di infinito; se invece convergono, sono fra loro nella relazione:*

$$(40)\qquad \prod_1^\infty(1+a_r+b_r)<\prod_1^\infty(1+a_n)(1+b_n)<\prod_1^\infty(1+a_r+b_r).e^{C_a+C_b}.$$

Se scriviamo la (39) sotto la forma

$$(41)\qquad 1<\prod_1^n\left(1+\frac{a_r b_r}{1+a_r+b_r}\right)<e^{C_{n,a}+C_{n,b}}$$

scorgiamo che: *se le serie* $C_{n,a}$, $C_{n,b}$ *sono convergenti*, converge il prodotto infinito $\prod_1^\infty\left(1+\frac{a_n b_n}{1+a_n+b_n}\right)$: converge dunque anche la serie:

$$\sum_1^\infty \frac{a_n b_n}{1+a_n+b_n};$$

ed infine *converge la serie* $\sum_1^\infty a_n b_n$, i cui termini hanno a quelli della serie precedente rapporti tendenti al limite 1; ma dalla formola (36) deduciamo che in allora converge anche la $C_{n,a+b}$; in fine concluderemo:

Se le serie $\sum_1^\infty[a_n-\lg(1+a_n)]$, $\sum_1^\infty[(b_n-\lg(1+b_n)]$ *sono entrambe convergenti, convergono anche le serie*:

$$\sum_1^\infty a_n b_n,\qquad \sum_1^\infty[a_n+b_n-\lg(1+a_n+b_n)].$$

19. Scrivendo la formula (37) sotto la forma

$$a_r+b_r-\lg(1+a_r+b_r)-[a_r+b_r-\lg(1+a_r)(1+b_r)]$$
$$<a_r+b_r-\lg(1+a_r)(1+b_r)$$

e sommando da $r=1$ ad n, si ha:

$$C_{n,a+b}-(C_{n,a}+C_{n,b})<C_{n,a}+C_{n,b},$$

cioè

$$(42)\qquad C_{n,a}+C_{n,b}<C_{n,a+b}<2(C_{n,a}+C_{n,b}).$$

Osserviamo ora che per $x>0$, si ha

$$x-\lg(1+x)<\frac{x^2}{2},$$

d'onde si ricava:

$$C_{n,a}+C_{n,b}<\sum_1^n\frac{a_r^2+b_r^2}{2},$$

ed avremo

$$C_{n,a+b}<\sum_1^n(a_r^2+b_r^2),$$

da cui, ricordando la (34), dedurremo:

$$(43)\qquad 1 < \frac{e^{\sum_1^n (a_r+b_r)}}{\prod_1^n (1 + a_r + b_r)} < e^{\sum_1^n (a_r^2+b_r^2)}$$

In particolare, se la somma $\sum (a_r + b_r)$ è convergente, si ha la limitazione

$$(44)\qquad e^{\sum_1^\infty (a_r+b_r-a_r^2-b_r^2)} > \prod_1^\infty (1 + a_r + b_r) < e^{\sum_1^\infty (a_r+b_r)} .$$

20. Dalla formula (42), facendo $b = a$, si ricava:

$$2\, C_{n,a} < C_{n,2a} < 4\, C_{n,a} .$$

Di poi, facendo $b = 2a$:

$$3\, C_{n,a} < C_{n,3a} < 10\, C_{n,a} .$$

In generale, indicando con P_p l'integrale della equazione alle differenze:

$$(45)\qquad f_p - 2 f_{p-1} - 2 = 0,$$

che è determinato dal valore iniziale $P_1 = 1$, si ha

$$(46)\qquad p\, C_{n,a} < C_{n,pa} < P_p\, C_{n,a} .$$

I numeri P_p sono tutti finiti, epperò, in particolare, abbiamo:

Se la serie $\sum_1^\infty [a_r - \lg(1 + a_r)]$ *converge, ed è* p *un numero positivo, intero, qualunque, anche la serie*

$$\sum_1^\infty [p a_r - \lg(1 + p a_r)]$$

è convergente; e, se si incomincia a sommare da un indice abbastanza elevato perchè sia sempre $p a_r < 1$, *si ha:*

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^\infty [p a_r - \lg(1 + p a_r)] = \theta \sum_1^\infty [a_r - \lg(1 + a_r)] \\ &\qquad\qquad p < \theta < P_p . \end{aligned} \right.$$

21. Tale risultamento si estende senza difficoltà al caso in cui p rappresenti una costante positiva qualunque, e, tenendo conto, dei risultamenti ottenuti al § precedente, anche al caso di costanti negative.

Vale un risultamento analogo anche nel caso che p sia una quantità variabile ed abbia limiti superiore ed inferiore di indeterminazione finiti.

In particolare potremo enunciare la proposizione seguente:

Se la variabile b_n ha limite superiore di indeterminazione L, ed è p il massimo intero contenuto in L; se il suo limite inferiore di indeterminazione è un numero $l \geq 1$, se il prodotto $a_n b_n$, al pari della a_n, è sempre minore della unità, si ha:

$$(48)\qquad \begin{cases} \sum_1^n [a_r b_r - \lg(1 + a_r b_r)] = \theta_n \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)] \\ l < \theta_n < P_p. \end{cases}$$

Se la variabile b_n ha limite inferiore di indeterminazione $l > 1$, anche se non si possa accertare che tutte le $a_n b_n$ sieno minori di 1, si potrà sempre affermare che:

$$(49)\qquad \sum_1^n [a_r b_r - \lg(1 + a_r b_r)] > l \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)].$$

22. *Se le serie* $\sum_1^\infty [a'_r - \lg(1 + a'_r]$, $\sum [a''_r - \lg(1 + a''_r)]$, ... *sono tutte convergenti, se le variabili positive b'_r, b''_r, ... hanno limiti superiori di indeterminazione finiti, converge anche la serie*

$$\sum [a'_r b'_r + a''_r b''_r + \cdots - \lg(1 + a'_r b'_r + a''_r b''_r + \cdots)].$$

23. Supponiamo che la serie $\sum_1^\infty [a_n - \lg(1 + a_n)]$ sia divergente.

In tale ipotesi, essendo α una costante positiva (o negativa) qualunque, potremo scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)]}{\sum_1^n [(a_r - \lg(1 + a_r)]} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)}{a_r - \lg(1 + a_r)}$$

ed, analogamente a quanto si fece al n° 11, concluderemo:

$$(50)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)]}{\sum_1^n [(a_r - \lg(1 + a_r)]} = \alpha^2.$$

Di qui facilmente si deduce

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)] - \alpha \sum_1^n [(a_r - \lg(1 + a_r)]}{\alpha \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)]} = \alpha - 1,$$

cioè:

$$\lim_{n=\infty} - \lg \frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha C_{n,a}} = \alpha - 1,$$

che scriveremo:

$$- \lg \frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha C_{n,a}} = \alpha - 1 + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

cioè

$$\frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^\alpha} = e^{-\alpha C_{n,a}(\alpha - 1 + \varepsilon_n)}, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

infine:

$$(51) \quad \prod_1^n (1 + \alpha a_r) = \left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^\alpha \cdot e^{-\alpha C_{n,a}(\alpha - 1 + \varepsilon_n)}, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ricordando ora che $C_{n,a} = \sum_1^n a_r - \lg \prod_1^n (1 + a_r)$, e che, nella ipotesi $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, da cui non ci siamo dipartiti, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n a_r}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} = 1,$$

avremo

$$\frac{C_{n,a}}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} = \frac{\sum_1^n a_r}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} - 1 = \sigma_n, \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0, \qquad \sigma_n > 0$$

dunque

$$C_{n,a} = \lg\left[\prod_{1}^{n}(1 + a_r)\right]^{\sigma_n}, \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0, \qquad \sigma_n > 0$$

$$e^{C_{n,a}} = \left[\prod_{1}^{n}(1 + a_r)\right]^{\sigma_n}; \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha C_{n,a}(\alpha_1 + \varepsilon_n)} = \left[\prod_{1}^{n}(1 + a_n)\right]^{\delta_n} \\ \delta_n > 0, \qquad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0. \end{array} \right.$$

Sostituendo nelle (51) ho

$$(52) \quad \prod_{1}^{n}(1 + \alpha a_r) = \left[\prod_{1}^{n}(1 + a_r)\right]^{\alpha - \delta_n}, \quad \delta_n > 0, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0.$$

Questo risultamento si può esprimere dicendo:

Se l'ordine di infinito del prodotto $\prod_{1}^{\infty}(1 + a_r)$ *si assume come unità, l'ordine del prodotto* $\prod_{1}^{\infty}(1 + \alpha a_r)$ *non è maggiore di* α *ed è maggiore di* $\alpha - a$, *a positivo qualunque.*

Usando la notazione che il BOREL, seguendo le idee di CAUCHY, ha proposto *), diremo che quell'ordine è espresso dal simbolo (α).

24. Nel caso che *la serie* $\sum_{1}^{\infty}(a_n - \lg(1 + a_n))$ *sia convergente,* giovandoci del risultamento espresso dalla formola (47), con ragionamento analogo a quello fatto dianzi, avremo

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n=\infty} \dfrac{\prod_{1}^{n}(1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_{1}^{n}(1 + a_r)\right]^{\alpha}} = e^{(\alpha - \theta) C_a} \\ \theta \text{ determinato e finito, } C_a = \sum_{1}^{\infty}[a_n - \lg(1 + a_n)]. \end{array} \right.$$

D'onde concluderemo che, *preso per unità l'ordine di infinito del prodotto* $\prod_{1}^{\infty}(1 + a_r)$, *l'ordine di infinito del prodotto* $\prod_{1}^{\infty}(1 + \alpha a_r)$ *è espresso dal numero* α, non solo secondo la definizione di CAUCHY; ma

*) Cfr. E. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs.* (Paris), pag. 36.

anche nel senso più stretto, in cui ordinariamente è definito l'ordine di infinito.

25. Le ricerche precedenti si possono estendere a prodotti della forma $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$, $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ dove a_r, c_r sono variabili reali qualunque, soggette alle sole condizioni seguenti:

α) le a_r sono tutte di uno stesso segno e nessuna di esse è nulla,

β) i binomi $(1 + a_r)$, $(1 + a_r c_r)$, sono tutti maggiori di zero,

γ) il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ non è convergente.

Un ragionamento analogo a quello fatto al n° 23, ci conduce alla ricerca del numero $\beta = \lim_{r=\infty} \dfrac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)}$.

Se, per brevità di linguaggio, consideriamo gli infinitesimi come infiniti di ordine negativo, se per infinito principale assumiamo quello della variabile $\prod_1^n (1 + a_n)$ *nella ipotesi che questa finisca per superare qualunque numero positivo, quello della* $\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^{-1}$ *nel caso contrario, troveremo in ogni caso che il numero* β *esprime l'ordine di infinito (al senso di* CAUCHY) *del prodotto infinito* $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$.

26. *Sieno* β_1, β_2, *rispettivamente, i limiti inferiore e superiore di indeterminazione della espressione* $\dfrac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)}$, *e sia* ε *un numero positivo arbitrario.*

La variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ *sarà, per* $n = \infty$, *infinita (infinitesima), di ordine superiore a quello della variabile* $\left[\prod_1^n (1+a_r)\right]^{\beta_1 - \varepsilon}$, *ed inferiore a quello della variabile* $\left[\prod_1^n (1 + a_r)\right]^{\beta_1 + \varepsilon}$.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $\lim_{n=\infty} \prod_1^n (1 + a_r) = + \infty$.

Per la definizione di β_1, in corrispondenza di ε determineremo

un N tale che
$$n \geqq N, \qquad \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)} > \beta_1 - \varepsilon.$$

Ricordando la proprietà α) dei numeri a_r, avremo:
$$r \geqq N, \qquad 1 + a_r c_r > (1 + a_r)^{\beta_1 - \varepsilon},$$
$$n > N, \qquad \prod_{r=N}^{n}(1 + a_r c_r) > \left[\prod_{r=N}^{n}(1 + a_r)\right]^{\beta_1 - \varepsilon},$$
infine:
$$n > N, \qquad \frac{\prod_{r=1}^{n}(1 + a_r c_r)}{\left[\prod_{r=1}^{n}(1 + a_r)\right]^{\beta_1 - \varepsilon}} > \frac{\prod_{r=1}^{N}(1 + a_r c_r)}{\left[\prod_{r=1}^{N}(1 + a_r)\right]^{\beta_1 - \varepsilon}},$$
e ciò prova la prima parte dell'enunciato. Analoga dimostrazione si faccia per la parte che riguarda β_2.

Nel caso che β_1 risulti negativo, non potremo escludere che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sia infinita di ordine negativo, cioè nel fatto infinitesima.

Il teorema e la dimostrazione valgono anche nel caso che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r)$ tenda al limite zero e servono per determinare l'ordine di infinitesimo del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$. In questo caso, a limiti inferiori β_1 negativi, possono effettivamente corrispondere prodotti $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ infiniti per $n = \infty$.

Se è $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, segue senza difficoltà la proposizione enunciata al n° 25.

Se è $\beta_2 = 0$, la variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ potrà essere finita, od infinita (infinitesima) di ordine inferiore a quello di qualunque potenza positiva della $\prod_1^n (1 + a_r)$.

Se è $\beta_1 = \infty$, la $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sarà infinita (infinitesima) di ordine superiore a quello di qualunque potenza positiva della $\prod_1^n (1 + a_r)$.

27. *Se la variabile* a_n *soddisfa la relazione*

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

i numeri β_1, β_2, β, *definiti ai numeri precedenti si hanno cercando i limiti:*

$$\beta_1 = \liminf_{n=\infty} c_n, \quad \beta_2 = \limsup_{n=\infty} c_n, \quad \beta = \lim_{n=\infty} c_n.$$

Ciò in conseguenza del fatto:

$$\lim_{x=0} \frac{\lg[1 + x \cdot f(x)]}{\lg(1+x)} = \lim_{x=0} \frac{\dfrac{f(x) + x f'(x)}{1 + x f(x)}}{\dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x=0} f(x).$$

28. Come esempio di applicazione dei criterî esposti ai n[i] precedenti, prendiamo prima in esame il prodotto $\prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

La serie $\sum \left(\frac{1}{n} - \lg 1 + \frac{1}{n}\right)$ converge (ha per somma la costante di EULERO). La serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge come $\lg n$, il prodotto dato dunque diverge con la stessa rapidità del numero n.

Sia ora il prodotto $\prod \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)$, $\lim_{n=\infty} b_n = \beta$; divergerà esso come n^β.

Cioè: *il prodotto* $\prod_1^\infty (1 + a_n)$ *è infinito dell'ordine* β, *se la* a_n *è infinitesimo del* 1° *ordine ed ha per parte principale* $\frac{\beta}{n}$.

Risultamento trovato per altra strada nella mia Nota: *Sui prodotti infiniti divergenti* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2° Semestre del 1901).

Come secondo esempio consideriamo il prodotto infinito:

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n \lg n}\right).$$

La serie $\sum \left[\frac{1}{n \lg n} - \lg\left(1 + \frac{1}{n \lg n}\right)\right]$ che ha i termini inferiori a quelli della serie considerata all'esempio precedente, sicuramente converge.

La serie $\sum \frac{1}{n \lg n}$ diverge come $\lg \lg n$ (§ II, prop. II); il prodotto

proposto diverge perciò come $\lg n$: ed il prodotto

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{b_n}{n \lg n}\right), \qquad \lim_{n=\infty} b_n = p,$$

diverge come $(\lg n)^p$.

In generale: *se una funzione monotona $f(x)$ soddisfa la relazione* $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{b(x)}{x \lg x} + 1$, $\lim\limits_{x=\infty} b(x) = p$, *essa si comporta assintoticamente come la funzione* $(\lg x)^p$. (Cfr. *Sui prodotti infiniti divergenti* al n° 13).

Prendiamo infine ad esaminare il prodotto infinito $\prod\limits_1^\infty \left(1 + \dfrac{\lg n}{n}\right)$.

La serie $\sum \left[\dfrac{\lg n}{n} - \lg\left(1 + \dfrac{\lg n}{n}\right)\right]$ converge, perchè è convergente la serie $\sum \left(\dfrac{\lg n}{n}\right)^2$.

La serie $\sum \dfrac{\lg n}{n}$ si comporta assintoticamente come la variabile $\dfrac{(\lg n)^2}{2}$ (§ II, prop. IV). Il prodotto dato ha dunque ordine di infinito eguale a quello della variabile:

$$n^{\frac{\lg n}{2}}.$$

Il prodotto infinito

$$\prod_1^\infty \left(1 + b_n \frac{\lg n}{n}\right), \qquad \lim_{n=\infty} b_n = p$$

diverge dunque come la variabile

$$n^{\frac{p \lg n}{2}};$$

tale è anche la rapidità di divergenza di qualunque funzione monotona $f(x)$, la quale soddisfi la relazione

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1 + b_x \frac{\lg x}{x}, \qquad \lim_{x=\infty} b_x = p.$$

§ V.

29. La nota relazione, dovuta a CAUCHY *), fra le serie a termini positivi sempre decrescenti $\sum\limits_1^\infty \alpha(n)$, e gli integrali definiti impropri

*) Cfr. p. es. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique* (Paris 1902), pag. 379.

$\int_{1}^{\infty} \alpha(x)\, dx$, può servire a dedurre, dalle proposizioni enunciate nei §§ precedenti, altrettante proprietà relative al comportamento assintotico delle variabili $\prod_{r=1}^{n}[1+\alpha(x_0+r)]$, $\int_{x_0}^{x_0+n} \alpha(x)\, dx$.

Nella Nota già citata *Sui prodotti infiniti divergenti* ho trovato direttamente le più importanti di tali proposizioni, desumendole, con metodo che ritengo nuovo, da pochi e generali principî sulla crescenza delle funzioni monotone.

30. Non è difficile dimostrare *) che *tutte le funzioni reali $f(x)$ della variabile reale x, monotone in un determinato intorno dell'infinito, e la cui derivata logaritmica è infinitesima per $x = +\infty$, soddisfano la relazione:*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1; \tag{54}$$

e che, reciprocamente: *tutte le funzioni monotone $f(x)$ soddisfacenti la* (54), *non possono avere derivata logaritmica determinata per $x = +\infty$, se non infinitesima.*

Così pure si può affermare che:

Se si assegnano alla classe p^{esima} le funzioni monotone $f(x)$, le quali soddisfano le relazioni:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\lg f(x)}{x^p} = 0, \qquad \lim_{x=+\infty}.\text{ inf. } \frac{\lg f(x)}{x^{p-1}} > 0 \text{ **)}, \tag{54}$$

le funzioni

$$\varphi(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)} \tag{55}$$

appartengono alla classe $(p-1)^{\text{esima}}$, e reciprocamente.

31. Le funzioni della *prima classe* possono dunque mettersi sotto la forma

$$f(x) = e^{x.\varepsilon(x)}, \qquad \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

---

*) Cfr. *Sul limite del quoziente di due funzioni* (Annali di Matematica, tomo VIII della serie III, pag. 273 e seguenti).

**) Scrivo: $\lim_{x=+\infty}.\text{ inf.}$ invece di *limite inferiore di indeterminazione per $x = +\infty$.*

possono essere infinite od infinitesime, per $x = +\infty$, secondo che la $\varepsilon(x)$ è sempre positiva o sempre negativa in un determinato intorno dell'infinito, e soddisfano tutte la condizione:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

Se rappresento con $\alpha(x)$ una funzione positiva, monotona, della variabile reale x, derivabile in un determinato intorno dell'infinito; con $f(x)$ l'integrale della equazione alle differenze finite

$$f(x+1) = [1 + \alpha(x)]f(x) \tag{56}$$

determinato dal valore iniziale $f(x_0) = 1 + \alpha(x_0)$, e dalla condizione di essere finita e continua insieme con le sue derivate di qualunque ordine nell'intorno $(x_0 + \infty)$; ho le relazioni:

$$f(x_0 + n) = \prod_{r=0}^{n} [1 + \alpha(x_0 + r)] \tag{57}$$

e la $f(x)$ così formata sarà della prima classe, ogniqualvolta la $\alpha(x)$ sia infinitesima per $x = +\infty$ *).

Quando questo sia ammesso, la relazione

$$\alpha(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x+\theta)}{f(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{f(x+\theta h)} \cdot \frac{f(x+\theta)}{f(x)}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 1, \tag{58}$$

permetterà di dimostrare che *le funzioni $\alpha(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sono insieme della classe prima, od insieme di classi superiori.*

32. È facile verificare se una data funzione $\alpha(x)$ appartenga alla classe prima. Converrà esaminare se una almeno delle condizioni

$$\lim_{x=\infty} \frac{\alpha'}{\alpha} = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = 1, \qquad \lim_{x=\infty} [\alpha(x)]^{\frac{1}{x}} = 1,$$

sia o no soddisfatta.

Nel caso affermativo, dovendo essere anche la $\frac{f'}{f}$ della classe prima, scriveremo:

$$\frac{f'}{f} = e^{-x\varepsilon(x)}, \qquad \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0. \tag{59}$$

*) La $f(x)$ è certamente sempre crescente; si veda al proposito: Stolz *Grundzüge*, vol. I, pag. 58. Del resto, per non entrare in discussioni sottili, ammetto senz'altro che *le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$, sieno tutte monotone.*

D'onde ricaveremo:

$$(60)\quad \begin{cases} f' = f.e^{-x\varepsilon(x)}, \qquad f'' = \dfrac{f'}{f}[f' - f.(\varepsilon + x\varepsilon')] \\ \dfrac{f''}{f'} = \dfrac{f'}{f} - \varepsilon - \varepsilon' x = \sigma(x), \\ \dfrac{f''}{f} = \dfrac{f'}{f}\left(\dfrac{f'}{f} - \varepsilon - x\varepsilon'\right) = \dfrac{f'}{f}.\sigma(x). \end{cases}$$

Se ammettiamo che $\dfrac{f''}{f'}$ sia, per $x = +\infty$, determinata, vediamo che $\lim_{x=+\infty} \sigma(x) = 0$, e la funzione f'' appartiene alla prima classe, onde, se la variabile positiva h_x ha limite superiore di indeterminazione finito, ne viene

$$(61)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{f''(x+h_x)}{f''(x)} = 1.$$

Ora si ha

$$\alpha(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{2f(x)} \frac{f''(x+\theta)}{f''(x)}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

In forza delle (61) scriveremo quindi:

$$(62)\qquad \alpha(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{2f(x)}\eta(x), \qquad \lim_{x=\infty} \eta(x) = 1.$$

Poniamo

$$(63)\qquad \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f''(x)}{2f(x)}\eta(x)\,dx;$$

ne verrà

$$\int_{x_0}^{x} \alpha(x)\,dx = \lg f(x) - \lg f(x_0) + \varphi(x);$$

cioè:

$$(64)\qquad \frac{f(x)}{e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx}} = f(x_0)\,e^{-\varphi(x)}.$$

Considerando che, per la terza delle (60), si ha

$$(65)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \sigma_1(\xi)\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f'}{f}\,dx, \qquad e^{\varphi(x)} = \left[\dfrac{f(x)}{f(x_0)}\right]^{\sigma_1(\xi)}, \\ x_0 \leqq \xi \leqq x_1, \qquad \sigma_1 = \dfrac{\eta\,\sigma}{2}, \qquad \lim\limits_{\xi=\infty} \sigma_1(\xi) = 0, \end{cases}$$

potremo scrivere:

$$\frac{[f(x)]^{1+\sigma_1(\xi)}}{e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx}} = [f(x_0)]^{1+\sigma_1(\xi)}.$$

Poichè la variabile $\sigma_1(\xi)$, per ogni coppia x_0, x è finita determinata e tende allo zero, per $x_0 = \infty$, si vede che le variabili $f(x)$, $\int_{x_0}^{x}\alpha(x)\,dx$, per $x = \infty$ convergono o divergono insieme.

Fatto $x = x_0 + n$, e ricordando la (57) concluderemo che: *le variabili*

$$f(n) = \prod_{r=0}^{n}[1 + \alpha(x_0 + r)], \quad \int_{x_0}^{x_0+n}\alpha(x)\,dx,$$

convergono o divergono insieme, cioè che: *condizione necessaria e sufficiente perchè sia convergente il prodotto infinito* $\prod_{1}^{\infty}[1 + \alpha(x)]$, *è che la funzione* $\alpha(x)$ *sia atta alla integrazione definita impropria nel tratto* $(x_0, \cdots + \infty)$. *Nel caso della divergenza l'ordine di infinito della variabile* $f(x)$ *si ottiene, con una prima approssimazione, calcolando quello della variabile* $e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx}$, *per* $x = +\infty$.

32. Poniamo:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha(x)\delta(x), \qquad f' = f.\alpha\delta.$$

Dalla formula (58), per le ipotesi ammesse al n° precedente, dedurremo: $\lim_{x=\infty}\delta(x) = 1$. Derivando, e dividendo poi per f, avremo:

$$\frac{f''}{f} = (\alpha\delta)^2 + \frac{d}{dx}(\alpha\delta).$$

Poichè la α^2 ha, per $x = +\infty$, il medesimo comportamento assintotico della $(\alpha\delta)^2$, si scorge che: *Se la funzione* $\alpha^2(x)$ *è atta alla integrazione definita impropria nel tratto* $(1, \cdots + \infty)$, *la funzione* $\varphi(x)$ *definita dalla formula* (63) *è finita per* $x = +\infty$, *e le due espressioni*

$$e^{\int_{x_0}^{x_0+n}\alpha(x)dx}, \qquad f(x_0 + n) = \prod_{r=0}^{n}[1 + \alpha(x_0 + r)]$$

hanno lo stesso ordine di infinito *).

---

*) Cfr. il n° 10, § III; si veda anche il n° 14 della Nota *Sui prodotti infiniti divergenti.*

33. Anche la $\alpha(x)$ sia atta alla integrazione impropria nel tratto $(1, \cdots + \infty)$. Ricordando la (57) potremo scrivere la (64) sotto la forma:

$$\prod_{r=0}^{\infty}[1+\alpha(x_0+r)] = [1+\alpha(x_0)] \cdot e^{-\varphi(+\infty)} \cdot e^{\int_{x_0}^{+\infty}\alpha(x)dx}.$$

Supponendo $\alpha(x_0) = 0$, avremo:

$$\prod_{r=0}^{\infty}[1+\alpha(x_0+r)] = e^{-\varphi(+\infty)}\, e^{\int_{x_0}^{\infty}\alpha(x)dx}.$$

Si consideri che

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x=\infty}\int_{x_0}^{x}\frac{f''(x)}{2f(x)}\eta(x)\,dx,$$

e, posto

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f''(x)}{2f(x)}\eta(x)\,dx = \psi(x) - \psi(x_0),$$

si osservi che, nella ipotesi in cui ci siamo posti, la $\psi(x)$ è, per $x = +\infty$, infinitesima; onde risulta

$$\varphi(+\infty) = -\psi(x_0),$$

ed infine:

$$\prod_{r=0}^{\infty}[1+\alpha(x_0+r)] = e^{\psi(x_0)} \cdot e^{\int_{x_0}^{\infty}\alpha(x)dx}.$$

Nella Nota *Sui prodotti infiniti divergenti* si è trascurato il fattore $e^{\psi(x_0)}$, il quale sarà tanto più prossimo ad 1 quanto più x_0 è grande: e si è scritta l'eguaglianza approssimata:

$$\prod_{r=0}^{\infty}[1+\alpha(x_0+r)] = e^{\int_{x_0}^{+\infty}\alpha(x)dx}.$$

Modena, 8 febbraio 1904.

ETTORE BORTOLOTTI.

LEZIONI

SUL

CALCOLO DEGLI INFINITESIMI

DATE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

DA

ETTORE BORTOLOTTI

RACCOLTE

DAL

D.r ARMANDO BARBIERI

MODENA
COI TIPI DELLA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1905.

PREFAZIONE

I procedimenti che servono a rappresentare una data espressione analitica come limite di espressioni più semplici, si riducono quasi esclusivamente a questi tre:

I. Al considerare la espressione proposta come limite di una somma di termini che tendono contemporaneamente allo zero intanto che il loro numero cresce indefinitamente,

II. al riguardarla come limite del quoziente di due funzioni che tendono contemporaneamente allo zero,

III. infine, al rappresentarla come somma di termini dati in ordine determinato ed in numero infinito, i quali, col crescere del numero d' ordine, vadano tendendo allo zero.

Fondamento comune di cotesti procedimenti, è la valutazione della rapidità relativa di evanescenza delle funzioni che in essi si considerano; onde viene che la introduzione logica ad ogni studio di analisi, dovrebbe essere una teorica degli infinitesimi fondata su principi di tale generalità, da poter essere applicabile a tutte le specie di funzioni che si presentano nella pratica del calcolo.

Nulla invece di più imperfetto, nei nostri corsi di Analisi, della teoria degli infinitesimi. E che ciò sia facilmente si comprende da chi osservi che, quello che si fa ora nelle scuole e quello che si trova negli odierni trattati, non è gran fatto diverso da quello che si faceva e si scriveva due secoli fa, da coloro che creavano la scienza del calcolo e ne guidavano i primi passi.

Non già che considerazioni e ricerche pertinenti alla teoria degli infinitesimi, non sieno state fatte nei diversi tempi, da autori famosi per profondità di mente ed acutezza di vedute.

Ricorderemo il Cauchy, il Liouville, il Du Bois Reymond, il Laguerre e, fra i più recenti, lo Stolz, il Pincherle, il Poincaré, il Cesaro, il Borel.... Ma, anzichè proporsi la revisione dei principi, cotesti autori si studiarono il più delle volte, di adattare con ingegnosi artifizi gli antichi postulati alle nuove esigenze del calcolo, e ben pochi furono quelli che cercarono di stabilire una teorica degli infinitesimi più completa, più generale, più logica, di quella accettata finora.

L' esito poco fortunato dei tentativi fatti da taluni autori per la generalizzazione del concetto di *Ordine di infinitesimo,* l' aspetto piuttosto metafisico che geometrico, che da alcuni altri fu dato alla questione, ed infine il *teorema del Du Bois Reymond* sulla esistenza di funzioni decrescenti più rapidamente di ogni funzione appartenente ad un insieme numerabile comunque costituito, generarono la persuasione della impossibilità di una estensione logicamente esatta, del calcolo degli infinitesimi.

Tale persuasione peraltro, non avrebbe dovuto essere, per il progredire di cotesti studi, ostacolo maggiore di quello che, per il calcolo delle serie, sia stata la provata impossibilità di formulare un criterio di convergenza teoricamente applicabile a qualunque serie proposta.

È noto lo stretto legame fra le due quistioni, la difficoltà che si presenta è la stessa in entrambe; ma, nell' un caso non ha vietato la ricerca di una serie di criteri, tutti informati allo stesso principio e praticamente sufficienti ad ogni esigenza dell' analisi; e nell' altro invece, ha fermato sui primi passi il progredire delle indagini.

Gli è che si presentano qui altri ostacoli e di ben altra natura, i quali dai geometri furono forse presentiti, ma non mai nettamente enunciati. Si consideri infatti che, nel calcolo delle serie non è necessario, per il perfezionamento della teoria, la considerazione di variabili in cui la rapidità di crescenza o di evanescenza sia superiore a quella di ogni

altra variabile contenuta in un dato insieme numerabile: è anzi l'estremo limite della lentezza nel crescere e nel decrescere, che si cerca di raggiungere; è perciò che i criteri per il confronto fra la rapidità del convergere e del divergere di due serie, poterono tutti essere fondati sopra un unico concetto di eguaglianza e di diseguaglianza. Invece nel calcolo degli infinitesimi, che è essenzialmente un calcolo di approssimazione, è *necessario che il concetto di eguaglianza e di diseguaglianza nella relativa rapidità di evanescenza, possa esser definito in modo dipendente dalla rapidità assoluta di evanescenza delle funzioni che si devono paragonare.*

La definizione classica dedotta dall' esame del comportamento assintotico del quoziente, non può essere accolta, p. es. quando si voglia estendere il concetto di *ordine di infinitesimo* anche a funzioni trascendenti del tipo esponenziale, senza che non si generi l' assurdo di incontrare coppie di funzioni, che hanno ad un tempo lo stesso ordine ed ordini diseguali.

Ebbi già ad esporre coteste riflessioni in una breve nota « Sulla determinazione dell' Ordine di Infinito » stampata nelle Mem. Acc. Sc. di Modena ed in alcune Memorie stampate negli Atti di questa Società dei Naturalisti, negli Annali di Matematica, e nei Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. Dovrò presto tornare sull' argomento, perchè in questi studi molto ancora è da fare, troppe questioni sono ancora da discutere, altre sono già troppo discusse; ma qualche cosa pure si è fatto, e parecchi nuovi risultamenti sono definitivamente acquisiti, tanto che mi sono lusingato di poter introdurre nell' insegnamento i primi elementi del calcolo infinitario, sotto un punto di vista più esteso di quel che per tradizione s'è sempre fatto, ed in modo da rendere manifesta la possibilità logica di ulteriori generalizzazioni.

Ho visto che, non solo ciò si può fare senza aggravare la mole della materia da svolgere nel Corso di Analisi; ma che così vengono dal bel principio tolte di mezzo molte difficoltà, che altrimenti si presentano ad ogni passo più innanzi, ed è resa possibile la trattazione rigorosa ed elementare di alcune questioni difficili ed importanti. Fra le altre quella

della *definizione impropria*, che viene così ad essere messa nel suo vero posto, e che, seguendo il nuovo indirizzo, ha potuto fare progressi che mi sembrano tanto più notevoli, quanto più sono scarsi quelli ottenuti con altro mezzo, e quanto più facili ed elementari sono le nozioni sopra cui possono essere stabiliti.

Già da due anni lo svolgimento di cotesti argomenti serve di introduzione al mio corso di Calcolo infinitesimale ed ho così avuto campo di sperimentarne la efficacia, anche dal punto di vista didattico. Ritengo perciò che il Dott. Barbieri abbia fatto cosa utile agli studiosi, raccogliendo quelle mie lezioni nel presente opuscoletto. Debbo a lui molte sagaci osservazioni che contribuirono a renderne più semplice e piana la redazione: egli ha diligentemente curato la stampa ed è in particolare cosa sua la scelta degli esercizi e degli esempi, posti ad illustrazione del testo e che spianeranno ai giovani la strada per l'esatta applicazione della teoria.

Non credo che la materia che qui si trova svolta, abbia mai fatto argomento di un corso elementare di lezioni: i risultamenti che vi si espongono furono tratti da memorie originali e sono in parte frutto di mie personali ricerche, le dimostrazioni si dovettero adattare alla scuola, e molte sono interamente rifatte.

Non mi lusingo quindi che la mia opera sia esente da imperfezioni o da difetti, e sarò grato delle osservazioni che mi verranno fatte, specialmente quando ne possa seguire qualche modificazione utile per il progresso della scienza o pel profitto della scuola.

Modena, 14 Marzo 1905.

Ettore Bortolotti.

INDICE

§ 1. Limiti superiore ed inferiore di indeterminazione.

1. Sia $f(x)$ funzione reale della variabile reale x, ad un valore nei punti dell' intervallo $(a, \dots b)$.

Sia x_o un punto dell' intervallo medesimo, e si consideri l' intorno $(x_o - y, \dots x_o + y)$ che si supporrà anch' esso contenuto nell' intervallo $(a. \dots b)$.

Il limite superiore della funzione $f(x)$ nell' intorno $(x_o - y, \dots x_o + y)$, sarà un numero $L(y)$ che, al decrescere della y andrà assumendo valori non crescenti, ed al tendere di y allo zero ammetterà limite determinato L: questo numero è detto **limite superiore di indeterminazione della** $f(x)$, per $x = x_o$, e si rappresenta scrivendo:

$$L = \limsup_{x = x_o} f(x),$$

Analogamente si definisce il **limite inferiore di indeterminazione** per $x = x_o$.

2. Teorema. — *Se* L *è il limite superiore di indeterminazione per* $x = x_0$, *della funzione* $f(x)$, *ad ogni numero positivo* ε *può coordinarsi un numero* σ *pure positivo e tale che: per ogni* $\delta \leqq \sigma$, *in tutti i punti dell' intorno* $(x_0 - \delta, \dots x_0 + \delta)$, *sia:*

$$f(x) < L + \varepsilon,$$

e che nell' intorno medesimo esista almeno un punto x_1 *nel quale si abbia:*

$$f(x_1) > L - \varepsilon.$$

Dimostrazione:
Si ha per ipotesi:

$$L = \lim_{y=0} L(y),$$

e perciò al numero positivo $\frac{\varepsilon}{2}$ coordineremo un numero positivo δ, tale che

$$|y| \leqq \delta, \qquad L - \frac{\varepsilon}{2} < L(y) < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D' altra parte, entro l' intorno $(x_0 - y, \ldots x_0 + y)$ si ha:

$$f(x) < L(y) < L + \frac{\varepsilon}{2} < L + \varepsilon,$$

e ciò prova la prima parte; esiste poi nell' intorno medesimo almeno un punto x_1 dove si ha

$$f(x_1) > L(y) - \frac{\varepsilon}{2} > L - \varepsilon.$$

3. Teorema. — Reciprocamente: *Se il numero* L *gode delle proprietà enunciate nella tesi della proposizione precedente, è il limite superiore di indeterminazione di* f(x) *per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$.

Infatti la condizione della esistenza, nell' intervallo $(x - \delta, \ldots x + \delta)$ di un punto almeno x_1 nel quale si ha

$$f(x_1) > L - \varepsilon,$$

ci dice che nell' intervallo medesimo, il limite superiore $L(\delta)$ non è minore di $L - \varepsilon$.

La condizione che in tutti i punti dell' intervallo medesimo sia $f(x) < L + \varepsilon$, ci dice che il limite superiore non è maggiore di $L + \varepsilon$.

La limitazione

$$L - \varepsilon < L(\delta) \leqq L + \varepsilon,$$

essendo valida per ogni $|\delta| < \sigma$, ci mostra appunto che

$$\lim_{y=0} L(y) = L.$$

4. Per il limite inferiore di indeterminazione si hanno i teoremi analoghi:

Teorema. — *Se* l *è limite inferiore di indeterminazione, per* $x = x_0$, *della funzione reale* $f(x)$ *della variabile reale* x, *ad ogni numero positivo* ε *può coordinarsi un numero positivo* σ *tale che per ogni* $\delta \leqq \sigma$, *nell'intorno* $(x_0 - \delta, \ldots x_0 + \delta)$ *si ha sempre:*

$$f(x) > l - \varepsilon,$$

e v' è almeno un punto x_1 *per il quale è:*

$$f(x_1) < l + \varepsilon,$$

e Reciprocamente.

5. Corollari.

I) Se nel punto $x = x_0$ la funzione ha limite determinato e finito λ, i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione in quel punto coincidono con λ.

Si ha cioè:

$$\lambda = \lim_{x = x_0} f(x) = \lim_{x = x_0} \sup f(x) = \lim_{x = x_0} \inf f(x).$$

II) Reciprocamente: Se in un punto x_0 i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione coincidono, la funzione ha per $x = x_0$ limite determinato eguale al valore comune di essi.

III) Il limite superiore di indeterminazione per $x = x_0$ di una funzione che è somma algebrica di due o più altre non è maggiore della somma dei rispettivi limiti superiori di indeterminazione: il limite inferiore invece non è minore della somma di limiti inferiori di indeterminazione.

IV) Se due o più funzioni sono tutte positive nell'intorno del punto x_0, il limite superiore di indeterminazione del prodotto non è maggiore del prodotto dei limiti superiori: il limite inferiore non è minore del prodotto dei limiti inferiori di indeterminazione.

V) Se la funzione $f(x)$ ha per $x = x_0$ limite superiore di indeterminazione L, ed inferiore $l > 0$; la funzione $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ ha in quel punto limite superiore di ind. $\frac{1}{l}$, e lim. inf. di ind. $\frac{1}{L}$.

6. *Osservazioni.*

1) Nel caso che del punto x_o si considerassero solo intorni a destra (a sinistra), si potrebbero definire i limiti superiore ed inferiore di $f(x)$ nel punto $x + 0$ $(x - 0)$, analogamente a quel che si fa per definire il limite a destra (a sinistra) nel punto $x = x_o$.

2) La estensione al caso di $x_o = + \infty$, o di $x_o = - \infty$, non offre difficoltà.

3) La variabile continua x, può essere sostituita dalla variabile discreta n, ed allora vengono definiti i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione di una successione S_n.

ESEMPI.

I. $$\limsup_{x=\infty} \operatorname{sen} x = 1$$

Infatti si ha costantemente

$$\operatorname{sen} x < 1 + \varepsilon$$

e si possono determinare in infiniti modi, valori di x maggiori di qualunque numero dato e tali che, qualunque sia ε

$$\operatorname{sen} x > 1 - \varepsilon.$$

Analogamente:

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname{sen} x = -1.$$

II. $$\limsup_{x=a} . \, x \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} = a.$$

Infatti qualunque sia ε la condizione

$$x \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} < a + \varepsilon$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{x-a} < \frac{a+\varepsilon}{x}$$

è soddisfatta qualunque sia x nell' intervallo $(a - \varepsilon \, , \, a + \varepsilon)$.

Inoltre quando

$$x_0 = a + \frac{1}{\pi\left(2K + \frac{1}{2}\right)}$$

K essendo scelto in modo che sia

$$\frac{1}{\pi\left(2K + \frac{1}{2}\right)} < \varepsilon$$

è soddisfatta evidentemente anche l' altra

$$\operatorname{sen} \frac{1}{x_0 - a} > \frac{a - \varepsilon}{x_0}$$

cioè

$$x_0 \operatorname{sen} \frac{1}{x_0 - a} > a - \varepsilon.$$

III. È facile vedere che

$$\limsup_{x+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

e

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

per cui

$$\lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

IV. Come esempio di funzioni che ammettono limite superiore di indeterminazione a destra od a sinistra consideriamo la funzione $\operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x-a}}\right)$. A destra di a si à

$$\lim_{x=a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = \infty$$

e per l' esempio I.,

$$\limsup_{x = a + 0} \operatorname{sen} \left(e^{\frac{1}{x - e}} \right) = + 1.$$

Invece, a sinistra di a

$$\lim_{x = a - 0} e^{\frac{1}{x - a}} = 0.$$

e quindi il limite superiore di indeterminazione della funzione considerata è zero.

§ 2. Punti di infinito delle funzioni.

7. *Una funzione è finita in un punto se i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione in quel punto sono entrambi finiti.*

..... *è infinita e determinata se i limiti superiore ed inferiore coincidono e sono entrambi infiniti.*

8. Si noti che se

$$\limsup_{x = x_0} f(x) = + \infty,$$

la $f(x)$ non è finita nel punto x_0; ma può non essere infinita e determinata; perchè ciò sia, *occorre e basta che sia*

$$\liminf_{x = x_0} f(x) = + \infty.$$

Similmente: non basta che si abbia

$$\liminf_{x = x_0} f(x) = - \infty,$$

perchè la $f(x)$ si possa dire infinita e determinata per $x = x_0$; ma invece occorre e basta che sia

$$\limsup_{x = x_0} f(x) = - \infty.$$

9. *Una funzione è infinitesima nel punto* $x = x_0$, *se il limite superiore di indeterminazione del suo valore assoluto è nullo.*

Esempi.

I. La funzione $e^{\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}}$ è finita nel punto $x = a$. Infatti dalla relazione

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} \leqq \lg \varepsilon = 1 < \lg(e + \varepsilon),$$

si ricava

$$e^{\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}} < e + \varepsilon;$$

ed è sempre possibile per convenienti valori di x soddisfare all' altra

$$e^{\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}} > e - \varepsilon$$

cioè

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} > \lg(e - \varepsilon),$$

onde si avrà

$$\limsup_{x=a} e^{\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}} = e.$$

Analogamente si prova che $\liminf\limits_{x=a} e^{\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}} = e^{-1}$ quindi etc.

II. La funzione semplicissima $\operatorname{tang} x$ dà l' esempio di funzione che ammette limite sup.re di indeterminazione infinito pure non essendo infinita determinata per $x = \infty$.

III. Mentre la funzione $\operatorname{tang}^2 x$, avendo per limite inf.re di indet.ne $+\infty$, è infinita nel punto $x = \infty$.

§ 3. Rapidità relativa di crescenza, o di evanescenza.

10. Supporemo sempre nel seguito che i punti di infinito o di infinitesimo siano isolati: cioè che, se x_0 è uno di cotesti punti, si possa determinare un numero ε tale, che negli intervalli

$$(x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 - \delta)\ ,\ (x_0 + \delta\,,\ x_0 + \varepsilon)$$

dove $\delta < \varepsilon$, la funzione non sia mai rispett. infinita o nulla.

11. Due funzioni f, φ, entrambe infinite (infinitesime) nel punto $x = x_0$, si dicono aver *lo stesso ordine di infinito*, (*di infinitesimo*) se la funzione

$$\psi(x) = \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$$

ha limite superiore di indeterminazione finito, e limite inferiore di indeterminazione maggiore di zero.

12. Si dice che la funzione $f(x)$ *ha ordine di infinito superiore a quello della* $\varphi(x)$ se la funzione

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

è infinita e determinata per $x = x_0$.

Si dice che di due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, entrambe infinitesime per $x = x_0$, la prima ha *ordine di infinitesimo superiore a quello della seconda* se il quoziente

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

è infinitesimo per $x = x_0$.

13. Le leggi formali della eguaglianza e cioè la riflessiva:

$$a = a,$$

la commutativa:

$$\text{se} \qquad a = b \quad \text{è} \quad b = a,$$

e la transitiva:

$$\text{se} \qquad a = b \;,\; c = b \quad \text{è} \quad a = c;$$

e le leggi formali della diseguaglianza:

$$\text{se} \qquad a > b \quad \text{è} \quad b < a,$$

$$\text{se} \qquad a \geqq b \;,\; b \geqq c \quad \text{é} \quad a \geqq c,$$

sono evidentemente soddisfatte, e con ciò si giustificano le definizioni poste.

14. Le definizioni date sono però incomplete, perchè non si può affermare che gli ordini di due date funzioni sieno necessariamente od eguali fra loro, o l' uno maggiore dell' altro.

Ciò perchè, la funzione ψ può non avere limite superiore di indeterminazione finito (od avere limite inferiore di indet. zero) senza tuttavia essere infinita od infinitesima.

15. Limitiamoci per ora all' insieme di tutte le funzioni tali che di due di esse si possa definire la eguaglianza o la disuguaglianza negli ordini di infinitesimo (di infinito).

Volendo rappresentare cotesti ordini mediante numeri, occorre scegliere anzitutto una funzione il cui ordine di infinitesimo (di infinito) si supponga noto, e sia preso come unità degli ordini.

16. Solitamente si conviene di considerare come *infinitesimo del primo ordine*, o *principale* quello della funzione

$$x - x_o$$

e come *infinitesimo dell' ordine* m, quello della funzione

$$(x - x_o)^m :$$

come *infinito del primo ordine*, quello della funzione:

$$\frac{1}{(x - x_o)} = (x - x_o)^{-1},$$

come *infinito dell' ordine* m, quello della funzione:

$$\frac{1}{(x - x_o)^m} = (x - x_o)^{-m}.$$

17. In luogo di infinito dell' ordine m, si può anche convenire di dire *infinitesimo dell' ordine negativo* — m.

18. Qualche altra volta si usa ancora di dire *infinito dell' ordine* — m, in luogo di infinitesimo dell' ordine m.

19. Dalle definizioni poste risulta che *una funzione* f(x) *si dovrà dire infinitesima dell'ordine* m, *se il rapporto*

$$\frac{f(x)}{(x-x_o)^m}$$

ha, per $x = x_0$, *limite superiore di indeterminazione finito, e limite inferiore, maggiore di zero.*

20. Teorema. — *Dato che si possano determinare gli ordini di infinitesimo (di infinito) di due o più funzioni; l'ordine della funzione prodotto è eguale alla somma degli ordini dei fattori, l'ordine del quoziente è eguale alla differenza degli ordini del dividendo e del divisore: quello della somma è eguale all'ordine minimo (massimo) degli addendi.*

Sieno le funzioni f, φ, infinitesime degli ordini rispettivi m, n; (positivi o negativi) e più precisamente, supponiamo che si abbia:

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=x_o}\inf \frac{f(x)}{(x-x_o)^m} = l > 0\,, \\ &\lim_{x=x_o}\sup \frac{f(x)}{(x-x_o)^m} = L\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=x_o}\inf \frac{\varphi(x)}{(x-x_o)^n} = l_1 > 0\,, \\ &\lim_{x=x_o}\sup \frac{\varphi(x)}{(x-x_o)^n} = L_1. \end{aligned}\right.$$

Ne verrà:

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=x_o}\inf \frac{f\varphi}{(x-x_o)^{m+n}} \geqq l l_1 \\ &\lim_{x=x_o}\sup \frac{f\varphi}{(x-x_o)^{m+n}} \leqq L L_1\,; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=x_o}\inf \frac{\dfrac{f}{\varphi}}{(x-x_o)^{m-n}} \geqq \frac{l}{L_1} \\ &\lim_{x=x_o}\sup \frac{\dfrac{f}{\varphi}}{(x-x_o)^{m-n}} \leqq \frac{L}{l_1}\,. \end{aligned}\right.$$

Infine supposto $m \geqq n$,

$$\frac{f+\varphi}{(x-x_0)^n} = \frac{f}{(x-x_0)^m}\,\frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^n} + \frac{\varphi}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \frac{f}{(x-x_0)^m}\cdot(x-x_0)^{m-n} + \frac{\varphi}{(x-x_0)^n}.$$

Tenuto conto del fatto che $(x-x_0)^{m-n}$ ha, per $x=x_0$ limite nullo se $m>n$, limite $=1$ se $m=n$, ed applicando i teoremi precedenti....

21. *Osservazione.* — Se le funzioni f, φ sono infinitesime dello stesso ordine, la loro somma (algebrica) può in qualche caso risultare infinitesima di ordine superiore.

22. Teorema. — *Se il quoziente di due funzioni infinitesime (infinite) entrambe per* $x = x_0$, *ha in questo punto limite determinato,* l *(finito, nullo od infinito), al medesimo limite tende il rapporto che ha per termini le funzioni date aumentate rispettivamente di infinitesimi di ordine superiore (infiniti di ordine minore).*

Si prova scrivendo

$$\frac{f+\varepsilon}{\varphi+\varepsilon_1} = \frac{f}{\varphi}\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{f}}{1+\frac{\varepsilon_1}{\varphi}}\right),$$

e considerando che i rapporti $\frac{\varepsilon}{f}$, $\frac{\varepsilon_1}{\varphi}$, sono infinitesimi.

Su questo teorema si poggia la pratica del trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.

Esempi.

I. Poichè

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

sen x è infinitesimo del 1.° ordine, assumendo x come infinitesimo principale.

II. Poichè

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

tg x è inf.$^{\text{mo}}$ del 1.° ordine.

III. Poichè

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

si à

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

cosicchè $1 - \cos x$ è infiinitesima del secondo ordine.

IV. Si à, per x sufficientemente piccolo,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \varepsilon$$

$$\operatorname{sen} x = x + \Im(x)$$

$\Im$ infinitesimo di ordine maggiore di quello di sen x: allora

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx} = \lim_{x=0} \frac{mx + \Im_1}{nx + \Im_2} = \lim_{x=0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

V.

$$\lim_{x=0} \frac{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n}{b_1 n + b_2 x^2 \ldots + b_n x^n} = \lim_{n=0} \frac{a_1 x}{b_1 x} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n}{b_1 x + b_2 x^2 + \ldots b_n x^n} = \frac{a_n}{b_n}.$$

23. La pratica del trascurare gli infinitesimi di ordine superiore è agevolata scomponendo, quando sia possibile, la data funzione $f(x)$ dell' ordine n, in due parti, l' una della forma

$$A \,.\, (x - x_o)^n$$

dove A è una quantità costante, e detta **parte principale**, l' altra parte infinitesima di ordine superiore.

Tale scomposizione è sempre possibile se esiste il limite:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = A.$$

Si ha infatti in tal caso

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = A + \varepsilon(x),$$

con $\varepsilon(x)$ infinitesima per $x = x_0$; di qui si ricava

$$f(x) = A(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n,$$

ed è $A(x-x_0)^n$ la parte principale, (n, positivo o negativo).

§ 4. Obiezioni alla teoria degli infiniti.

24. *Vi sono funzioni il cui ordine non può rappresentarsi con un numero reale, perchè è minore (maggiore) di quello di una determinata potenza* $(x-x_0)^m$ *dell' infinitesimo principale, ed è maggiore (minore) di quello della potenza* $(x-x_0)^{m-a}$ $[(x-x_0)^{m+a}]$, *a numero reale positivo qualunque.*

Per intender bene questa difficoltà poniamo

$$(1) \qquad f(x) = (x-x_0)^{m+\varepsilon(x)}$$

da cui

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = (x-x_0)^{\varepsilon(x)}.$$

Supponiamo che sia

$$\lim_{x=x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ne verrà:

$$(3) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x=x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{m+a}} = \infty \\[2ex] \lim\limits_{x=x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{m-a}} = 0 \\[2ex] a, \text{ positivo qualunque.} \end{cases}$$

L' ordine della $f(x)$ sarà dunque minore di $\mathrm{m} + \mathrm{a}$, *maggiore di* $\mathrm{m} - \mathrm{a}$, *qualunque sia il numero* a *reale positivo.*

Ne verrà di necessaria conseguenza che il suo ordine sia eguale ad m**?**

Riprendiamo la (2)

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = (x-x_0)^{\varepsilon(x)},$$

dalla quale vediamo che l' *ordine di* f *sarà* m *allora, ed allora soltanto che si possano determinare due numeri positivi* A, B, *tali che:*

$$(4) \qquad 0 < A < (x-x_0)^{\varepsilon(x)} < B.$$

Codesta limitazione può anche scriversi:

$$\lg A < \varepsilon(x) \lg(x-x_0) < \lg B$$

$$|\varepsilon(x)| \cdot |\lg(x-x_0)| < C$$

infine:

$$(5) \qquad \frac{|\varepsilon(x)|}{\left(\dfrac{1}{\lg(x-x_0)}\right)} < C.$$

Dunque: perchè l' ordine della $\mathrm{f} = (\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^{\mathrm{m}+\varepsilon}$ *possa essere rappresentato dal numero reale* m, *occorre che la* $\varepsilon(\mathrm{x})$ *sia infinitesima di ordine non minore di*

$$\frac{1}{\lg(x-x_0)}.$$

Se la $\varepsilon(x)$ è infinitesima, per $x = a$, ma di ordine minore di quello della funzione $\frac{1}{\lg(x - x_0)}$, l'ordine della f non può essere rappresentato da m, ed è contemporaneamente minore di $m + a$, maggiore di $m - a$, a positivo qualunque.

25. La seguente proposta del Cauchy tende a definire anche in tutti cotesti casi l'ordine di infinitesimo, e corrisponde al *postulato del limite* nella teoria dei numeri reali.

Si dica dell' ordine m, *una funzione* f(x) *la quale soddisfi la condizione che: per ogni numero positivo* a *comunque scelto sia contemporaneamente:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^{m+a}} = \infty \\ \lim\limits_{x=x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^{m-a}} = 0. \end{cases}$$

Posto

$$f(x) = (x - x_0)^{m+\varepsilon(x)},$$

si vede che la condizione imposta equivale a quella di supporre che ad ogni numero positivo a corrisponda un numero δ tale che:

$$(x - x_0) < \delta \quad , \quad \varepsilon(x) < a,$$

cioè

$$\lim \varepsilon(x) = 0 .$$

Potremo dunque brevemente enunciare la definizione di Cauchy, dicendo:

La funzione f(x) *è dell' ordine* m, *se*

$$f(x) = (x - x_0)^{m+\varepsilon} \quad , \quad \lim_{x=x_0} \varepsilon = 0 .$$

26. Accettando cotesta definizione si va incontro all' inconveniente *di dover assegnare lo stesso ordine di infinito a funzioni che hanno rapporto infinito od infinitesimo.*

Ciò risulta dalle riflessioni fatte più sopra; e si può chiarire maggiormente con l' esempio seguente:

Sia $\varepsilon_1(x)$ una funzione infinitesima per $x = x_0$, la qual soddisfi la condizione

$$\lim_{x=x_0} \varepsilon_1(x) \lg(x - x_0) = +\infty \text{ (*)}$$

poniamo

$$f = (x - x_0)^{m+\varepsilon_1}$$

$$\varphi = (x - x_0)^{m-\varepsilon_1}.$$

Le funzioni f, φ hanno entrambe per ordine m; eppure

$$\frac{f}{\varphi} = (x - x_0)^{2\varepsilon_1}$$

è infinita per $x = x_0$.

§ 5. Estensione del concetto di eguaglianza nella rapidità di crescenza o di evanescenza.

27. Volendo accettare la definizione di ordine di infinitesimo (ed anche quindi di infinito) data dal Cauchy, occorre che i concetti di eguaglianza e di diseguaglianza degli ordini sieno posti al modo che segue:

Due funzioni f, φ *hanno lo stesso ordine di infinitesimo (di infinito) se, posto*

$$\frac{\mathrm{f}}{\varphi} = \varphi^{\varepsilon(\mathrm{x})},$$

si ha

$$\lim_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0} \varepsilon(\mathrm{x}) = 0.$$

L' ordine di infinitesimo (infinito) della f *è superiore a quello della* φ *se, fatta la stessa posizione, si ha*

$$\liminf_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0} \varepsilon(\mathrm{x}) > 0.$$

(*) Per es. possiamo prendere per ε_1 il valore reale della espressione: $[\lg(x - x_0)]^{-\frac{1}{3}}$.

ne è invece inferiore, se

$$\lim_{x=x_0} \sup \varepsilon(x) < 0.$$

28. Per giustificare coteste definizioni, dimostreremo che le *proprietà formali della eguaglianza sono conservate.*

I. L' ordine di f sia eguale a quello di φ, dico che quello di φ è eguale all' ordine di f.

In altri termini si vuol provare che: se

$$(1) \qquad \frac{f}{\varphi} = \varphi^{\varepsilon(x)} \quad , \qquad \lim \varepsilon(x) = 0,$$

anche

$$(2) \qquad \frac{\varphi}{f} = f^{\varepsilon_1(x)} \quad , \qquad \lim \varepsilon_1(x) = 0.$$

Dalla (1) si ricava infatti

$$\varphi^{1+\varepsilon} = f \quad , \qquad \varphi = f^{\frac{1}{1+\varepsilon}} = f^{1+\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

infine:

$$(3) \qquad \frac{\varphi}{f} = f^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} = f^{\varepsilon_1(x)} \quad , \quad \lim \varepsilon_1(x) = 0.$$

II. La formula trovata dimostra ancora che: *se l' ordine di* f *è superiore a quello di* φ: cioè se la ε definita dalla (1) ha lim inf $C > 0$, è *anche l' ordine di* φ *inferiore a quello di* f: ed infatti il lim. sup. di ind. di ε_1 è < 0.

III. Le leggi transitive della eguaglianza e della diseguaglianza si dimostrano immediatamente.

29. Aggiungiamo che: *Se il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *di due funzioni entrambe infinitesime (infinite) per* $x = x_0$, *ha limiti inf. e sup. di ind. maggiori di zero, e finiti, le funzioni* f *e* φ *hanno lo stesso ordine di inf.*^{mo} *anche secondo le definizioni ora proposte;* che: *se l' ordine di infinitesimo della* f *è, secondo la nuova definizione, mag-*

giore di quello della φ, *il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *è certamente infinitesimo* (*infinito*).

La nuova difinizione di eguaglianza infatti comprende l'antica.

§ 6. Estensione del concetto di ordine di infinito o di infinitesimo.

30. Altro difetto della teoria degli ordini di infinito si è quello di non poter rappresentare la rapidità di crescenza di funzioni che tendono all' infinito più rapidamente di qualunque potenza della variabile, o meno rapidamente di qualsiasi potenza positiva.

Le esponenziali e le logaritmiche ci danno esempi di tali funzioni.

A questo difetto si pon rimedio col cambiare l' *ordine unità*, scegliendo per infinito (infinitesimo) principale, una funzione opportuna alla questione proposta, presa fra quelle di una successione di funzioni di crescente rapidità di crescenza, (di evanescenza) costituenti una scala analoga a quella delle unità dei vari ordini nella numerazione.

Così: come per le misure di lunghezze microscopiche si assume come unità principale il micron, e per le itinerarie il Chilometro, potremo, caso per caso, scegliere per infinito (infinite simo) principale quella funzione che è meglio atta al paragone con la proposta in istudio.

Bisognerà peraltro, enunciare sempre esplicitamente la funzione φ il cui infinito si assume come principale; lasciandolo tutt' al più sottinteso nel solo caso di $\varphi = \frac{1}{x - x_0}$:

In generale: diremo che una funzione f *è infinita* (*infinitesima*) *dell'ordine* m *nel punto* $x = x_0$ *rispetto ad una data funzione* φ *assunta come infinito* (*infinitesimo*) *del primo ordine se, posto:*

$$\frac{f}{\varphi^m} = \varphi^{\varepsilon(x)},$$

la funzione $\varepsilon(x)$ *è infinitesima per* $x = x_0$.

31. Rispetto alle operazioni aritmetiche di somma, prodotto, quoziente, l'ordine di infinitesimo in cotesta nuova definizione, gode delle proprietà caratteristiche dimostrate al n.° 20 e cioè:

I) *L' ordine del prodotto è eguale alla somma degli ordini dei fattori:*

Se infatti

$$f_1 = \varphi^{m_1 + \varepsilon_1} \qquad f_2 = \varphi^{m_2 + \varepsilon_2}$$

ne viene:

$$f_1 f_2 = \varphi^{m_1 + m_2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

II) *L' ordine del quoziente è eguale al resto dell' ordine del dividendo diminuito di quello del divisore.*

Infatti

$$\frac{f_1}{f_2} = \varphi^{m_1 - m_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

Si noti che *ad ordini di infinitesimo negativi corrispondono funzioni infinite, e reciprocamente.*

(All' ordine **nullo** non si può affermare che corrispondano funzioni infinitesime, o funzioni infinite).

III) *L' ordine di infinitesimo* (*di infinito*) *di una funzione somma di un numero finito di addendi è eguale al minimo* (*massimo*) *ordine degli addendi medesimi.*

Sia infatti $m_1 \leqq m_2$; scriveremo:

$$\frac{f_1 + f_2}{f_1} = 1 + \varphi^{(m_2 - m_1) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

Se $m_2 > m_1$, essendo φ infinitesimo, la quantità:

$$\varphi^{\varepsilon_3(x)} = 1 + \varphi^{(m_2 - m_1) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

tende al limite 1, cioè si ha:

$$\lim_{x = x_0} \varphi^{\varepsilon_3(x)} = 1,$$

$$\lim_{x = x_0} [\varepsilon_3(x) \,.\, \lg \varphi] = 0.$$

Ciò significa che $\varepsilon_3(x)$ è infinitesima (di ordine superiore ad $\dfrac{1}{\lg \varphi}$).

Solo caso di eccezione *potrebbe essere*, quello di $m_1 = m_2$.

IV) *Sia* a *un numero reale diverso dallo zero: se l'ordine della* f *rispetto alla* φ è m*; quello della funzione* f^a, è ma.

Posto infatti

$$f = \varphi^{m+\varepsilon} \quad , \quad \text{con:} \quad \lim_{x=x_0} \varepsilon(x) = 0\,,$$

ne viene

$$f^a = \varphi^{ma+\varepsilon a}\,,$$

ed è

$$\lim_{x=x_0} \varepsilon a = 0.$$

V) *Le funzioni* η_1, η_2, *sieno infinitesime* (*infinite*) *di ordini rispettivamente superiori* (*inferiori*) *a quelli delle funzioni* f_1, f_2. *Dico che, se il quoziente*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

ha per $x = x_0$ *limite determinato* λ, *il quoziente*

$$\frac{f_1 + \eta_1}{f_2 + \eta_2}$$

ha lo stesso limite.

Scrivo

$$\frac{f_1 + \eta_1}{f_2 + \eta_2} = \frac{f_1}{f_2} \left\{ \frac{1 + \dfrac{\eta_1}{f_1}}{1 + \dfrac{\eta_2}{f_2}} \right\}.$$

La espressione fra parentesi (tanto nel caso di funzioni f_1, f_2 infinitesime, quanto nel caso di funzioni infinite) tende alla unità, onde ecc. ecc.

32. Le considerazioni fatte mostrano la possibilità logica della estensione del concetto di ordine.

Per rendere pratica cotesta estensione, occorrerebbe ora risolvere queste questioni:

I) Limitare il campo delle funzioni $f(x)$ per le quali è possibile la assegnazione dell' ordine di infinito.

II) Costruire una successione di funzioni φ_n di crescenza via via più rapida, e tali che qualunque funzione $f(x)$ possa essere detta di ordine eguale a quello di una di codeste φ_n, o compreso fra quello di due consecutive di esse.

III) Definire un insieme di simboli atti a rappresentare gli ordini di infinito.

Questioni anche troppo discusse perchè qui se ne possa far cenno (*).

§ 7. Definizione impropria.

33. Avviene spesso in analisi che una funzione

$$y = F(x)$$

reale della variabile reale x, (**) sia finita e ad un valore in tutti i punti di un determinato intervallo, fatta eccezione di uno di cotesti punti $x = x_o$, (o di alcuni punti in numero finito) dove la espressione $F(x_o)$ è priva di significato aritmetico.

Così è p. es. nel caso di $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, per punti x_o dove $f(x_o)$, $\varphi(x_o)$ sono entrambe nulle od infinite; le espressioni aritmetiche: $F(x_o) = \dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ non rappresentando, come è noto, nessun numero determinato.

Similmente non potrebbero assumersi come definizione di $F(x_o)$ espressione della forma 1^∞, 0^o, ∞^o, $0 . \infty$, ed altre analoghe di cui più avanti ci occuperemo.

(*) Cfr. Thomae. — *Elementäre Theorie der. Funct.* p. 112.

Du Bois Reymond. — *Allgemeine Functionentheorie.* Capo V.

Borel. — *Leçons sur les séries à termes positifs.*

Bortolotti. — *Sulla determinazione dell' ordine di infinito.* Atti Soc. Nat. Modena 1901. — Rend. Acc. Sc. Modena, 1903.

Bortolotti. — *Sul limite del Quoziente di due funzioni.* — Annali di Matematica. Serie III, tomo VIII.

(**) Le considerazioni che stiamo per fare, si potrebbero estendere senza difficoltà alcuna a funzioni della variabile complessa.

Fatti di simile natura si indicheranno dicendo che: *la funzione* F(x) *non è propriamente definita nel punto* $x = x_0$; od anche che: *il punto* $x = x_0$ *è punto di indeterminazione per la funzione* F(x).

Tale indeterminazione può essere tolta, nel caso in cui esista limite determinato (finito nullo od infinito)

$$\lambda = \lim_{x = x_0} F(x),$$

col fare:

$$F(x_0) = \lim_{x = x_0} F(x) = \lambda;$$

cioè *coll'assumere per definizione impropria di* F(x) *nel punto di indeterminazione* $x = x_0$, *il limite per* $x = x_0$ *di* F(x).

34. *Osservazione.* — Una funzione è sempre impropriamente definita nel punto $x = \infty$, e nei punti dove essa è infinita.

§ 8. Continuità in punti di definizione impropria.

35. Una funzione $F(x)$ si dice *continua in un punto* $x = x_0$ *dove è impropriamente definita, se è continua in tutti i punti dove ha definizione propria di un determinato intorno* $(x_0 - \delta_1, \dots x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0 . \delta_2 > 0$.

Se uno dei due numeri δ_1, δ_2, è nullo si ha continuità solo a destra, o solo a sinistra del punto x_0.

36. *Osservazione.* — I) Il concetto ora chiarito di continuità, vale anche per punti di infinito.

II) Se il punto x_0, dove la funzione ha definizione impropria, non è punto di infinito, la continuità nel punto x_0 porta come conseguenza la esistenza di un intorno di x_0 dove la $F(x)$ è continua uniformemente.

III) Se una funzione è definita in tutti i punti di un determinato intervallo, ed è continua in tutti i punti di definizione propria, è continua in tutto l' intervallo, e gode delle proprietà delle funzioni continue propriamente definite in tutti i punti; ma

non può dirsi continua uniformemente, se non si suppongono esclusi dall' intervallo i punti di infinito.

IV) La somma, il prodotto ed il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue, anche in punti dove gli addendi od i fattori o le funzioni da dividere sono impropriamente definite, a patto soltanto che ammettano definizione (propria od impropria).

V) Le proprietà formali di una funzione per punti dove è propriamente definita, si conservano anche nei punti di definizione impropria:

Più precisamente:

Se Φ è simbolo di funzione continua, tale cioè che

$$\lim_{z=z_0} \Phi(z) = \Phi(z_0),$$

se in tutti i punti dove la F è propriamente definita, è soddisfatta una relazione identica della forma

$$\Phi(F(x)) = 0,$$

anche in punti x_0 dove F ha definizione impropria, si ha

$$\Phi(F(x_0)) = 0.$$

§ 9. Criteri per calcolare il limite del quoziente di due funzioni.

37. La forma di indeterminazione che più spesso si presenta è quella del quoziente di due funzioni

$$F = \frac{f}{\varphi}$$

in punti $x = x_0$ dove la f, e la φ sono entrambe infinite od infinitesime.

La ricerca del limite $\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, è importante, non solo per la definizione impropria del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ nel punto x_0; ma anche per lo studio della rapidità relativa di crescenza o di evanescenza

delle funzioni f, φ, ed in particolare per la determinazione dell'ordine di infinito o di infinitesimo

Il problema, così come è posto, non può esser risolto con metodo generale; ma bisogna usare artifizi ed espedienti adatti alla natura delle funzioni proposte.

Indicheremo tre di cotesti espedienti, i soli conosciuti che possano applicarsi con profitto a classi abbastanza estese di funzioni.

Il primo di essi è fondato sopra un teorema di *Cauchy* che già abbiamo studiato nel corso di Analisi Algebrica, e si applica nel caso che il punto x_0 di indeterminazione sia all'infinito.

Consiste nel sostituire alla ricerca del comportamento assintotico del quoziente $\frac{f}{\varphi}$, quella relativa al quoziente delle differenze finite

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi}=\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}.$$

Il secondo, che ha nome dal marchese dell' *Hôpital*, si applica a funzioni supposte derivabili nell' intorno del punto di indeterminazione; consiste nel sostituire al limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ delle date funzioni, quello delle loro derivate $\frac{f'}{\varphi'}$.

Il terzo metodo si applica nei casi (e sono la quasi totalità) in cui nel quoziente delle derivate (od in quello delle differenze finite) si ripresenti la stessa indeterminazione che si voleva togliere dal quoziente delle funzioni.

Questo metodo consiste nel prendere in esame uno dei doppi rapporti

$$\frac{f'}{\varphi'}:\frac{f}{\varphi} \quad , \quad \frac{\Delta f}{\Delta \varphi}:\frac{f}{\varphi},$$

e nel cercare le relazioni fra il limite od i limiti superiori ed inferiori di indeterminazione di cotesti rapporti, e la rapidità relativa di crescenza e di evanescenza della f rispetto alla φ.

§ 10. Criteri desunti dall' esame del quoziente delle differenze finite $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi}$.

38. TEOREMA 1.° (*) — *Sieno* $f(x)$, $\varphi(x)$, *funzioni reali della variabile reale* x, *finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno* $(x_0 \dots + \infty)$ *dell' infinito.*

La $\varphi(x)$ *sia ivi sempre crescente (decrescente) ed infinita (infinitesima) per* $x = + \infty$.

Sia k *il limite superiore di indeterminazione per* $x = + \infty$ *della espressione*

$$(1) \qquad \left|\frac{\Delta f}{\Delta \varphi}\right| = \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}\right|,$$

h *positivo, indipendente dalla* x.

Si vuol provare che il limite superiore di indeterminazione per $x = + \infty$ *della espressione*

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$$

non è maggiore di k.

Dimostrazione:

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia sempre crescente ed infinita per $x = \infty$.

Ad ogni numero positivo ε, potremo coordinare un numero positivo x_ε tale che

$$x \geq x_\varepsilon \quad , \quad \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}\right| < K + \varepsilon$$

cioè

$$x \geq x_\varepsilon \quad , \quad |f(x+h) - f(x)| < (K + \varepsilon)\, |\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

(*) Cfr. STOLZ, Mat. Ann. XIV, pag. 232-239, XV, pag. 556 559, XXXIII, pag. 238. — CESÀRO, *Rend. Acc. Lincei*, 1888, pag. 116. — BORTOLOTTI, *Annali di Matem.*, Tomo XI, serie 3.ª, pag. 29 e seguenti.

ed anche

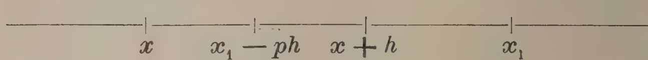
$$x \geq x_\varepsilon \quad , \quad [\,|f(x+h)| - |f(x)|\,] < (K+\varepsilon)\,|\varphi(x+h) - \varphi(x)|.$$

Sostituendo in questa formula ad h successivamente $2h$, $3h \dots ph$ (p numero intero qualunque) e sommando, si ottiene

$$x \geq x_\varepsilon \quad [\,|f(x+ph)| - |f(x)|\,] < (K+\varepsilon)\,|\varphi(x+ph) - \varphi(x)| \;(1).$$

Siano ora x, x_1 due numeri qualunque soddisfacenti le condizioni

$$x \geq x_\varepsilon \qquad x_1 \geq x + h\,.$$



Determiniamo il numero p intiero con la condizione

$$(p+1)h > x_1 - x \geq ph \tag{2}$$

avremo

$$[\,|f(x_1)| - |f(x)|\,] \leq [\,|f(x_1)| - |f(x_1 - ph)|\,] + \\ + [\,|f(x_1 - ph)| - |f(x)|\,]$$

da cui, tenendo conto della (1),

$$x \geq x_\varepsilon \qquad x_1 \geq x + h$$

$$[\,|f(x_1)| - |f(x)|\,] < (K+\varepsilon)\,|\varphi(x_1) - \varphi(x_1 - ph)| + \\ + [\,|f(x_1 - ph)| - |f(x)|\,].$$

Osservando che per la (2)

$$x \leq (x_1 - ph) < x + h,$$

vedremo che

$$\varphi(x_1 - ph) \geq \varphi(x)$$

e indicando con D l'oscillazione della $f(x)$ nel tratto $(x\,, x+h)$ avremo

$$x > x_\varepsilon \qquad x_1 \geq x + h$$

$$[\,|f(x_1)| - |f(x)|\,] < (K+\varepsilon)\,[\varphi(x_1) - \varphi(x)] + D$$

di qui

$$x > x_\varepsilon \qquad x_1 > x + h$$

$$\left|\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\right| < \left|\frac{f(x)}{\varphi(x_1)}\right| + (K + \varepsilon)\left(1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}\right) + \frac{D}{\varphi(x_1)} \quad (3).$$

Ricordando che $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = \infty$, vediamo che qualunque siano x ed ε, è sempre possibile determinare un numero x' tale che siano soddisfatte contemporaneamente le condizioni

$$x_1 \geq x^1 \qquad \left|\frac{f(x)}{\varphi(x_1)}\right| < \varepsilon \qquad \frac{D}{\varphi(x_1)} < \varepsilon;$$

si ha poi sempre

$$x_1 > x \qquad 0 < \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)} \leq 1,$$

avremo dunque dalla (3)

$$x_1 \geq x^1 \qquad \left|\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\right| < K + 3\varepsilon,$$

e ciò prova l' enunciato.

Nel caso che sia $\varphi(x)$ decrescente, infinitesima, analogamente a quanto si è fatto prima si passa dalla

$$x \geq x_\varepsilon \qquad \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}\right| < K + \varepsilon$$

all' altra

$$x > x_\varepsilon \qquad [\,|f(x+h)| - |f(x)|\,] < (K + \varepsilon)\,|\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

e quindi alla

$$x > x_\varepsilon \qquad [\,|f(x+ph)| - |f(x)|\,] < (K + \varepsilon)\,|\varphi(x) - \varphi(x+ph)|.$$

Scelti due numeri x, x_1 ad arbitrio, soddisfacenti le relazioni

$$x > x_\varepsilon \qquad x_1 \geq x + h$$

determiniamo un numero intiero p tale che

$$x + ph \leq x_1 < x + (p+1)h.$$

Avremo

$$[\,|f(x)| - |f(x_1)|\,] \leq |f(x) - f(x+ph)| + |f(x+ph) - f(x_1)|$$

e quindi anche

$$[\,|f(x)| - |f(x_1)|\,] < (K+\varepsilon)\,|\varphi(x) - \varphi(x+ph)| + \\ + |f(x+ph) - f(x_1)|$$

e, osservando che

$$\varphi(x+ph) \geqq \varphi(x_1)$$

e dividendo per $\varphi(x)$,

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| + (K+\varepsilon)\left(1 - \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right) + \frac{D}{\varphi(x)}$$

ove D indica l' oscillazione della $f(x)$ nel tratto $(x_1 - h\,,\, x_1)$.

Ora poichè $f(x)$ e D sono infinitesime, potremo determinare un numero x^1 tale che

$$x_1 \geq x^1 \qquad \left|\frac{f(x_1)}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon \qquad \frac{D}{\varphi(x)} < \varepsilon,$$

essendo poi

$$0 < \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} < 1$$

ne verrà

$$x > x_\varepsilon \quad , \quad \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < K + 3\varepsilon,$$

il che prova l' enunciato.

Corollario. — « Se esiste ed è uguale allo zero il limite per $x = \infty$ della frazione $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}\right|$ esiste ancora ed è uguale allo zero il limite del quoziente $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ».

Teorema 2.° — » *Siano* $f(x)$, $\varphi(x)$ *funzioni reali della variabile reale* x, *finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno dell' infinito; la* $\varphi(x)$ *sia ivi sempre crescente (decrescente) ed infinita (infinitesima) per* $x = \infty$.

Se l *è il limite inferiore di indeterminazione dell'espressione* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ (h *positivo indipendente dalla* x), *il limite inferiore di indeterminazione del quoziente* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *non è minore di* l ».

Teorema 3.° — « *Sieno* $f(x)$, $\varphi(x)$ *funzioni reali della variabile reale* x, *finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno* $(x_0 \dots +\infty)$, *la* $\varphi(x)$ *sia ivi sempre crescente (decrescente) ed infinita (infinitesima) per* $x = \infty$, *se la frazione* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ *tende al limite* λ, *anche il quoziente* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *ammette limite e questo è eguale a* λ ».

La dimostrazione è già stata fatta pel caso di $\lambda = 0$.

Se λ non è eguale allo zero, le differenze $f(x+h) - f(x)$ da un determinato valore di x in poi avranno tutto lo stesso segno e niuna di esse sarà nulla.

La funzione $f(x)$ sarà dunque sempre crescente o sempre decrescente in un determinato intorno dell' infinito.

Si passa dall' uno all' altro caso col porre $F = -f$: possiamo dunque supporre $f(x)$ e $\varphi(x)$ entrambe positive e crescenti per un determinato intorno dell' infinito.

Essendo per ipotesi

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \lambda,$$

avremo

$$\limsup_{x=+\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \liminf_{x=+\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \lambda .$$

Ma pel Teor. 1.° si ha:

$$\limsup_{x=+\infty} \frac{f}{\varphi} = \limsup_{x=\infty} \left|\frac{f}{\varphi}\right| \leq \limsup_{x=+\infty} \left|\frac{\Delta f}{\Delta \varphi}\right| = \lambda .$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{f}{\varphi} \geq \liminf_{x=+\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \lambda ,$$

dunque sarà

$$\lim_{x=\infty} \frac{f}{\varphi} = \lambda .$$

39. Corollario: In particolare: « se $f(x)$ è funzione reale della variabile reale x, finita e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno dell' infinito si à

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

quando esista il secondo membro.

Esempio:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg x}{x} = \lim_{x=\infty} [\lg(x+1) - \lg x] = \lim_{x=\infty} \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

§ 11. Criterio dell' Hôpital.

40. Teorema. — *Le funzioni* $f(x)$, $\varphi(x)$, *reali della variabile reale* x, *sieno finite, ad un valore e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno dell' infinito, la* $\varphi(x)$ *inoltre, per* x *tendente all' infinito, vada all' infinito sempre crescendo (allo zero sempre decrescendo).*

Se il quoziente delle derivate

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ha per $x = +\infty$ *limite determinato* λ, *allo stesso limite tende anche il quoziente delle funzioni.*

Si ha infatti, per ogni valore positivo h,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)} \cdot$$

Essendo per ipotesi

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lambda ;$$

avremo anche

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lambda,$$

e, pel teorema precedente,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda.$$

41. Corollario. — Si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} f'(x)$$

purchè esista il secondo membro.

42. Osservazione I. — *Il teorema or ora dimostrato vale anche se il punto* x_0 *di infinito (o di infinitesimo) della funzione* $\varphi(x)$ *non è il punto* $x=+\infty$.

Ed infatti, se si fa

$$x = x_o + \frac{1}{z}$$

si trasformano le funzioni date in due altre

$$F(z) = f\left(x_o + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Phi(z) = \varphi\left(x_o + \frac{1}{z}\right)$$

per le quali sono soddisfatte le condizioni dell' enunciato precedente.

Si ha poi

$$\frac{d}{dz} F(z) = \left(-\frac{1}{z^2}\right) \frac{df}{dx},$$

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = \left(-\frac{1}{z^2}\right) \frac{d\varphi}{dx}.$$

Dunque

$$\frac{F'(z)}{\Phi'(z)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

ed anche perciò

$$\lim_{z=\infty} \frac{F'(z)}{\Phi'(z)} = \lim_{x=x_o} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Si ha poi

$$\lim_{x=x_o} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{\Phi(z)} = \lim_{z=\infty} \frac{F'(z)}{\Phi'(z)}$$

dunque in fine:

$$\lim_{x=x_o} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=x_o} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

43. *Osservazione* II. — Non si può affermare che valga sempre le reciproca del teorema or ora provato.

Valga a provare ciò l'esempio semplicissimo seguente: sia

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x$$
$$\varphi(x) = x \qquad \varphi'(x) = 1$$

Il limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x=\infty} \cos x$$

non esiste, mentre si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

Osservazione III. — Il teorema del N. 42 può non essere vero quando non sia soddisfatta la condizione imposta nell'enunciato alla $\varphi(x)$ di essere sempre crescente. Valga l'esempio seguente:

Sia

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x \qquad \varphi = e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x)$$

Si ha

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim_{x=\infty} \varphi(x) = \infty,$$

ma

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} = \lim_{x=\infty} e^{-\operatorname{sen} x} \frac{2\cos x}{x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x} = 0$$

mentre che

$$\frac{f}{\varphi} = e^{-\operatorname{sen} x}$$

oscilla fra e ed $\frac{1}{e}$.

Ciò dipende dal fatto che $\varphi(x)$ non è sempre crescente.

Osservazione IV. — Nell' enunciare il criterio dell' Hôpital e quello dato al § 10, si è *sempre implicitamente supposto che la funzione* f(x) *sia infinita od infinitesima insieme con la* φ(x); quando ben si considerino le dimostrazioni date al n.° 38, si scorge però che: *se la* φ(x) *va all' infinito sempre crescendo,* **non è necessario che la** $f(x)$ **sia anch' essa infinita,** *per la esatta applicazione di quei criteri.*

Se invece la φ(x) *è infinitesima,* **quei medesimi criteri possono cadere in difetto per funzioni** $f(x)$ **non infinitesime.**

Se, per esempio, prendo per $f(x)$ una funzione sempre co-costante

$$f(\mathrm{x}) = c,$$

e prendo $\varphi(x) = x$, ho

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{c}{x} = \infty,$$

invece ho:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \lim_{x=0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0.$$

44. Applicheremo i criteri esposti in questo §, e nel precedente alla dimostrazione del teorema:

Se $\varepsilon(x)$ è una funzione che, per x tendente all' infinito, va allo zero sempre decrescendo, ed $f(x)$ è una funzione finita e determinata in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno dell' infinito, definita anche per $x = +\infty$ e tale che nei punti di quell' intorno soddisfi le condizioni:

$$1 + \varepsilon(x) f(x) > 0,$$

si ha la relazione:

$$(1) \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{\lg[1+\varepsilon(x) f(x)]}{\lg[1+\varepsilon(x)]} = \lim_{x=+\infty} f(x).$$

I) Supponiamo prima che

$$\liminf_{x=+\infty} [\varepsilon(x) \cdot f(x)] = l > 0$$

onde $f(x)$ sarà infinita di ordine non inferiore a quello di $[\varepsilon(x)]^{-1}$.

Non si potranno applicare i criteri dati ai n.[i] precedenti; ma avremo

$$\frac{\lg[1+\varepsilon(x) f(x)]}{\lg[1+\varepsilon(x)]} > \frac{\lg[1+l]}{\lg[1+\varepsilon(x)]}.$$

Il secondo membro però, è infinito per $x = +\infty$, avremo dunque

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\lg[1+\varepsilon(x) f(x)]}{\lg[1+\varepsilon(x)]} = \infty = \lim_{x=+\infty} f(x).$$

Analoga dimostrazione si faccia nel caso in cui il limite superiore di indeterminazione di $\varepsilon(x) f(x)$ sia un numero minore di zero; maggiore però sempre di -1.

II) Sia, in secondo luogo,

$$\lim_{x=+\infty} [\varepsilon(x) \cdot f(x)] = 0$$

Per la applicazione del teorema dell' Hôpital dovremo supporre le funzioni ε, f, entrambe derivabili, ed allora scriveremo:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\varepsilon' f + \varepsilon f'}{1+\varepsilon f}}{\dfrac{\varepsilon'}{1+\varepsilon}} = \lim_{x=+\infty} \frac{\varepsilon' f + \varepsilon f'}{\varepsilon'}$$

cioè

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = \lim_{x=\infty} \left(f(x) + \frac{\varepsilon f'}{\varepsilon'}\right)$$

purchè esista il secondo membro.

In questa ipotesi però si ha

$$\lim_{x=\infty} \left(f(x) + \frac{\varepsilon f'}{\varepsilon'}\right) = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(\varepsilon f)}{\dfrac{d}{dx}(\varepsilon)} = \lim \frac{\varepsilon f}{\varepsilon} = \lim_{x=\infty} f(x),$$

dunque avremo ancora:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = \lim_{x=\infty} f(x)\,.$$

Osservazione. — La dimostrazione ora fatta suppone l' esistenza del limite di $\frac{\varepsilon f'}{\varepsilon'}$, in questa ipotesi rimane dimostrato anche il teorema:

Se le funzioni $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) f(x)$, *sono entrambe infinitesime per* $x = \infty$, *si ha:*

$$\lim_{x=\infty} \left(f(x) + \frac{\varepsilon f'}{\varepsilon'}\right) = \lim_{x=\infty} f(x)\,.$$

Sempre *nel caso di* $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon(x) f(x) = 0$, il teorema, che ha notevole importanza nel calcolo degli infiniti, si dimostra anche per

funzioni ε, f, non necessariamente continue, ricorrendo alla formula trovata in Analisi Algebrica (*)

$$\lg(1+x) = x - \frac{\theta}{2}x^2 \quad , \quad 0 < \theta < 1,$$

Si avrà:

$$\lg(1+\varepsilon f) = \varepsilon f - \frac{\theta_1}{2}\varepsilon^2 f^2 \quad , \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\lg(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\theta_2}{2}\varepsilon^2 \quad , \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Da cui:

$$\frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon f - \frac{\theta_1}{2}\varepsilon^2 f^2}{\varepsilon - \frac{\theta_2}{2}\varepsilon^2} = f \cdot \left(1 + \frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot(\theta_2\varepsilon - \theta_1\varepsilon f)}{\varepsilon - \frac{\theta_2}{2}\varepsilon^2}\right)$$

$$\frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = f \cdot \left(1 + \frac{\theta_2\varepsilon - \theta_1\varepsilon f}{2 - \theta_2\varepsilon}\right),$$

e, considerando che $\lim_{x=\infty} \varepsilon f = 0$, subito si ricava il teorema enunnunciato.

III) Rimane da considerare il caso in cui la funzione $|\varepsilon f|$ *abbia limite inferiore nullo* senza essere infinitesima per $x = +\infty$.

Considerando che in questo caso la $f(x)$ non può essere determinata per $x = +\infty$, senza essere ivi infinita, e che la ε essendo sempre positiva, anche εf sarà, da un certo valore di x in poi, sempre dello stesso segno, che supporremo positivo, che infine, lungo quelle successioni ξ_n dove il $\lim_{n=\infty} \varepsilon(\xi_n) f(\xi_n)$ non è nullo, si ha sempre

$$\liminf_{n=\infty} \varepsilon(\xi_n) f(\xi_n) > 0,$$

(*) Cfr. p. es. Cesàro. — Corso di Analisi Algebrica pag. 145. Cfr. anche nelle nostre lezioni litografate dello scorso anno, *Applicazioni della teoria delle serie* (pag. 257).

ricordando le riflessioni fatte al caso I), senza difficoltà troveremo che

$$\liminf_{x=+\infty} \frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = +\infty,$$

cioè anche in questo caso:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\lg(1+\varepsilon f)}{\lg(1+\varepsilon)} = \lim f(x) = +\infty.$$

Esercizi.

1. $$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = \lim_{x=0} \frac{e^x + e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}} = 2.$$

2. $$\lim_{x=1} \frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}} = \frac{n}{2p} .$$

Possiamo scrivere infatti

$$\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}} = \frac{x^m}{1+x^p} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^p}.$$

Ora si à

$$\lim_{x=1} \frac{x^m}{1+x^p} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x=1} \frac{1-x^n}{1-x^p} = \lim_{x=1} \frac{-nx^{n-1}}{-px^{p-1}} = \frac{n}{p}.$$

3. $$\lim_{x=a} \frac{a^n - x^n}{\lg a - \lg x} = \lim_{x=a} \frac{-nx^{n-1}}{-\dfrac{1}{x}} = na^n .$$

4. $$\lim_{x=1} \frac{x^2 - x}{x - 1 - \lg x} = \lim_{x=1} \frac{2x-1}{1 - \dfrac{1}{x}} = \infty.$$

5.
$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x=\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1\,.$$

6.
$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\lg x} = -\lim \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

7.
$$\lim_{x=1} \frac{\lg(x)}{x-1} = 1$$

8.
$$\lim_{x=a} \frac{a(ax)^{\frac{1}{2}} - x^2}{a - (ax)^{\frac{1}{2}}} = 3a$$

9.
$$\lim_{x=1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}$$

10.
$$\lim_{x=1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{1}{2}$$

11.
$$\lim_{x=0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lg \frac{a}{b}$$

12.
$$\lim_{x=a} \frac{(2a^3x - x^4)^{\frac{1}{2}} - a(a^2x)^{\frac{1}{3}}}{a - (ax^3)^{\frac{1}{4}}} = \frac{16}{9}\, a.$$

Se anche il quoziente delle derivate $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ si presenta sotto forma indeterminata, qualora $f'(x)$ e $\varphi'(x)$ soddisfino alle condizioni imposte nell' enunciato del teorema dell' Hôpital, si potrà cercare, se esiste, il limite del quoziente delle derivate seconde terze....

Esempi.

1. $$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x=0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x=0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{\cos x} = 4\,.$$

2. $$\lim_{x=0} \frac{-x - \lg(1-x)}{x - \lg(1+x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{-1 + \dfrac{1}{1-x}}{1 - \dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x=0} \frac{\dfrac{1}{(1-x)^2}}{\dfrac{1}{(1+x)^2}} = 1.$$

3. $$\lim_{x=c} \frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2} = \frac{a}{b}$$

4. $$\lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

5. $$\lim_{x=0} \frac{x \lg(1+x)}{1 - \cos x} = \frac{1}{2}$$

6. $$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x - \dfrac{3}{2} \operatorname{sen} 2x} = -\frac{3}{2}$$

7. $$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = 2$$

8. $$\lim_{x=n} \frac{\cos x\theta - \cos n\theta}{(n^2 - x^2)^r} = (-1)^r \frac{\theta^2 \cos\left(n\theta + \frac{1}{2} r n\right)}{r!\,(2n)^r}$$

§ 12. Criteri desunti dall' esame del birapporto:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,.$$

45. Teorema. — *Le funzioni reali* $f(x)$, $\varphi(x)$ *della variabile reale* x, *sieno finite, ad un valore e derivabili in un determinato intorno del punto* $x = x_0$; *la* φ *inoltre, per* $x = x_0$, *tenda all' infinito sempre crescendo.*

Se esiste il limite

$$\lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda,$$

λ determinato, (finito nullo od infinito) e se per infinito principale si assume quello della φ, l' ordine di infinito della f *è espresso dal numero λ.*

Pongo

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda + \varepsilon(x) \qquad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0\right)$$

ossia

$$\frac{\frac{d}{dx} \lg f(x)}{\frac{d}{dx} \lg \varphi(x)} = \lambda + \varepsilon(x).$$

Poichè il denominatore non è nullo, per tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno dell' infinito, avremo:

$$\frac{d}{dx} \lg f(x) = (\lambda + \varepsilon) \frac{d}{dx} \lg \varphi(x).$$

Se a indica un numero positivo comunque scelto, potremo ad esso coordinare un numero σ_a, abbastanza piccolo perchè sia

$$|x - x_o| < \sigma_a \quad , \quad \lambda + a > \lambda + \varepsilon$$

e, considerando che la funzione $\lg \varphi(x)$ è crescente e la sua derivata positiva, avremo ancora

$$\frac{d}{dx} \lg f(x) < (\lambda + a) \frac{d}{dx} \lg \varphi(x).$$

Di qui

$$\frac{d}{dx} \lg \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)^{\lambda + a}}\right) < 0.$$

La funzione $\lg \dfrac{f(x)}{\varphi(x)^{\lambda+a}}$, costantemente decrescente, avrà limite determinato α, e questo potrà essere un numero finito, oppure avremo $\alpha = -\infty$.

Conseguentemente avremo

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda+a}} = e^{\alpha} = \alpha_1$$

ed il limite α_1 potrà essere un numero finito $\alpha_1 > 0$, oppure sarà $\alpha_1 = e^{\alpha} = 0$. Ma non potrà mai essere $\alpha_1 = +\infty$.

Concludiamo dunque che, *se* a *è un numero positivo qualunque, il quoziente* $\dfrac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda+a}}$, *tende per* $x = x_0$ *ad un limite* α_1 *finito o nullo.*

Si noti però che, se, per un determinato valore di a, fosse $\alpha_1 > 0$, preso un numero positivo a_1 minore di a:

$$0 < a_1 = a - \delta \quad , \quad \delta > 0,$$

si avrebbe

$$\frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda+a_1}} = \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda+a}} \cdot \{\varphi(x)\}^{\delta} .$$

D' onde

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda+a_1}} = \alpha_1 \lim_{x=+\infty} \{\varphi(x)\}^{\delta} = +\infty,$$

e ciò non può essere come dianzi abbiamo dimostrato, è dunque $\alpha_1 = 0$; cioè, *per ogni numero positivo* a, *si ha:*

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^{\lambda+a}} = 0.$$

Similmente si prova che, *se* a *è un numero positivo qualunque, si ha ancora*

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{\lambda-a}} = +\infty.$$

Possiamo dunque dire, al senso spiegato al n.° 25, che *l'ordine di infinito della* f *rispetto alla* φ, *è espresso dal numero* λ.

Osservazione. — La dimostrazione è stata fatta nella ipotesi che λ sia finito o nullo; sono ovvie le modificazioni da fare per λ infinito.

È facile poi vedere che il ragionamento non soffre eccezioni per $x_0 = +\infty$.

46. Teorema. — *Le funzioni reali* $f(x), \varphi(x)$ *della variabile* x, *sieno finite, ad un valore e derivabili in un determinato intorno del punto* $x = x_0$, *la* $\varphi(x)$ *inoltre, per* $x = x_0$, *tenda all'infinito sempre crescendo.*

Se k *ed* l *sono rispettivamente i limiti inferiore e superiore di indeterminazione del birapporto:*

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

per $x = x_0$, *ed è* a *un numero positivo dato a piacere, si ha:*

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{k-a}} = \infty \\ &\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\{\varphi(x)\}^{l+a}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Questo teorema si dimostra con considerazioni analoghe a quelle fatte per il teorema precedente.

47. *Osservazione.* — I teoremi precedenti si estendono senza difficoltà a funzioni infinitesime: ed in particolare si ha la proposizione seguente:

Teorema. — *Le funzioni reali* f(x), φ(x), *della variabile reale* x *sieno finite, ad un valore e derivabili in un intorno determinato del punto* $x = x_0$.

La φ(x) *inoltre sia sempre decrescente ed infinitesima per* $x = x_0$.

Se esiste il limite:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

e se per infinitesimo principale si assume quello della φ(x), *l'ordine di infinitesimo della* f(x) *è espresso dal numero* λ.

Ed infatti le funzioni

$$F = \frac{1}{f} \quad , \quad \Phi = \frac{1}{\varphi},$$

soddisfano le condizioni richieste dal teorema del n.° 45; ora si ha

$$\frac{f'}{\varphi} : \frac{f}{\varphi} = \frac{F'}{\Phi'} : \frac{F}{\Phi},$$

da cui si ricava

$$\lim_{x=x_0} \frac{F'}{\Phi'} : \frac{F}{\Phi} = \lambda.$$

Sarà dunque λ l'ordine infinito della F rapporto alla Φ; cioè si avrà

$$F = \{\Phi\}^{\lambda+\varepsilon} \qquad \lim_{x=x_0} \varepsilon = 0,$$

da cui:

$$f = \varphi^{\lambda+\varepsilon}$$

ed è ciò appunto che si voleva provare.

Osservazione. — Per la applicazione dei criteri precedenti non è necessario supporre che anche la f sia infinitesima (infinita) per $x = x_0$.

§ 13. Criteri desunti dall' esame del birapporto $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$.

48. LEMMA. — *Se* a_r, c_r, *sono variabili reali soggette alle condizioni:*

α) le a_r *sono tutte di uno stesso segno e nessuna di esse è nulla,*

β) i binomi $1 + a_r$, $1 + a_r c_r$ *sono tutti maggiori di zero,*

γ) il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ *non è convergente,*

se con $\beta_1 . \beta_2$, *si indicano rispettivamente i limiti inferiore e superiore di indeterminazione della espressione:*

$$\frac{\lg (1 + a_r c_r)}{\lg (1 + a_r)},$$

ed è ε *un numero positivo qualunque, la variabile*

$$\prod_1^n (1 + a_r c_r)$$

è, per $n = \infty$, *infinita (infinitesima) di ordine superiore a quello della variabile:*

$$\left\{ \prod_1^n (1 + a_r) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon},$$

ed inferiore a quello della variabile:

$$\left\{ \prod_1^n (1 + a_r) \right\}^{\beta_2 + \varepsilon} \text{(*)}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia

$$\lim_{n=} \prod_1^n (1 + a_r) = + \infty.$$

(*) Cfr. BORTOLOTTI. — *Contributo alla teoria dei prodotti infiniti.* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, t. XVIII 1904)).

Per la definizione di β_1 faremo corrispondere al numero ε un determinato numero N, tale che

$$r \geqq N \qquad , \qquad \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)} > \beta_1 - \varepsilon.$$

Ricordando la condizione α) imposta alla a_r, avremo ancora:

$$r \geqq N \qquad , \qquad 1 + a_r c_r > (1 + a_r)^{\beta_1 - \varepsilon},$$

da cui si ricava:

$$n > N \qquad , \qquad \prod_{r=N}^{n} (1 + a_r c_r) > \left\{ \prod_{r=N}^{n} (1 + a_r) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon},$$

infine

$$n > N \qquad , \qquad \frac{\prod_{r=1}^{n} (1 + a_r c_r)}{\left\{ \prod_{r=1}^{n} (1 + a_r) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon}} > \frac{\prod_{r=1}^{N} (1 + a_r c_r)}{\left\{ \prod_{r=1}^{N} (1 + a_r) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon}},$$

d'onde con riflessioni simili a quelle fatte alla pag. 41, si ricava la prima parte dell'enunciato.

Analoga dimostrazione si faccia per la parte che riguarda il limite superiore di indeterminazione β_2

Osservazioni.

I) Nel caso che β_1 sia negativo, non potremo escludere che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sia infinita di ordine negativo, cioè infinitesima.

II) Il teorema e la dimostrazione valgono anche nel caso che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r)$ tenda al limite zero, e servono per determinare l'ordine di infinitesimo del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$.

In questo caso, a limiti inferiori β_1 negativi, possono corrispondere prodotti $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r c_r)$ infiniti per $n = \infty$,

III) Se è $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, cioè *se:*

$$\beta = \lim_{r=\infty} \frac{\lg (1 + a_r c_r)}{\lg (1 + a_r)},$$

se per brevità di linguaggio consideriamo gli infinitesimi come infiniti di ordine negativo, se per infinito principale assumiamo quello della variabile $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r)$, *nella ipotesi che questa finisca per superare qualunque numero positivo, quello della*

$$\left\{ \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r) \right\}^{-1},$$

nel caso contrario, troveremo che, in ogni caso β *è l'ordine di infinito del prodotto infinito* $\overset{\infty}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r c_r)$.

IV) Se $\beta_2 = 0$, la variabile $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r c_r)$ potrà essere finita, od infinita (infinitesima) di ordine inferiore a quello di qualunque potenza positiva della variabile $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r)$.

V) Se $\beta_1 = \infty$, la $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r c_r)$ sarà infinita (infinitesima), di ordine superiore a quello di qualunque potenza positiva della variabile $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r)$.

VI) I numeri β_1, β_2, β, si determinano molto semplicemente quando il fattore generico $1 + a_r$ del prodotto infinito $\pi (1 + a_r)$ tende all' unità. Si ha infatti la proposizione:

Se la variabile a_r *soddisfa la condizione*

$$\lim_{r=\infty} a_r = 0,$$

si hanno le relazioni:

$$\beta_1 = \liminf_{r=\infty} \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)} = \liminf c_r$$

$$\beta_2 = \limsup_{r=\infty} \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)} = \limsup c_r .$$

Ciò in consegnenza del fatto:

$$\lim_{\varepsilon(x)=0} \frac{\lg[1 + \varepsilon(x) f(x)]}{\lg[1 + \varepsilon(x)]} = \lim_{\varepsilon(x)=0} f(x),$$

dimostrato al n.° 44.

In particolare si vede che: *se* $\lim_{r=\infty} a_r = 0$, *l'ordine di infinito del prodotto* $\overset{\infty}{\underset{1}{\pi}} (1 + a_r c_r)$, *relativamente a quello del prodotto* $\pi(1 + a_r)$, *è espresso dal limite per* $r = \infty$ *di* c_r.

49. Teorema. — *Sieno* f, φ *funzioni reali finite e ad un valore nei punti* x_n *di un insieme numerabile* $[x_n]$.

La $\varphi(x_n)$ *sia sempre crescente ed infinita (decrescente ed infinitesima) per* $n = \infty$.

Si ponga:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1 + a_n, \\[2ex] \dfrac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \dfrac{f}{\varphi} = \dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)} : \dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = 1 + b_n, \end{cases}$$

e supponiamo che per ogni valore di n, *sia* $1 + b_n > 0$.

Se β_1, β_2, *sono rispettivamente i limiti inferiore e superiore di indeterminazione per* $n = \infty$ *della espressione:*

$$(2)\quad \frac{\lg\left(1 + \dfrac{a_n b_n}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)},$$

ed è ε *un numero positivo qualunque, l'ordine di infinito (di infinitesimo) della funzione* $f(x_n)$ *è minore di quello della variabile*

$$(\varphi(x_n))^{1+\beta_1+\varepsilon},$$

ed è maggiore di quello della variabile

$$(\varphi(x_n))^{1+\beta_1-\varepsilon}.$$

Poniamo per fissare le idee, che la $\varphi(x_n)$ sia infinita per $n=\infty$, le $\varphi(x_n)$, $\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)$ saranno tutte positive, da un determinato valore di n in poi, e potremo scrivere la identità:

$$\varphi(x_{n+1})\cdot\frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})}-\varphi(x_n)\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}=$$

$$=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}\left\{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\right\},$$

dalla quale si ricavano le altre due:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})}-\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}=\\&=\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})}\left\{\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}-\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})}-\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}=\\&=\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)}\left\{\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}-\frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Osserviamo intanto che, dalla ipotesi $1+b_n>0$, si deduce che $f(x_n)$ e $\Delta f(x_n)$ hanno lo stesso segno. Possiamo dunque supporre che f sia sempre positiva e crescente.

Dalla seconda delle formule (1) abbiamo poi

$$\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} - \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = b_n \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

scriveremo quindi la identità (3) sotto la forma

$$\frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})} = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} \left\{ 1 + \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} \cdot b_n \right\},$$

mettendo per n successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots, n$, e moltiplicando abbiamo:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})} &= \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdot \prod_{r=1}^{n} \left(1 + b_r \frac{\varphi(x_{r+1}) - \varphi(x_r)}{\varphi(x_{r+1})}\right) = \\ &= \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdot \prod_{r=1}^{n} \left(1 + a_r \frac{b_r}{1 + a_r}\right). \end{aligned} \right.$$

Ma per la ipotesi posta circa i limiti sup. ed inf. di ind. della espressione (2), e per il *Lemma* dato al n.° 48, sappiamo che l' ordine di infinito della variabile $\prod_{r=1}^{n} \left(1 + a_r \frac{b_r}{1 + a_r}\right)$ è maggiore di quello della variabile $\left\{ \prod_{1}^{n} (1 + a_r) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon}$, e minore di quello della variabile $\left\{ \prod_{1}^{n} (1 + a_r) \right\}^{\beta_2 + \varepsilon}$; inoltre è

$$\prod_{1}^{n} (1 + a_r) = \prod_{1}^{n} \left(\frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r} \right) = \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1},$$

la relazione (5) dunque ci dice che l'ordine di infinito, per $n = \infty$, del quoziente $\dfrac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})}$ è maggiore di quello della variabile

$$\left\{ \varphi(x_{n+1}) \right\}^{\beta_1 - \varepsilon},$$

ed è minore di quello della variabile

$$\left\{ \varphi(x_{n+1}) \right\}^{\beta_2 + \varepsilon};$$

infine, l'ordine di infinito della $f(x_n)$ è maggiore di quello della

$$\left\{\varphi(x_n)\right\}^{1+\beta_1-\varepsilon}$$

ed è minore di quello della variabile

$$\left\{\varphi(x_n)\right\}^{1+\beta_2+\varepsilon};$$

come appunto volevamo provare.

In particolare *se la espressione* (2) *ammette limite determinato* β, *e si assume come principale l'infinito della* $\varphi(x_n)$, *l'ordine della* $f(x_n)$ *è espresso dal numero* $1+\beta$.

Se poi si ha $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1$, ricordando la osservazione VI) fatta al n.° 48, concluderemo che, *se si assume l'infinito di* $\varphi(x_n)$, *per* $n=\infty$, *come principale, l'ordine di infinito della* $f(x_n)$ *si ottiene calcolando il limite:*

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}\right).$$

Infine osserveremo che: *se* $\lim \dfrac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \dfrac{f}{\varphi} = +\infty$, *la variabile* $f(x_n)$ *è infinita di ordine superiore a quello di qualunque potenza con esponente reale della* $\varphi(x_n)$; *se* $\lim \dfrac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \dfrac{f}{\varphi} = 0$, *la* $f(x_n)$ *è infinita di ordine inferiore a quello di qualunque potenza con esponente positivo della* $\varphi(x_n)$.

50. Corollario. — *Se la* $\varphi(x_n)$ *va all'infinito sempre crescendo, ed il doppio rapporto* $\dfrac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \dfrac{f}{\varphi}$, *per* n *abbastanza grande, è maggiore di un numero maggiore di* 1, *si ha* $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \infty$; *se invece quel doppio rapporto è minore di un numero minore di* 1, *si ha* $\lim \dfrac{f}{\varphi} = 0$.

Esempi.

1) $$f = n! \qquad \varphi = e^n.$$

Si ha:

$$\Delta f = n\,!\,n \quad , \quad \Delta\varphi = e^n\,(e-1)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \frac{f}{\varphi} = \lim_{n=\infty} \frac{n\,!\,n}{e^n\,(e-1)} : \frac{n\,!}{e^n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{e-1} = \infty,$$

il fattoriale $n\,!$ è infinito di ordine superiore a quello di qualunque potenza reale positiva dell' esponenziale e^n.

2) $$f = n^n \quad , \quad \varphi = n\,!$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \frac{f}{\varphi} = \frac{(1+n)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{n},$$

$$b_n = \frac{1+n}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1 + n \quad , \quad a_n = n.$$

Si ha anzitutto

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta f}{\Delta\varphi} : \frac{f}{\varphi} = e,$$

dunque il rapporto $\frac{n^n}{n\,!}$ tende all' infinito.

D' altra parte si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(1+\frac{a_n b_n}{1+a_n}\right)}{\lg(1+a_n)} = \lim \frac{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lg(1+n)} = 0.$$

Dunque

$$\frac{n^n}{n\,!} = (n\,!)^{\varepsilon_n} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

se si assume come infinito del 1.° ordine $n!$ l'ordine di n^n, è eguale ad 1.

3) $$f = e^x \quad , \quad \varphi = x .$$

Cercheremo il limite del birapporto $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$. Ora si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = \lim_{x=\infty} x = \infty$$

cioè e^x è infinito di ordine superiore a quella di qualunque potenza della x

4) $f = \lg x \quad , \quad \varphi = x \quad . \quad \lim_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0,$

$\lg x$ è infinita di ordine inferiore a quello di qualunque potenza reale della x.

5) $$f = (\lg x)^{\lg x} \quad , \quad \varphi = x ,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'}{f'} : \frac{f}{\varphi} = \lim_{x=\infty} (\lg \lg x + 1) = \infty$$

la funzione $(\lg x)^{\lg x}$, è infinita di ordine superiore a quello di qualunque potenza ad esponente reale della x.

6) Se $\varphi = e^x$, si ha $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = \frac{d}{dx} [\lg f(x)]$,

così si vede subito che

$$\lim_{x=\infty} \frac{(\lg x)^{\lg x}}{e^x} = 0 \quad , \quad \text{perchè} \quad \lim_{x=\infty} \frac{d}{dx} (\lg x \,.\, \lg \lg x) = 0$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^x}{e^x} = \infty \quad , \quad \text{perchè} \quad \lim_{x=\infty} \frac{d}{dx} (x \lg x) = \infty$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^{\lg x}}{e^x} = 0 \quad , \quad \text{perchè} \quad \lim_{x=\infty} \frac{d}{dx} (\lg x)^2 = 0$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{(\lg x)^x}{e^x} = \infty \quad , \quad \text{perchè} \quad \lim_{x=\infty} \frac{d}{dx} (x \,.\, \lg \lg x) = \infty$$

7. $f = x^x \quad , \quad \varphi = e^{x^{1+a}}$ (a positivo qualunque)

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = \lim_{x=\infty} \frac{\lg x + 1}{(1+a)\, x^a} = 0.$$

Dunque f è infinito di ordine minore di quello di qualunque potenza positiva della φ.

8. $f = (\lg x)^x \quad , \quad \varphi = e^{x^{1+a}}$ .....

§ 14. Altre forme di indeterminazione.

51. Forme di indeterminazione più comuni, oltre quella $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, fino ad ora considerate, sono le seguenti:

I) $0 \,.\, \infty$, II) $\infty - \infty$, III) 1^∞ , IV) 0^0 , V) ∞^0.

I) Sia $\psi = f \,.\, \varphi$, e per $x = x_0$ sia f infinitesima e φ infinita.

Fatto:

$$\varphi = \frac{1}{\Phi},$$

per la definizione impropria della $\psi(x)$ per $x = x_0$, si tratterà di calcolare il limite

$$\lim_{x=x_0} \frac{f}{\Phi}$$

del quoziente di due funzioni entrambe infinitesime per $x = x_0$; e si applicheranno perciò i criteri svolti ai numeri precedenti.

II) Sia $\psi = f - \varphi$.

Se le f e φ sono entrambe infinite per $x = x_o$; potremo ancora definire impropriamente la ψ nel punto x_o, ponendo

$$e^f = F \quad , \qquad e^\varphi = \Phi \, ,$$

allora si ha

$$e^\psi = \frac{F}{\Phi} \, .$$

Le funzioni F, Φ sono entrambe infinite per $x = x_o$; dato che si sappia calcolare il limite

$$\lambda = \lim_{x = x_o} \frac{F}{\Phi} \, ,$$

definiremo impropriamente la ψ prendendo

$$\psi(x_o) = \lg \lambda .$$

Osservazione — Qualche volta giova porre

$$\psi = \frac{f^2 - \varphi^2}{f + \varphi}$$

come si vedrà in alcuni esempi in fine del § seguente.

III), IV), V) Per una funzione della forma $\psi = f^\varphi$, si possono dare punti x_o di indeterminazione, quando si abbia $f(x_o) = 1$, $\varphi(x_o) = \infty$, $f(x_o) = 0$, $\varphi(x_o) = 0$, $f(x_o) = \infty$, $\varphi(x_o) = 0$.

Questi tre casi si trattano in modo uniforme col porre

$$\lg \psi = \varphi \, . \lg f = \frac{\varphi}{\dfrac{1}{\lg f}} \, ,$$

calcolando il limite λ, del secondo membro ed assumendo per definizione impropria di $\psi(x_o)$ il valore

$$\psi(x_o) = e^\lambda \, .$$

Gli ultimi due casi però si possono trattare direttamente traendo profitto dai due teoremi che esporremo nel § seguente.

§ 15. I teoremi:

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{x=\infty}\left[F(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty}\frac{F(x+1)}{F(x)}, \\ &\lim_{x=\infty}\left[F(x)\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x=\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}}. \end{aligned}\right.$$

52. Teorema. — *Se* F(x) *è una funzione reale della variabile reale* x *finita e ad un valore in tutti i punti di un determinato intorno dell' infinito, si hanno le formule:*

$$\lim_{x=\infty}\left[F(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty}\frac{F(x+1)}{F(x)} \tag{1}$$

$$\lim_{x=\infty}\left[F(x)\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x=\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}} \tag{2}$$

purchè esista il secondo membro.

Pongasi

$$f = \lg F, \tag{3}$$

$$\frac{F(x+1)}{F(x)} = e^{f(x+1)-f(x)} \quad , \quad \left[F(x)\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f}{x}}.$$

Si ha però: (cfr. n.° 39).

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} f(x+1) - f(x),$$

purchè esista il secondo membro; dunque, etc.

Si ha poi

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)}.$$

Dato che esista il esista il limite, per $x = +\infty$, di

$$f'(x),$$

questo è eguale (t. dell'Hôpital) a quello di

$$\frac{f(x)}{x};$$

dunque si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} \lg \left\{F(x)\right\}^{\frac{1}{x}},$$

e di qui la formula (2).

Esempi.

1. Il limite per $n = \infty$ dell'espressione $\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ si può calcolare facendo uso del I. dei teoremi del § 15: si ha

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2. Applicando il II. teorema nel § 15 si cerchi il limite di $\left(\frac{\lg x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ per $x = \infty$

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{\lg x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty} e^{\frac{1-\lg x}{x \lg x}} = 1.$$

Esercizi.

1. $$\lim_{x=0} x \operatorname{cotg} x = \lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

2. $$\lim_{x=\infty} a^{-x} \,.\, x^n = \lim_{x=\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$$

3. Sia $x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ $(a > 0)$ che per $x = \infty$ à la forma: $0 \,.\, \infty$. Si scriva

$$x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

Se si pone $z = \frac{1}{x}$ si cade nel quoziente $\frac{a^z - 1}{z}$ che per $z = 0$ diviene dalla forma $\frac{0}{0}$ quindi è

$$\lim_{x=\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{z=0} \frac{a^z - 1}{z} = \lim_{z=0} a^z \lg a = \lg a.$$

4. Sia $\psi = \lg(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{x}$, che per $x = 0$ à la forma $\infty - \infty$; si ponga

$$F = e^{\lg \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \quad , \quad \varphi = e^{\frac{1}{x}}.$$

Allora

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\frac{1}{x}}} \qquad \lambda = \lim_{x=0} \frac{F}{\varphi} = 0 \qquad \lim_{x=0} \psi = \lg \lambda = -\infty.$$

5. Avendo l' espressione $\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x$, che per $x = 0$ à la forma $\infty - \infty$, si può scrivere

$$\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x}.$$

La successiva applicazione del t. dell' Hôpital ci insegna che:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x=0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

6. $$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x},$$

applicando la regola de l' Hôpital si à

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

7. $$\lim_{x=\infty} \sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \lim_{x=\infty} \frac{(x+a)-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0.$$

8. $$\lim_{x=\infty} \left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x\right) =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{(x+\alpha)(x+\beta) - x^2}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{(\alpha+\beta) + \frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

9. L'espressione $\psi = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ per $x = 0$ à la forma 1^∞.
Si à

$$\lg \psi = \frac{\lg (1 + \operatorname{sen} x)}{x}$$

che à la forma $\frac{0}{0}$. Per il teorema de l' Hôpital

$$\lim_{x=0} \lg \psi = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 1$$

quindi $\lim\limits_{x=0} \psi = e.$

10. Così la funzione $\psi = \left(\frac{a}{x} + 1\right)^x$ per $x = \infty$ è della forma 1^∞: Si à

$$\lg \psi = x \lg \left(\frac{a}{x} + 1\right) = \frac{\lg \left(\frac{a}{x} + 1\right)}{\frac{1}{x}}$$

che per $x = \infty$ à la forma $\frac{0}{0}$ quindi

$$\lim_{x=\infty} \lg \psi = \lim_{x=\infty} \frac{-\frac{1}{\frac{a}{x} + 1} \cdot \frac{a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = a,$$

quindi $\lim\limits_{x=\infty} \psi = e^a$.

11. L'espressione $\psi = x^x$ per $x = 0$ à la forma 0^0:

$$\lg \psi = x \lg x = \frac{\lg x}{\frac{1}{x}}$$

allora

$$\lim_{x=0} \lg \psi = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x=0} -x = 0$$

quindi $\lim\limits_{x=0} \psi = 1$.

Si poteva più direttamente giungere a questo risultamento col fare $x = \frac{1}{y}$, e con l'applicare il primo dei teoremi dati al § 15 alla espressione risultante $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}$.

12. Così se si à la funzione $\psi = x^{\operatorname{sen} x}$,

$$\lg \psi = \operatorname{sen} x \lg x = \frac{\lg x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

si à

$$\lim_{x=0} \lg \psi = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \,.\, \operatorname{tg} x = 0$$

quindi $\lim\limits_{x=0} \psi = 1.$

Ciò poteva dedursi pensando, che avendo $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, si poteva al posto di sen x sostituire la x e ricadere nel caso precedente.

12. L' espressione $\varphi = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ per $x = 0$ à la forma ∞^0. Si à

$$\lg \varphi = \operatorname{sen} x \lg (\operatorname{cotg} x) = \frac{\lg (\operatorname{cotg} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

che per $x = 0$ à la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Si vede facilmente che

$$\lim_{x=0} \lg \varphi = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \lim_{x=0} \varphi = 1.$$

13. Se $\varphi = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

$$\lg \varphi = -\operatorname{sen} x \lg x = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\, x \,.\, \lg x$$

poichè $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x=0} x \lg x = 0$

$$\lim_{x=0} \lg \varphi = 0 \qquad \lim_{x=0} \varphi = 1.$$

Allo stesso risultato si poteva giungere scrivendo

$$\varphi = \left\{ \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \right\}^{\frac{1}{x}},$$

ed applicando il teorema I del § 15.

14. $\lim\limits_{x=1}\left(\frac{1}{\lg x}-\frac{x}{\lg x}\right)=-1$

15. $\lim\limits_{x=0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=1$

16. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)=-1$

17. $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$

18. $\lim\limits_{x=\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x=\lg a$

19. $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

20. $\lim\limits_{x=\infty}2^{x}\operatorname{sen}\frac{a}{2^{x}}=a$

21. $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\infty$

22. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\sqrt{x(x+\alpha)}-x\right)=\frac{1}{2}\alpha$

23. $\lim\limits_{x=0}\cos(mx)^{\frac{n}{x}}=1$

24. $$\lim_{x=a}\frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{4}}}=0$$

25. $$\lim_{x=1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

CORREZIONI ED AGGIUNTE

A pag. 3, linea 8 invece di ν', si legga v'.

Dopo il Corollario I. si aggiunga la seguente

Osservazione. — Se nel punto $x = x_0$ la funzione $f(x)$ non ha limite determinato, si potranno costruire successioni $\xi_n^{(r)}$ di valori tendenti ad x_0, lungo le quali la funzione $f(\xi_r^n)$ ha limite per $n = \infty$; posto

$$\lim_{\xi_n^r = x_0} f(\xi_n^r) = l_r ,$$

si avranno valori diversi di l_r corrispondenti ai vari modi di formare le successioni ξ_n^r tendenti ad x_0.

Di cotesti limiti l_r il massimo è il limite superiore di indeterminazione L della $f(x)$ per $x = x_0$ ed il minimo è il limite inferiore di indeterminazione l.

Di qui la locuzione: *la plus grande des limites, la plus petite des limites,* usate dal CAUCHY per indicare L, ed l, rispettivamente.

Alla pag. 14, formula 5, al denominatore invece di

$$\left(\frac{1}{\lg (x - x_0)}\right), \quad \text{si legga} \quad \left|\frac{1}{\lg (x - x_0)}\right|.$$

Alla pag. 15, linea 17, invece di $(x - x_0) < \delta$, si legga $|x - x_0| < \delta$.

Nelle pagg. 26-28, invece di $[|(f(x_1)| - |f(x)|]$, si legga sempre $\left| |f(x_1)| - |f(x)| \right|$.

Finito di stampare il 31 marzo 1905.

Sul limite del quoziente di due funzioni.

(*Di* Ettore Bortolotti, *a Modena.*)

Quando si cerca il limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ di due funzioni che sono in uno stesso punto entrambe infinite od infinitesime, si ricorre solitamente al limite del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ delle loro derivate (*). Ora, non solo può accadere che il primo limite esista, senza che esista il secondo, ma può anche darsi che quest'ultimo esista, e non il primo. Ciò per il fatto che le f', φ' possono avere dei fattori comuni che, al crescere indefinito di x, sempre presentano qualche cambiamento di segno e che, nella ricerca del limite del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ sono trascurati.

Così se si fa $f = x + \operatorname{sen} x \cos x$, $\varphi = e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x)$, si ha $f' = 2\cos^2 x$, $\varphi' = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x)$.

Si vede che la f' è sempre positiva o nulla, la φ' cambia continuamente di segno, e non è possibile determinare due numeri positivi ε, μ, tali che, nei punti di un determinato intorno $(x_{\varepsilon,\mu}, \ldots, \infty)$, sia

$$\varepsilon \varphi' \leqq f' \leqq \mu \varphi'. \tag{1}$$

Il quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, tolto il fattore $\cos x$ comune ai due termini, diventa infinitesimo per $x = \infty$. Quello delle funzioni, come subito si scorge, non ha limite, ma oscilla fra $\frac{1}{e}$ ed e.

(*) Lo Stolz dimostra che si può invece cercare quello delle differenze finite, nelle Memorie: *Ueber die Grenzwerth der Quotienten* (Mat. Ann. XIV, pag. 232-239, XV, pag. 556-559); *Verallgemeinerung eines Satz von Cauchy* (Mat. Ann. XXXIII, pag. 238), anche quest'ultimo limite può non esistere, pur esistendo quello del quoziente delle funzioni. Cfr. anche Cesaro (*Rend. Acc. Lincei*, 1888, pag. 116).

Lo Stolz, che cita codesto esempio (*), pare voler attribuire ciò al fatto che, le due derivate, f' e φ', sono insieme nulle in infiniti punti di ogni intorno dell'infinito, ed esclude, nel suo enunciato, le coppie di funzioni le cui derivate sono, in un insieme di punti $[\xi]$ che hanno limite superiore $+\infty$, contemporaneamente nulle od infinite. Vedremo però che tale esclusione non è necessaria, a patto che quelli fra i punti $[\xi]$ che sono situati in un intervallo finito qualunque, costituiscano un insieme di dimensione esterna nulla; cioè, — per usare una denominazione da me introdotta (**), per analogia a quella usata dallo Stolz stesso e dall'Harnach, — che l'insieme di tutti i punti $[\xi]$ sia *discreto.*

Il quesito generale che mi sono proposto è il seguente:

In quale relazione deve stare la estensione dell'insieme di tutti i punti $[x]$ di un determinato intorno $(x_0, \ldots +\infty)$ nei quali le f' φ' non sono insieme nulle nè infinite ed è soddisfatta una relazione della forma

$$m \leq \left| \frac{f'}{\varphi'} \right| \leq M. \tag{1}$$

m, M, positivi (o nulli) determinati, a quella dell'insieme dei punti $[\xi]$ di quel medesimo intorno dove tale relazione può non essere soddisfatta e le f', φ' possono essere insieme nulle od infinite, perchè si possa esser certi della esistenza di un intorno $(x_{m,M}, \ldots +\infty)$ in ogni punto del quale sia

$$m\mu \leq \left| \frac{f}{\varphi} \right| \leq \nu M, \tag{2}$$

μ, ν, diversi dallo zero e dall'infinito, non variabili con x?

Nel § I, per eliminare le difficoltà che nascono dalla supposizione che le funzioni f', φ' possano avere punti di infinito o di infinitesimo comuni, ho sostituito alla considerazione del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ quella delle relazioni di grandezza fra le funzioni medesime f', φ'.

I risultamenti ottenuti in questo paragrafo mi permettono, nel § II, di stabilire delle condizioni sufficienti per la esistenza della (2).

Ho visto che, quando non si introduca alcuna nuova ipotesi oltre quelle che in simili ricerche solitamente si ammettono per le funzioni f, φ, è con-

---

(*) *Mat. Ann.*, XV, pag. 557.

(**) Cfr. la nota: *Contributo alla teoria degli insiemi.* Rendiconti Acc. Lincei. Vol. XI, 2.° sem., serie 5.ª, fasc. 2.° (1902).

dizione sufficiente che sia *discreto* l'insieme dei punti $[\xi]$ dove la (1) può non essere soddisfatta e le f' φ' possono essere insieme nulle od infinite.

Nel § III, introducendo in più la ipotesi che delle due funzioni $|f|$, $|\varphi|$, una almeno vada all'infinito sempre crescendo, ho visto che è sufficiente che il rapporto fra le estensioni degli insiemi dei punti $[\xi]$, $[x]$ situati nell'intervallo $(x_0 \dots x)$, diventi infinitesimo per $x = +\infty$.

Non occorre dunque che la estensione dell'insieme $[\xi]$ sia nulla, basta che essa sia infinitesima rispetto alla estensione dell'insieme $[x]$.

Tale condizione è tanto poco restrittiva da raggiungere la condizione necessaria da me appunto trovata nel § V.

La ricerca delle **condizioni necessarie**, è sempre stata considerata come difficilissima, nessuno, credo, tolto il Du-Bois-Reymond (*), ha tentato di risolverla. Questi è costretto ad ammettere che esistano determinate anche le derivate seconde f'', φ'', e che sieno infinitesimi entrambi i quozienti $\frac{f''}{f'}$, $\frac{\varphi''}{\varphi'}$, per $x = +\infty$; ciò che restringe di troppo il campo delle sue ricerche. Il punto di vista dal quale egli è partito è poi sostanzialmente diverso dal mio. Le condizioni che io impongo alle due funzioni della variabile reale x f, φ, ad un valore, monotone, finite, continue, derivabili in ogni intorno $(x_0 \dots + \infty)$ sono sostanzialmente queste: che delle due funzioni f, φ, una almeno tenda all'infinito sempre crescendo, e, delle due derivate f', φ', una almeno sia integrabile (propriamente od impropriamente) in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$; trovo allora, come *condizione necessaria* (teoremi 11 e 12), che *il rapporto delle estensioni degli insiemi dei punti* $[\xi]$, $[x]$ *dianzi definiti, contenuti nell'intervallo* $(x_0 \dots x)$ *sia infinitesimo, per* $x = +\infty$, e ciò mi permette in particolare di enunciare la **condizione necessaria e sufficiente** (teoremi 10 e 13) perchè il quoziente $\left|\frac{f}{\varphi}\right|$ sia infinito (infinitesimo) per $x = +\infty$.

Nel caso in cui i limiti dei quozienti delle funzioni e delle derivate sieno entrambi determinati per $x = +\infty$, ho cercato, con le *Osservazioni* ai

(*) *Ueber Integration und Differentation infinitärer Relationen* (Mat. Annalen XIV, pag. 498-506). Cfr. anche Stolz: *Ueber die Grenzwerthe der Quotienten* (Mat. Ann. XIV, pag. 237-238).

n.[i] 7 (§ II) e 10 (§ IV) di stabilire le rapidità relative di tendenza al limite di quei due quozienti.

Sono giunto così a criteri che permettono di trar partito dal teorema dell'Hôpital, anche quando il quoziente delle derivate si ripresenti sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$, o sotto l'altra $\frac{0}{0}$.

Tali criteri sono di non dubbia utilità pratica e si enunciano brevemente dicendo:

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ sono entrambe infinite per $x = +\infty$, se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ è per $x = +\infty$ infinita (infinitesima), il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ non può ivi essere determinato senza essere infinitesimo (infinito).

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, sono entrambe infinitesime per $x = +\infty$, se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ è infinita (infinitesima) per $x = +\infty$, il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ non può essere ivi determinato senza essere anch'esso infinito (infinitesimo).

Fra le molte applicazioni che si possono fare della teoria qui svolta, ne ho scelta una che ha speciale interesse, poichè si riferisce alla determinazione dell'ordine di infinito delle funzioni, ed in particolare di quelle funzioni monotone che soddisfano la relazione

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

M'è sembrato opportuno considerare queste funzioni come appartenenti ad una stessa classe, che è la prima nella classificazione secondo la rapidità di crescenza da me proposta in una Memoria, che può considerarsi come preventiva, stampata negli *Atti della Società dei Matematici e Naturalisti di Modena*, l'anno 1901.

L'opportunità di codesta classificazione risulta manifesta delle considerazioni seguenti:

Se si dà alla x una successione di valori $x_0 + n$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ si può far coincidere la successione $f(x_0 + n)$ con quella dei prodotti parziali

$$P_n = (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)$$

di un determinato prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + b_n)$, ed anche, se si vuole, con quella delle somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

di una serie

$$\sum_{1}^{\infty} u_n .$$

Ora, se la $f(x)$ è monotona non decrescente, le b_n e le u_n sono tutte positive o nulle. Se la $f(x)$ appartiene a quella classe prima, ad essa corrispondono prodotti infiniti il cui fattore generale $1 + b_n$ tende ad 1 e reciprocamente. Le serie a termini positivi, il cui termine generale u_n tende allo zero per $n = \infty$, sono tutte corrispondenti a funzioni della classe prima.

Queste serie e quei prodotti infiniti sono come è noto i più studiati ed i più ovvi, i soli che possano convergere, quelli la cui divergenza, quando non convergano, è meglio conosciuta.

Si osservi in secondo luogo che le *funzioni monotone che hanno derivata logaritmica infinitesima appartengono tutte a quella prima classe* (Teoremi 2.°, 3.°, 4.° del § VI) e che *le funzioni di quella prima classe divergono meno rapidamente della esponenziale* e^{ax} (a numero reale positivo), proprietà queste che mi paiono rilevanti, pensando alla importanza che hanno nel calcolo infinitario il comportamento assintotico della derivata logaritmica (*), ed in quello delle funzioni intere il confronto con la rapidità di crescenza della esponenziale e^{ax} (**).

Le proprietà enunciate saranno qui dimostrate con maggiore generalità di quel che lo siano nella citata Memoria, e saranno anche messe in evidenza le condizioni sotto cui possono dimostrarsi le proposizioni reciproche: *Le funzioni della prima classe hanno derivata logaritmica infinitesima. Le funzioni monotone che divergono meno rapidamente della esponenziale* e^{ax} *appartengono alla prima classe.*

Ne risulterà così la risoluzione del quesito:

Sotto quali condizioni si può ritenere che i due fatti: di avere derivata logaritmica infinitesima; di divergere meno rapidamente di e^{ax}*; sono per una data funzione monotona, conseguenza l'uno dall'altro?*

Messe così in sodo le proprietà fondamentali delle funzioni della prima classe, si potrà poi definire una seconda classe stabilendo che essa debba

(*) Cfr. p. es. Du Bois Reymond, questi *Annali*, Serie II, Vol. IV, pag. 338-353.

(**) Vedi p. es. Borel. *Fonctions Entières*, pag. 7.

comprendere le funzioni $f(x)$ tali che fatto il rapporto

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \varphi(x)$$

ne risultino funzioni $\varphi(x)$ della prima classe, e che non sieno esse stesse della classe prima.

Si vede facilmente che le funzioni di questa classe divergono meno rapidamente di e^{ax^2}, e non meno rapidamente di e^{ax}, (a reale positiva).

Con eguale facilità si definiscono le classi successive, e si cercano le proprietà assintotiche delle funzioni che le compongono.

Ciò è stato già accennato nella citata Memoria, e risulterà meglio da un prossimo lavoro.

§ I.

1. Seguendo le notazioni usate nella mia Nota: *Contributo alla teoria degli insiemi* (*) rappresenterò con Ξ_1 un insieme *discreto* di punti $[\xi]$ situati in un intorno $(x_0 \ldots + \infty)$. La estensione esterna della parte di questo insieme che è situata in un intervallo $(x_0 \ldots x)$ finito qualunque, è dunque sempre identicamente nulla.

Indicheremo con K_1 l'insieme dei punti che rimangono nell'intorno $(x_0 \ldots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti tutti i punti di un insieme Ξ_1.

Queste definizioni non escludono il caso in cui Ξ_1 si componga di un numero finito di punti, e K_1 comprenda tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito.

2. Consideriamo prima il caso di due funzioni f, φ, entrambe monotone in un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$.

Siccome, col prendere x_0 abbastanza grande, possiamo sempre fare che in quell'intorno le funzioni date non abbiano cambiamenti di segno, così si potranno considerare come monotone anche le funzioni $|f|$, $|\varphi|$, che si ottengono prendendo i loro valori assoluti. Queste $|f|$, $|\varphi|$ hanno dunque sempre limite determinato (finito, nullo od infinito) per $x = \infty$; ed avendo noi specialmente in vista i casi in cui esse sono ivi entrambe infinite od in-

(*) Loc. cit., n.° 13, pag. 51.

finitesime, potremo limitarci alla considerazione di quelle coppie f, φ, di funzioni, i cui valori assoluti $|f|$, $|\varphi|$, sono contemporaneamente non decrescenti o non crescenti.

Teorema 1.° *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$,*

i loro valori assoluti $|f|$, $|\varphi|$, sieno, ivi, insieme non decrescenti,

delle due derivate f', φ', una almeno p. es. la φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita $(x_0 \ldots x)$,

esistano due numeri positivi m, M, tali che il limite inferiore dei valori assoluti che la f' assume nei punti di un insieme K_1, compresi in ogni tratto $(x_s, x_s + \delta_s)$ $x_s > x_0$, $\delta_s > 0$, non sia minore del corrispondente limite inferiore della funzione $m\,|\varphi'|$, e che il limite superiore della $|f'|$, in quegli stessi punti, non sia maggiore del limite superiore corrispondente della funzione $M\,|\varphi'|$.

Dico che esistono tre numeri finiti positivi $x_{\mu,\nu}$, μ, ν, tali che

$$\left.\begin{array}{c} x > x_{\mu\nu} \\ \mu\, m \leq \left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leq \nu\, M. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Ed infatti, per le ipotesi poste, e pel teorema 3.° della Nota: *Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media*, pubblicata nel fascicolo 4.° dello stesso semestre dei *Rendiconti dei Lincei* (posto, per fissare le idee, che sia φ' quella fra le due derivate che si suppone atta alla integrazione definita), in ogni intervallo finito $(x_1 \ldots x)$, $x > x_1 > x_0$, si ha:

$$\int_{x_1}^{x} m\,|\varphi'(x)|\,dx \leq |f(x) - f(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x} M\,|\varphi'(x)|\,dx. \tag{2}$$

Siccome la φ' conserva il medesimo segno in tutti i punti, dove non è nulla, dell'intervallo $(x_1 \ldots x)$, così avremo ancora

$$m\,|\varphi(x) - \varphi(x_1)| \leq |f(x) - f(x_1)| \leq M\,|\varphi(x) - \varphi(x_1)|. \tag{3}$$

Se ora le funzioni monotone $f(x)$, $\varphi(x)\ldots$ non si riducono a costanti numeriche, ciò che escluderemo, potremo trovare un valore di x abbastanza grande, perchè non sia nulla la differenza $|\varphi(x) - \varphi(x_1)|$. Questa poi, in valore assoluto, non potrà più diminuire, col crescere di x, e, per ogni valor

finito di x, sarà finita e determinata. Potremo dunque dalle (3) dedurre la seguente:

$$m < \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} \right| < M. \tag{4}$$

Tenendo nota del fatto che, in nessun punto a distanza finita, le f e φ possono esser nulle nè infinite, avremo ancora:

$$m < \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \left| \frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}} \right| < M. \tag{5}$$

Indichiamo con x_2 un valore di x maggiore di x_1 e per il quale non è nulla nessuna delle due differenze: $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$, $f(x_2) - f(x_1)$, poniamo poi:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \delta_1, \qquad \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \delta_2 \tag{6}$$

avremo

$$0 < \delta_1 < 1, \qquad 0 < \delta_2 < 1 \tag{7}$$

ed anche

$$\left. \begin{array}{c} x > x_2 \\ 0 < \dfrac{f(x_1)}{f(x)} < \delta_1 < 1, \qquad 0 < \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} < \delta_2 < 1 \end{array} \right\} \tag{8}$$

epperò

$$1 - \delta_1 < \frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}} < \frac{1}{1 - \delta_2}.$$

Dalla (5) perciò ricaveremo:

$$\left. \begin{array}{c} x > x_2 \\ m(1 - \delta_2) < \left| \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \dfrac{M}{1 - \delta_1}. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Questa appunto, fatto $1 - \delta_2 = \mu$, $\dfrac{1}{1 - \delta_1} = \nu$, $x_2 = x_{\mu\nu}$, è la formula richiesta.

Si considerino p. es. le funzioni

$$f = x + \operatorname{sen} x \cos x \qquad \varphi = x + \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Le loro derivate

$$f' = 2\cos^2 x\,, \qquad \varphi' = \cos^2 x\,(1 + 4\,\mathrm{sen}^2 x),$$

sono nulle in infiniti punti di ogni intorno dell'infinito. Per la determinazione del comportamento assintotico del loro quoziente non servirebbe nè l'ordinario teorema dell'Hôpital, nè il criterio dello Stolz. Se si osserva però che i punti dove esse sono entrambe nulle, costituiscono certamente un insieme discreto, che nei rimanenti punti si ha sempre:

$$2\,|\varphi'| > |f'| > \frac{2}{5}\,|\varphi'|,$$

e che tutte le altre condizioni dell'enunciato sono soddisfatte, potremo senz'altro concludere che il quoziente $\left|\frac{f}{\varphi}\right|$ è situato fra due numeri finiti e diversi dallo zero, per tutti i valori di x di un determinato intorno dell'infinito: cioè che esse hanno lo stesso ordine di infinito. Ciò del resto, in questo caso, si verifica subito direttamente.

3. Vi sono funzioni che, pur non essendo monotone, si possono dire *generalmente crescenti* o *decrescenti.*

Tali sono le funzioni relativamente alle quali, *ad ogni numero positivo* x_1 *dell'intervallo* $(x_0 \ldots + \infty)$, *dove si suppongono finite, continue, ad un valore, si può far corrispondere un secondo numero* $x_2 \geqq x_1$ *per modo che i valori corrispondenti a punti dell'intervallo* $(x_2 \ldots + \infty)$ *sieno tutti maggiori (minori) di quelli corrispondenti a punti dell'intervallo* $(x_0 \ldots x_1)$.

In particolare ciò ha luogo per le funzioni che sono infinite (infinitesime) nel punto $x = \infty$, e sono finite (diverse dallo zero) in ogni punto a distanza finita.

Per funzioni generalmente crescenti si hanno i teoremi seguenti:

Teorema 2.° *Sieno* f *e* φ *due funzioni della variabile reale* x *ad un valore, finite, continue e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno* $(x_0 \ldots \infty)$.

Il valore assoluto $|\varphi|$ *sia ivi monotono, non decrescente.*

Relativamente alla funzione f, *esistano tre numeri positivi* $x_1 \geqq x_0$, x_2, δ, *tali che*

$$\left.\begin{array}{l} x > x_2\,, \\ \left|\dfrac{f(x_1)}{f(x)}\right| \leqq \delta < 1. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

La derivata φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita $(x_0 \dots x)$.

Relativamente alle derivate f', φ', esista un numero positivo M tale che, il limite superiore dei valori assoluti, che la f' assume nei punti di un insieme K_1, situati in un intervallo di ampiezza arbitraria $(x_s, \dots x_s + d_s)$ $x_s \geq x_0$, $d_s > 0$, non sia maggiore del limite superiore corrispondente della funzione $M | \varphi' |$.

Dico che esiste un numero positivo x_4 tale che:

$$\left.\begin{array}{c} x > x_4, \\ \left| \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \dfrac{M}{1-\delta}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Ed infatti, per le ipotesi poste, e pel teorema 4.° della mia Nota: *Alcuni teoremi*, ecc., già citata, si ha:

$$| f(x) - f(x_1) | < M | \varphi(x) - \varphi(x_1) |. \tag{12}$$

Se la φ non è costante in tutto l'intorno $(x_1 \dots \infty)$, ciò che escluderemo, si potrà determinare un numero x_3 abbastanza grande perchè $x \geq x_3$, $| \varphi(x) - \varphi(x_1) | > 0$, avremo perciò, dalla (12):

$$\left.\begin{array}{c} x \geq x_3 \\ \left| \dfrac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} \right| < M. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Chiamiamo con x_4 quello dei due numeri x_2, x_3, che non è minore, tenendo conto della (10), avremo dalla (13):

$$\begin{array}{c} x > x_4 \\ \left| \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \dfrac{M}{1-\delta} \end{array}$$

come appunto volevamo provare.

Osservazione. È facile vedere che, *se la $|f|$ fosse monotona non decrescente, se per la φ fosse soddisfatta la condizione $x > x_2$, $\left| \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} \right| \leq \delta < 1$, se la f' fosse integrabile ed il limite inferiore dei suoi valori assoluti nei punti di un insieme K_1 situati nell'intervallo $(x_s, \dots x_s + d_s)$ $x_s \geq x_0$, $d_s > 0$, non fosse inferiore a quello della $m | \varphi' |$ in quegli stessi punti, si avrebbe:*

$$\begin{array}{c} x > x_4 \\ \left| \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \geq (1-\delta)\, m. \end{array}$$

4. Nel caso in cui nè la f, nè la φ sieno monotone, ma abbiano quella generale tendenza ad aumentare che fu definita al n.° 3, dovremo studiare le relazioni fra le funzioni e le derivate, considerando ed il valore assoluto, ed il segno che esse hanno. Le proprietà che si ricaveranno saranno praticamente meno importanti di quelle date nei numeri precedenti, ma spesso utili per lo studio del quoziente $\frac{f}{\varphi}$. In particolare enuncieremo il teorema, di facilissima dimostrazione:

Teorema 3.° *Le funzioni f, φ, della variabile reale x sieno ad un valore, finite, continue, derivabili, in un intorno $(x_0 \ldots \infty)$, esistano quattro numeri positivi x_1, x_2, δ_1, δ_2, tali che*

$$x > x_2, \qquad \left|\frac{f(x_1)}{f(x)}\right| < \delta_1 < 1, \qquad \left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right| < \delta_2 < 1.$$

Delle due derivate una almeno p. es. la φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita $(x_0 \ldots x)$, e si possano determinare due numeri m, M, tali che, per i punti di un determinato insieme K_1 situati in un intervallo $(x_s, \ldots, x_s + d_s)$ $x_s \geqq x_0$, $d_s > 0$, sia

il limite inferiore della $f' \geqq$ del limite inferiore di $m\varphi'$

» superiore » $\leqq$ » superiore » $M\varphi'$.

Dico che esiste un numero x_3 tale che

$$x > x_3$$

$$(1 - \delta_2)\, m < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{M}{1 - \delta_1}.$$

§ II.

5. I risultamenti conseguiti nel § I permettono di enunciare i teoremi seguenti:

Teorema 1.° *Sieno f, φ, due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, i loro valori assoluti $|f|$, $|\varphi|$, sieno entrambi non decrescenti, i punti dove le derivate f', φ' sono ad un tempo nulle od infinite e quelli*

dove non può essere soddisfatta una relazione della forma:

$$\left.\begin{array}{l} x > x_{m,M} \\ m < \left|\dfrac{f'}{\varphi'}\right| < M \end{array}\right\} \tag{1}$$

$x_{m,M}$, m, M, numeri positivi, costituiscano un insieme discreto Ξ_1 [ξ].

In tutti gli altri punti x dell'intorno $(x_{m,M}, \ldots + \infty)$ $x_{m,M} \geq x_0$, sieno invece soddisfatte le (1) e le f', φ' non sieno insieme nulle od infinite.

Delle due derivate f', φ', una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0 \ldots x)$.

Sarà possibile determinare due numeri positivi, diversi dallo zero μ, ν, ed un terzo numero $x_{\mu,\nu}$ abbastanza grande perchè:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq x_{\mu\nu} \\ \mu\, m < \left|\dfrac{f}{\varphi}\right| < \nu\, M. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Infatti: la condizione $m\,|\varphi'| \leq |f'| \leq M\,|\varphi'|$ è soddisfatta in tutti i punti di un insieme K_1, e sono parimenti soddisfatte tutte le altre richieste per la validità del teor. 1°, § 1°.

Come esempio, proponiamoci di determinare l'ordine di infinito della funzione:

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^2 x \,.\, e^{\cos x}\, d\,x.$$

Paragoniamola perciò con la funzione, infinita del primo ordine:

$$\varphi(x) = x - \operatorname{sen} x \cos x.$$

Le derivate $f'(x) = \operatorname{sen}^2 x\, e^{\cos x}$, $\varphi' = 2 \operatorname{sen}^2 x$ sono insieme nulle in infiniti punti ξ che costituiscono un insieme Ξ_1 certamente discreto, ed in tutti i rimanenti punti $[x]$ dell'intorno $(0 \ldots + \infty)$ è soddisfatta la relazione $\dfrac{1}{2e} < \dfrac{f'}{\varphi'} \leq \dfrac{e}{2}$, ciò basta per assicurarci che la funzione f proposta, è infinita del primo ordine per $x = \infty$.

Teorema 2.° *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x ad un valore, finite, continue, derivabili in tutti i punti di un intorno $(x_0 \ldots \infty)$. Il valore assoluto $|\varphi|$ sia ivi sempre non decrescente.*

La $f(x)$ soddisfi una relazione della forma:

$$\left.\begin{array}{c} x > x_2, \quad x_0 \leq x_1 < x_2, \\ \left|\dfrac{f(x_1)}{f(x)}\right| \leq \delta < 1 \end{array}\right\} \tag{3}$$

dove x_1, x_2, δ sono numeri positivi determinati.

Delle due derivate f', φ', una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0 \ldots x)$, e, fatta tutto al più eccezione dei punti ξ di un insieme discreto Ξ_1, esse non sieno ad un tempo nulle od infinite e soddisfino la relazione:

$$\left.\begin{array}{c} x > x_M \\ \left|\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right| \leq M, \end{array}\right\} \tag{4}$$

M, x_M, numeri positivi determinati.

Esisteranno due numeri positivi ν, x_ν, tali che:

$$x > x_\nu, \qquad \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \nu M. \tag{5}$$

Teorema 3.° *Le funzioni f, φ, della variabile reale x sieno ad un valore, finite, derivabili in un intorno $(x_0, \ldots + \infty)$.*

Esistano quattro numeri positivi x_1, x_2, δ_1, δ_2, tali che si abbia:

$$x > x_2, \qquad \left|\frac{f(x_1)}{f(x)}\right| < \delta_1 < 1, \qquad \left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right| < \delta_2 < 1. \tag{6}$$

Delle due derivate, una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$ e, fatta al più eccezione dai punti di un insieme discreto Ξ_1, non sieno insieme nulle nè infinite e rendano soddisfatta una relazione della forma:

$$x > x_1, \qquad m \leq \frac{f'}{\varphi'} \leq M, \tag{7}$$

m, M, numeri determinati (positivi, nulli, o negativi). Si potrà trovare un numero positivo $x_{\mu,\nu}$, tale che:

$$x > x_{\mu,\nu}, \qquad (1 - \delta_2)\, m \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{M}{1 - \delta_1}. \tag{8}$$

Dimostriamo, per esempio di quest'ultimo teorema, che la funzione:

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^x \cos x \, . \, e^{\cos x - \mathrm{tg}^2 x} (1 + \cos x - x \,\mathrm{tg}\, x)\, d\,x \\ f(+\infty) = \lim_{x = \infty} f(x) \end{cases}$$

non è, per $x = \infty$, infinita di ordine superiore al primo.

Confrontiamola perciò con la funzione

$$\varphi(x) = e^{\cos x} (x + \mathrm{sen}\, x).$$

Le derivate

$$f'(x) = \cos x \, e^{\cos x - \mathrm{tg}^2 x} (1 + \cos x - x \,\mathrm{tg}\, x)$$

$$\varphi'(x) = \cos x \, e^{\cos x} (1 + \cos x - x \,\mathrm{tg}\, x)$$

sono insieme nulle in un insieme discreto di punti, ed in tutti gli altri punti si ha $0 \leqq \frac{f'}{\varphi'} \leqq 1$.

Facilmente si verificano le condizioni richieste dall'enunciato per le funzioni f, φ; e si conclude perciò che esiste un numero positivo L tale che, in tutti i punti di un determinato intorno $(x_L, \ldots \infty)$, si ha $0 \leqq \frac{f}{\varphi} \leqq L$.

6. Osservazione 1.ª Se delle due funzioni f, φ, una almeno è infinita per $x = \infty$, quello dei due numeri $\delta_1 \leqq \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right|$, $\delta_2 = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}$ che gli corrisponde, può farsi, per $x_{\mu,\nu}$ abbastanza grande, tanto piccolo quanto si vuole. Dei due numeri $\mu = (1 - \delta_2)$, $\nu = \frac{1}{1 - \delta_1}$, uno dunque può esser fatto tanto vicino quanto si vuole ad 1, e così dei due numeri $\mu\, m$, $\nu\, M$, fra i quali è compreso il quoziente delle funzioni, uno almeno può farsi tanto prossimo quanto si vuole al corrispondente dei numeri m, M fra i quali è compreso il quoziente delle derivate.

In particolare si ha il teorema:

Teorema 4.° *Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un intorno $(x_0, \ldots + \infty)$, infinite entrambe nel punto $x = \infty$. Delle due derivate f', φ', una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$, ed il loro*

quoziente $\left|\frac{f'}{\varphi'}\right|$ *abbia limite determinato* λ *(finito, nullo od infinito), quando la* x *tende all'infinito percorrendo una successione qualunque* $[x_n]$ *estratta da un insieme* K_1; *nei punti di* K_1 *le derivate medesime non sieno insieme nulle nè infinite.*

Anche se lungo infinite altre successioni $[\xi_n]$, $\left(\lim_{n=\infty} \xi_n = \infty\right)$ *il quoziente* $\left|\frac{f'}{\varphi'}\right|$ *tende ad un limite diverso da* λ, *o non tende a nessun limite; purchè i punti* $[\xi_n]$ *costituiscano, nel loro complesso, un insieme discreto, si può asserire che è*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \tag{9}$$

qualunque sia il modo con cui x *tende all'infinito.*

7. Osservazione 2.ª È importante notare che, nei casi considerati dall'ultimo teorema, *il quoziente delle funzioni e quello delle derivate non hanno in generale la stessa rapidità di tendenza al limite*, nemmeno quando esista anche il limite λ del quoziente delle derivate, indipendente dal modo con cui x tende all'infinito (*).

Per vedere la ragione di questo fatto si consideri che preso un numero positivo arbitrario ε, e trovato un numero x_ε tale che

$$x \geqq x_\varepsilon, \qquad \lambda - \varepsilon \leqq \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \leqq \lambda + \varepsilon, \tag{10}$$

la formula (9) trovata alla pag. 252, ci dà:

$$(\lambda - \varepsilon)(1 - \delta_2) \leqq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leqq (\lambda + \varepsilon) \frac{1}{1 - \delta_1},$$

cioè:

$$\lambda - (\lambda - \varepsilon)\delta_2 - \varepsilon \leqq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leqq \lambda + \frac{(\lambda + \varepsilon)\delta_1}{1 - \delta_1} + \varepsilon.$$

(*) È notevole il fatto che una considerazione così semplice ed ovvia sia finora sfuggita ai geometri, che spesso usano il teorema dell'Hôpital per determinare l'ordine di infinito del quoziente di due funzioni, supponendo che sia noto quello del quoziente delle derivate. Per citare l'esempio più recente, si vedano le *Leçons sur les séries à termes positifs* del Borel (Paris 1902) alle pagg. 45 e 46.

Bisogna ora trovare un numero x'_ε, abbastanza grande *rispetto ad* x_ε, perchè i quozienti $\delta_1 = \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x'_\varepsilon)}$, $\delta_2 = \frac{\varphi(x_\varepsilon)}{\varphi(x'_\varepsilon)}$ soddisfino le due relazioni

$$\frac{(\lambda+\varepsilon)\,\delta_1}{1-\delta_1} < \varepsilon, \qquad (\lambda-\varepsilon)\,\delta_2 < \varepsilon, \tag{11}$$

e prendere $x \geqq x'_\varepsilon$, se si vuole aver la certezza che sia

$$\lambda - 2\,\varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leqq \lambda + 2\,\varepsilon. \tag{12}$$

Al tendere di ε allo zero x_ε tende all'infinito, ed anche, in generale almeno, tende all'infinito il rapporto $\frac{x'_\varepsilon}{x_\varepsilon}$. Sembrerebbe di poter concludere che *il rapporto delle funzioni non tende al limite più rapidamente di quello delle derivate.* Anche tale conclusione però non sarebbe rigorosa perchè, se le condizioni richieste per il numero x'_ε sono sufficienti per la esattezza della (12), non sono però sempre necessarie, ed in particolare la (12) potrebbe anche essere soddisfatta per valori x''_ε di x inferiori a quelli che rendono valida la (10).

A questo proposito si noti che, se la rapidità di convergenza al limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ dovesse essere superiore a quella del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, il numero x''_ε dovrebbe essere in tale relazione col numero x_ε, dianzi definito, da rendere infinitesimo il rapporto

$$\left| \frac{\lambda - \frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)}}{\lambda - \frac{f'(x''_\varepsilon)}{\varphi'(x''_\varepsilon)}} \right|, \tag{13}$$

o, nel caso di $\lambda = +\infty$, da rendere infinito il rapporto

$$\frac{\frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)}}{\frac{f'(x''_\varepsilon)}{\varphi'(x''_\varepsilon)}}. \tag{14}$$

Si verifica subito, nei casi di $\lambda = 0$, o di $\lambda = \infty$, che il rapporto delle funzioni non può essere infinitesimo (infinito) di ordine superiore a quello delle derivate.

Sia per es.

$$\lambda = \lim_{x=\infty} \frac{f}{\varphi} = \lim_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} = 0.$$

Supporremo che la funzione $\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ non sia una di quelle che fanno infinite oscillazioni in tratti arbitrariamente piccoli. Questa condizione del resto è certamente soddisfatta se si ammette la ipotesi che la derivata $\psi'(x)$, sia integrabile in ogni intervallo finito di un determinato intorno dell'infinito. (Dini, *Fondamenti*, pag. 283.) Ciò posto, potremo determinare una successione di segmenti:

$$x_n + h_n, \qquad h_n > 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} x_n = +\infty,$$

tali che sia contemporaneamente:

$$k \leqq h_n, \qquad \frac{f(x_n + k)}{\varphi(x_n + k)} \leqq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \qquad \varphi(x_{n+k}) > \varphi(x_n). \tag{15}$$

Ed infatti, nelle ipotesi poste per le f, φ, nei tratti dove si ha

$$\frac{f(x_n + k)}{\varphi(x_n + k)} \leqq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

non può essere

$$\varphi(x_n + k) = \varphi(x_n)$$

senza che sia anche

$$f(x_n + k) = f(x_n),$$

e ciò è escluso dalle ipotesi che le f e φ sieno monotone e che le f', φ' non possano essere nulle contemporaneamente se non in punti di un insieme discreto.

In tali segmenti si avrà ancora perciò:

$$\frac{f(x_n + k) - f(x_n)}{\varphi(x_n + k) - \varphi(x_n)} \leqq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

cioè:

$$\frac{f'(x_n + \theta k)}{\varphi'(x_n + \theta k)} \leqq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}. \tag{16}$$

Siccome queste diseguaglianze debbono aver luogo per tutti i valori positivi di $k < h_n$, ne dedurremo:

$$\frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)} \leqq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots +\infty),$$

e ciò esclude che sia infinitesimo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{17}$$

nel punto $x = +\infty$.

Il ragionamento fatto vale indipendentemente dalla ipotesi che sia determinato il limite di $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Si consideri ora che, se il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ avesse per $x = +\infty$ limite finito e diverso dallo zero, il quoziente delle derivate dovrebbe tendere allo stesso limite, almeno lungo certe determinate successioni x_n, e perciò il quoziente $\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}$, non potrebbe essere determinato per $x = +\infty$ senza avere ivi il valore 1.

Potremo dunque enunciare il seguente **criterio:**

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ sono entrambe infinite per $x = \infty$, se la espressione $\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ è nel punto $x = \infty$ infinita (infinitesima), il quoziente delle due funzioni $\frac{f}{\varphi}$ non può essere determinato senza essere infinitesimo (infinito).

Questo criterio ha pratica importanza nei casi in cui anche le f', φ' sieno entrambe infinite per $x = \infty$. Per citare un esempio notissimo, fatto $f = e^x$, $\varphi = x^\mu$, il fatto che la (17) è in questo caso infinitesima e che per $x > \mu$. $\psi'(x)$ è positiva, induce alla conclusione che l'ordine di infinito della f è superiore a qualunque numero reale μ.

Non è poi da credere (come sembrerebbe di poter fare leggendo alla prima i trattati di calcolo) *che le funzioni che sono infinite per $x = +\infty$, non possano, in quel punto, aver derivata determinata, se non infinita;* vedremo infatti fra poco, che tutte le funzioni che hanno ordine di infinito inferiore al 1.° non possono avere derivata determinata nel punto $x = +\infty$, se questa non è infinitesima.

§ III.

8. Indicherò con $\Xi_2[\xi]$ o brevemente con Ξ_2 un insieme di punti $[\xi]$ situati nell'intorno $(x_0, \ldots +\infty)$, se il rapporto $\frac{S(x)}{x - x_0}$ fra la estensione esterna della parte di Ξ_2 contenuta nell'intervallo $(x_0, \ldots x)$ e la lunghezza

di questo medesimo intervallo, tende allo zero per $x = \infty$ (*). Indicherò ancora con $K_2[x]$, o semplicemente con K_2 l'insieme dei punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \ldots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti quelli di un insieme Ξ_2.

Mi propongo ora di dimostrare che, introducendo per le f', φ' alcune nuove ipotesi che nei casi ordinari sono sempre verificate, i punti ξ nei quali il quoziente delle derivate può assumere valori arbitrari possono costituire un insieme Ξ_2, cioè anche avere dimensione infinita, senza che il quoziente delle funzioni cessi dall'essere determinato nel punto $x = +\infty$.

Teorema 5.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile x, ad un valore, finita monotona e derivabile in tutti i punti a distanza finita di un intorno $(x_0, \ldots + \infty)$.*

Se ad ogni numero ε positivo assegnato si può far corrispondere un numero x_ε abbastanza grande perchè in un insieme K_2 di punti situati entro l'intorno $(x_\varepsilon, \ldots + \infty)$ sia $|f'(x)| < \varepsilon$,

se esiste un numero positivo M tale che la relazione $|f'(x)| > M$ non possa aver luogo che nei punti di un insieme discreto Ξ_1,

se la $f'(x)$ è integrabile (propriamente od impropriamente) in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$,

potremo determinare due numeri positivi μ, x_μ, tali che sia:

$$x > x_\mu \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon\mu.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$, anche la $f'(x)$ sarà ivi positiva, o nulla. Escludiamo anche il caso che $f(x)$ sia costante in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito. Nel qual caso il teorema è evidente.

Indichiamo con $F(x)$ una funzione che è eguale ad $f'(x)$ nei punti dove questa è $< M$, ed è $= 0$, nei punti dove è $f'(x) > M$. Poichè questi ultimi punti formano un insieme discreto Ξ_1, la estensione esterna di quella parte di Ξ_1 che è contenuta in un intervallo finito qualunque $(x_\varepsilon, \ldots x)$ sarà identicamente nulla: avremo perciò:

$$f(x) - f(x_\varepsilon) = \int_{x_\varepsilon}^{x} f'(x)\, dx = \int_{x_\varepsilon}^{x} F(x)\, dx \text{ (**)}.$$

(*) Cfr. la mia Nota, *Contributo alla teoria degli insiemi*, n.° 10.

(**) Cfr. p. es. E. H. Moore, *Of improper definite integrals*. (Trans. of. the Amer. Math. Soc., Vol. 2, n.° 3, pag. 307, teorema IV (Corollario).)

Dividendo l'intervallo $(x_\varepsilon, \dots x)$ in tratti di lunghezza $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ ed indicando con F_r uno qualunque dei valori che la $F(x)$ assume nel tratto δ_r, avremo ancora

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{\delta_r = 0} \sum \delta_r F_r \,.$$

Per ogni sistema di valori δ_r i termini della somma al secondo membro sono tutti positivi (o nulli). Riunisco insieme quelli che corrispondono a valori $F_r < \varepsilon$, e quelli che corrispondono a valori $F_r > \varepsilon$, minori però sempre, come sappiamo, di M.

Indicando con $S(x)$ l'estensione esterna della parte di Ξ_2 contenuta in $(x_\varepsilon, \dots x)$, avremo immediatamente:

$$x > x_\varepsilon, \qquad f(x) - f(x_\varepsilon) < (x - x_\varepsilon)\,\varepsilon + S(x)\,M.$$

Di qui si ricava

$$x > x_\varepsilon, \qquad \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon + \frac{S(x)}{x - x_\varepsilon} M.$$

Per le ipotesi poste si ha $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{S(x)}{x - x_\varepsilon} = 0$: ad ogni numero $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{M}$ potremo far corrispondere un x_σ abbastanza grande perchè

$$x \geqq x_\sigma, \qquad \frac{S(x)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon,$$

epperò avremo:

$$x > x_\sigma, \qquad \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{x - x_\varepsilon} < 2\,\varepsilon$$

cioè

$$x > x_\sigma, \qquad \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \dfrac{x_\varepsilon}{x}} < 2\,\varepsilon.$$

Fissato un $x_\mu > x_\sigma$ al quale corrisponda un valore diverso dallo zero per la differenza $1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x_\mu)}$, cioè un valore finito μ per il quoziente $\dfrac{1 - \dfrac{x_\varepsilon}{x_\mu}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x_\mu)}}$ avremo in fine

$$x > x_\mu, \qquad \frac{f(x)}{x} < 2\,\mu\varepsilon. \qquad \text{c. d. d.}$$

TEOREMA 6.° *Sieno f, φ, due funzioni della variabile reale x, ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$. La φ sia sempre crescente ed infinita per $x = + \infty$. Le loro derivate sieno atte alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$. Il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1, abbia, nell'intorno considerato, limite superiore finito, ed, almeno per i punti di un insieme K_2, situato in un determinato intorno $(x_\varepsilon, \ldots + \infty)$, si mantenga inferiore ad un numero positivo arbitrario ε.*

Ciò basta per poterne concludere: $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Se poniamo infatti $z = \varphi(x)$, stabiliremo fra i punti dell'intorno $(x_0, \ldots \infty)$ e quelli dell'intorno $(z_0 = \varphi(x_0), \ldots + \infty)$ una corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, e potremo applicare le conclusioni trovate ai n.i 18, 19, 20, della mia Nota: *Contributo alla teoria degli insiemi.* In particolare, ad un insieme discreto di punti $\Xi_1(\xi)$ dell'intorno $(x_0, \ldots \infty)$ corrisponderà un insieme discreto dell'intorno $(z_0, \ldots \infty)$, e ad un insieme $K_2[x]$, corrisponderà ancora un insieme $K_2[z]$. Ora, ricavando dalla $z = \varphi(x)$ la funzione inversa $x = \psi(z)$, questa sarà ancora sempre crescente ed infinita per $x = + \infty$, avremo dunque:

$$f(x) = f(\psi(z)) = F(z); \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F(z)}{z}, \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = F'(z).$$

Applicando alla $F(z)$ il teorema precedente, si avrà infine:

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{z} = 0, \quad \text{cioè ancora:} \quad \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

COROLLARIO. *Sieno f, φ, funzioni della variabile reale x ad un valore, finite, derivabili in tutti i punti a distanza finita dell'intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, le derivate f', φ' sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$, il loro quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1 non abbia limite superiore infinito ed, almeno quando x va all'infinito lungo successioni estratte da un insieme K_2, si abbia $\lim \frac{f'}{\varphi'} = \lambda$; λ finito e diverso dallo zero. Se oltre a ciò la funzione φ va all'infinito sempre crescendo per $x = + \infty$, e la funzione $F = f - \lambda\varphi$ è monotona in un determinato intorno dell'infinito; ciò basterà per concludere che è $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda$.*

La dimostrazione si fa applicando il teorema precedente alle funzioni F, φ.

Se si considera che, nei punti di K_2, si ha $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\varphi'}{f'} = \frac{1}{\lambda}$; si vede facilmente che il teorema si può applicare tutte le volte che delle due funzioni f, φ, *una almeno* vada all'infinito sempre crescendo.

Teorema 7.° *Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x, ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili in tutto l'intorno $(x_0, \ldots +\infty)$. La f sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. Le loro derivate f', φ' sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$. Il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1, non abbia limite inferiore nullo ed, almeno nei punti di un insieme K_2 contenuti nell'intorno $(x_M, \ldots +\infty)$ si mantenga superiore a qualunque numero positivo M. Ciò basterà per poterne concludere*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Le condizioni che, in forza di questi ultimi teoremi, sono sufficienti per la esistenza del $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sono molto generali.

Il quoziente delle derivate può assumere valori arbitrari in infiniti punti ξ, *si domanda solo che il rapporto fra la estensione esterna dell'insieme di questi punti ξ contenuti in un intervallo $(x_0, \ldots x)$, e la lunghezza dell'intervallo stesso, sia infinitesimo per $x = \infty$.*

Vedremo fra poco che queste condizioni sono anche necessarie perchè sia nullo (od infinito) il $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

§ IV.

9. Ci siamo fino ad ora specialmente occupati di funzioni non decrescenti, ed in particolare di quelle che sono infinite per $x = \infty$.

Analoghi risultamenti si hanno per le funzioni *non crescenti.* Queste hanno

sempre limiti determinati e finiti (o nulli) per $x=\infty$. Se è $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=\alpha$, e poniamo $F=f(x)-\alpha$, la F sarà una funzione positiva, monotona, tendente allo zero, e nel caso che la $f(x)$ sia derivabile la F avrà in ogni punto la stessa derivata della f.

Possiamo dunque limitarci al caso di funzioni positive, monotone, infinitesime per $x=\infty$.

Non intendo dilungarmi su questo argomento, mi limiterò anzi ad un cenno della dimostrazione del seguente teorema che servirà a far risaltare alcune differenze, del resto poco notevoli, che si riscontrano.

Teorema 8.° *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x, ad un valore, monotone, positive, derivabili in tutti i punti dell'intorno $(x_0, \ldots +\infty)$, infinitesime per $x=+\infty$. Una almeno delle due derivate, per es. la φ', sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$. Esistano due numeri m, M positivi ed un numero $x_{m,M}$, abbastanza grande perchè, fatta al più eccezione dai punti di un insieme discreto $\Xi_1\,[\xi]$, si abbia:*

$$x \geqq x_{m,M}, \qquad m\,|\varphi'| \leqq |f'| \leqq M\,|\varphi'|.$$

Ciò basterà per poterne concludere:

$$x > x_{m,M} \qquad m \leqq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leqq M. \tag{19}$$

Basta infatti, analogamente a quanto s'è fatto pel teorema 1.°, notare che dalle condizioni proposte si ricava

$$x > x_1 \qquad x_1 \geqq x_{m,M}, \qquad m \leqq \frac{f(x)-f(x_1)}{\varphi(x)-\varphi(x_1)} \leqq M,$$

cioè

$$x > x_1, \qquad x_1 \geqq x_{m,M} \qquad m \leqq \frac{1-\dfrac{f(x)}{f(x_1)}}{1-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}} \cdot \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \leqq M.$$

Si può ora prendere x abbastanza grande, rispetto ad x_1, perchè i quozienti $\frac{f(x)}{f(x_1)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}$ sieno minori di qualunque quantità positiva, dunque rimane

$$x_1 \geqq x_{m,M}, \qquad m \leqq \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \leqq M. \qquad \text{c. d. d.}$$

10. Osservazione. È bene notare che, se le derivate f', φ' non sono nulle od infinite contemporaneamente se non nei punti di un insieme discreto, il quoziente delle funzioni è contenuto fra gli stessi limiti di quello delle derivate, e per punti dello stesso intorno $(x_{m,M}, \ldots \infty)$.

Se dunque il quoziente delle derivate ha limite determinato λ (finito, nullo od infinito) quello delle funzioni tende allo stesso limite con rapidità non minore.

Ciò a distinzione del fatto, a suo luogo accertato, che ha luogo per i quozienti di funzioni infinite per $x = \infty$.

Nel caso presente, di funzioni cioè infinitesime per $x = +\infty$, monotone in un determinato intorno $(x_0, \ldots +\infty)$; avremo che: *Se il quoziente* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *è infinito (infinitesimo) per $x = +\infty$, la espressione* $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)$ *non può essere infinitesima (infinita). Se il quoziente* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *ha limite finito e diverso dallo zero, la espressione* $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)$, *se è determinata, tende ad 1 per* $x = \infty$.

Si ricava di qui il seguente criterio:

Se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ *è infinita (infinitesima) per $x = \infty$, il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *delle due funzioni f, φ, infinitesime entrambe per $x = \infty$, non può essere determinato senza essere anch'esso infinito (infinitesimo).*

Questo criterio ha importanza pratica per il fatto che la derivata di una funzione infinitesima per $x = \infty$, non può essere determinata nel punto $x = \infty$, senza esser ivi infinitesima, e perciò il quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ ha sempre la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, mentre che la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ può essere in molti casi determinata.

§ V.

11. I teoremi seguenti hanno per iscopo di stabilire delle condizioni *necessarie* per la esistenza del $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Accostando i risultamenti che troveremo a quelli conseguiti nei § precedenti, ne risulteranno in taluni casi molto importanti, le condizioni necessarie e sufficienti per la validità del criterio dell' Hôpital.

Teorema 9.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, monotona, finita, continua, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0, \ldots + \infty)$. Esista un numero positivo λ a cui si possa far corrispondere un numero $x_\lambda \geq x_0$ tale che:*

$$x > x_\lambda, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \lambda. \tag{20}$$

La derivata $f'(x)$ sia inoltre atta alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo $(x_0, \ldots x)$.

Dico che esiste un numero finito e diverso dallo zero μ, a cui si può coordinare un x_μ abbastanza grande perchè la condizione:

$$|f'(x)| < \mu\lambda, \tag{21}$$

sia soddisfatta almeno in tutti i punti di un insieme K_2 situato nell'intorno $(x_\mu, \ldots \infty)$.

È facile vedere che la condizione (21) finisce coll'esser soddisfatta per tutti i termini x_n che hanno indice abbastanza grande, di infinite successioni tendenti all'infinito (*).

Consideriamo ora l'insieme $[\xi]$ dei punti ξ, nei quali essa può non essere soddisfatta. Dico che questo insieme è uno di quelli che nei § precedenti furono indicati con Ξ_2.

Sia $x_\mu = x_1, x_2, x_3, \ldots$, una successione che tende all'infinito sempre crescendo, e supponiamo che x_n non sia, per $n = \infty$, infinita di ordine su-

(*) Cfr. p. es., Stolz, loc. cit., D. B. Reymond: *Ueber den Satz* $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$, (Mat. Ann. XVI, pag. 550).

periore al primo: cioè che esista un numero positivo ν, ed un indice n_ν abbastanza grande perchè sia:

$$n > n_\nu\,, \qquad \frac{n}{x_{n+1}} > \nu. \tag{22}$$

Indichiamo con $\delta_{1n}, \delta_{2n}, \delta_{3n}, \ldots$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) i limiti inferiori degli intervalletti situati nel segmento $(x_n, \ldots x_{n+1})$ e che contengono punti, o punti limiti dell'insieme $[\xi]$.

Entro qualunque tratticello $\delta_{r,sn}$, che faccia parte di uno degli intervalletti δ_{sn}, deve essere dunque situato almeno uno dei punti ξ in cui si ha

$$|f'(\xi)| > \lambda_1 \qquad (\lambda_1 \text{ positivo, scelto prima a piacere}). \tag{23}$$

Tenendo conto della integrabilità della f' e del fatto che essa ha sempre il medesimo segno in tutti i punti, dove non è nulla, dell'intervallo $(x_n, \ldots x_{n+1})$, avremo perciò:

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| > \lambda_1 \sum \delta_{sn}\,. \tag{24}$$

Poniamo ora che la somma $S_n = \sum \delta_{sn}$, che rappresenta la dimensione esterna della parte di $[\xi]$ contenuta in $(x_n, \ldots x_{n+1})$ si mantenga superiore ad un numero σ indipendente da n. Ricordando che la $f(x)$ è monotona, avremo dalla (24):

$$|f(x_{n+1}) - f(x_1)| > n\,\sigma\,\lambda_1$$

e, per la (22)

$$|f(x_{n+1}) - f(x_1)| > x_{n+1}\,\nu\,\sigma\,\lambda_1\,,$$

cioè

$$\left|\frac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}}\right| > \nu\,\sigma\,\lambda_1 - \frac{f(x_1)}{x_{n+1}}\,. \tag{25}$$

Ma, al crescere di n, il quoziente $\dfrac{f(x_1)}{x_{n+1}}$ tende allo zero, potremo dunque determinare due numeri positivi ν_1, N, tali che

$$n \geq N, \qquad \left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| > \nu_1\,\sigma\,\lambda_1. \tag{26}$$

Supposto ora $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{\nu_1\,\sigma}$, ne viene:

$$x_n \geq x_N\,, \qquad \left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| > \lambda,$$

in contraddizione con la (20).

Se poniamo $\mu = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, vediamo dunque che le dimensioni esterne S_n degli insiemi di punti ξ, che possono fare eccezione alla (21) e sono situati negli intervalli $(x_n, \ldots x_{n+1})$, dove x_n è una successione sempre crescente infinita, per $n = \infty$ di ordine non superiore al primo, divengono infinitesime per $n = \infty$.

Tutti i punti $[\xi]$ costituiscono quindi un insieme Ξ_2 (*) come appunto volevamo provare.

In particolare: *Se* $\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ *è infinitesima, per* $x = \infty$, *cioè se* $|f(x)|$ *è infinita di ordine inferiore al primo, la derivata* $f'(x)$ *è infinitesima, per* x *che tende all'infinito lungo qualunque successione* x_n *estratta da un insieme* K_2.

12. Ricordando il teorema 5.° potremo concludere:

Teorema 10.° *Sia* $f(x)$ *una funzione della variabile* x, *ad un valore, finita, continua, derivabile, monotona in tutti i punti di un determinato intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$.

La sua derivata sia atta alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo finito $(x_0, \ldots x)$, *ed, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto, abbia, nell'intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$, *limite superiore finito.*

Condizione **necessaria e sufficiente** *perchè sia*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

cioè perchè la funzione data sia infinita di ordine inferiore al primo, per $x = + \infty$, *si è che il rapporto fra la dimensione esterna dell'insieme* $[\xi]$ *dei punti contenuti in un intervallo* $(x_\varepsilon, \ldots x)$ *e nei quali la* $f'(x)$ *non può essere in valore assoluto minore del numero positivo* ε *scelto a piacere, alla dimensione dell'insieme* $[x]$ *di quei punti dove invece è* $|f'(x)| < \varepsilon$, *tenda allo zero, col crescere indefinito di* x.

13. Teorema 11.° *Sia* φ *una funzione della variabile reale* x, *ad un valore, finita, continua, derivabile, sempre crescente in tutti i punti dell'in-*

(*) Cfr. il n.° 9 della mia Nota, *Contributo alla teoria degli insiemi.*

torno $(x_0, \ldots \infty)$, *e sia infinita nel punto* $x = \infty$. *Sia* $f(x)$ *una funzione monotona, finita, continua, derivabile nei punti di quel medesimo intorno e la sua derivata sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito* $(x_0, \ldots \infty)$. *Esistano due numeri positivi* λ, x_λ, *tali che*

$$x > x_\lambda, \qquad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \lambda.$$

Dico che la relazione $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} < \mu \lambda$, μ *positivo determinato, ha luogo in tutti i punti di un insieme* K_2 *contenuto in un determinato intorno* $(x_\mu, \ldots \infty)$.

La dimostrazione non offre difficoltà ed è analoga a quella fatta per il teorema 6.°

Così pure tralasciamo la dimostrazione del teorema seguente:

Teorema 12.° *Se* $|f|$ *e* $|\varphi|$ *sono funzioni della variabile reale* x, *ad un valore, sempre crescenti, finite, continue, derivabili in tutti i punti a distanza finita di un intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$, *infinite entrambe per* $x = +\infty$. *Se le loro derivate sono atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito* $(x_0, \ldots x)$.

Se ha luogo la relazione:

$$x > x_0 \qquad m \leqq \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \leqq M,$$

esisteranno due numeri positivi μ, ν, *ed un numero* $x_{\mu\nu}$ *abbastanza grande perchè in tutti i punti di un insieme* K_2 *contenuto nell'intorno* $(x_{\mu\nu}, \ldots \infty)$ *sia soddisfatta la relazione*

$$\mu\, m \leqq \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \leqq \nu M.$$

In particolare: *Se il quoziente* $\dfrac{f}{\varphi}$, *ha, per* $x = +\infty$, *limite determinato (finito od infinito), quello delle derivate, tende, almeno lungo infinite successioni estratte in modo qualunque da un insieme* K_2, *a quel medesimo limite.*

Ricordando i teoremi 6.° e 7.° potremo in fine enunciare i teoremi:

Teorema 13.° *Sieno* f *e* φ *due funzioni della variabile reale* x, *ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili nell'intorno* $(x_0, \ldots \infty)$. *La* φ *(la* f*)*

inoltre sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. *Il quoziente delle loro derivate non possa avere limite superiore infinito (limite inferiore nullo) se non, tutt'al più, nei punti di un insieme discreto; le derivate medesime sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito* $(x_0, \ldots x)$. *Dico che,* **condizione necessaria e sufficiente,** *perchè l'ordine di infinito della* f *sia inferiore (superiore) a quello della* φ, *si è che, ad ogni numero positivo* ε *piccolo ad arbitrio, (grande quanto si vuole) possa coordinarsi un numero* x_ε *tale che il rapporto fra la estensione esterna dell'insieme dei punti* $[x]$ *situati nell'intervallo* $(x_\varepsilon, \ldots x)$ *pei quali è soddisfatta la relazione* $\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right| < \varepsilon \left(\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right| > \varepsilon\right)$ *alla estensione dell'insieme dei punti* $[\xi]$ *in cui quella relazione non può essere soddisfatta, tenda all'infinito insieme ad* x.

Osservazione. Il teorema 12, insieme col corollario del teor. 6°, non possono senz'altro fornirci le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza del limite λ, *finito e diverso dallo zero*; pel quoziente $\frac{f}{\varphi}$. Invero: la condizione di essere monotona, per la $F = f - \lambda\varphi$, è stata trovata sufficiente, ma non risulta come necessaria dalle dimostrazioni fatte.

§ VI.

Lo studio del comportamento assintotico della *derivata logaritmica*, che fu già dal Du Bois Reymond posto a base della classificazione delle funzioni secondo l'ordine di infinito (*), ha assunto in questi ultimi tempi importanza specialissima per tutte le quistioni riguardanti il calcolo infinitario.

Non sembrerà quindi inopportuno che io qui accenni alle applicazioni che trovano, in questo campo, alcuni dei teoremi stabiliti nei §§ precedenti.

14. Per conservare le notazioni usate precedentemente, indicherò con Ξ_2 un insieme di punti $[\xi]$ appartenenti ad un intorno $(x_0, \ldots +\infty)$, se il rapporto fra la estensione esterna della parte di Ξ_2 contenuta nell'intervallo $(x_0, \ldots x)$ alla lunghezza $x - x_0$ dell'intervallo stesso, è infinitesimo per $x = \infty$.

(*) Questi *Annali*, Serie II, Vol. IV, pag. 338-393 (1870).

Indicherò con K_2 l'insieme dei punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \ldots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti i punti $[\xi]$.

15. Teorema 1.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, finita, continua, monotona e che ha derivata atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito di un determinato intorno $(x_0, \ldots + \infty)$.*

Dico che, se essa soddisfa la condizione

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1, \tag{1}$$

la sua derivata logaritmica è infinitesima per x che tende all'infinito lungo infinite successioni ξ_n che costituiscono nel loro complesso un insieme egualmente denso nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$, e che:

ad ogni numero positivo ε se ne può coordinare uno x_ε abbastanza grande perchè, in tutti i punti $[x]$ di un insieme K_2 contenuto in $(x_\varepsilon, \ldots \infty)$, sia soddisfatta la relazione:

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ci limiteremo, per maggior semplicità, a funzioni $f(x)$ positive non decrescenti.

Facilmente si vede che, per qualunque numero h positivo anche variabile con x ma non avente limite superiore infinito, si ha, per le ipotesi poste:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 1. \tag{1'}$$

Scriviamo poi:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(\xi_{x,h}) \qquad x \leqq \xi_{x,h} \leqq x + h,$$

Di qui si ricava

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = 1 + h \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \cdot \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)}. \tag{3}$$

Dalla (1') si deduce che, ad ogni coppia di numeri h, σ, positivi arbitrari, si può coordinare un numero $x_{h,\sigma}$, abbastanza grande perchè

$$x > x_{h,\sigma}, \qquad 1 \leqq \frac{f(x+h)}{f(x)} \leqq 1 + \sigma.$$

Dalle (3) perciò ricaveremo:

$$x > x_{h,\sigma}, \qquad h \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \cdot \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} < \sigma, \qquad x \leqq \xi_{x,h} \leqq x + h.$$

Ma si ha $\frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} \geqq 1$, dunque, posto $\frac{\sigma}{h} = \varepsilon$, $x_{h,\sigma} = x_\varepsilon$, si ha

$$x > x_\varepsilon, \qquad \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon, \qquad x \leqq \xi_{x,h} \leqq x + h. \tag{4}$$

Poichè, ad ogni coppia x, h, corrisponde un numero $\xi_{x,h}$ situato fra x, ed $x + h$, così la (4) prova la prima parte del teorema.

Dico ora che *non è possibile che esistano due numeri positivi* η, δ, *ai quali si possa coordinare un numero M abbastanza grande, perchè, avendo scelto a piacere un valore x_1 dell'intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, se ne trovi poi un altro almeno $x_2 > x_1$ tale, che l'insieme dei punti ξ situati nell'intervallo $(x_2, x_2 + M)$ e per i quali si può soddisfare la condizione:*

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \geqq \delta, \tag{5}$$

abbia estensione esterna non minore di η.

Dato che un tale intervallo esista, poichè, per le ipotesi poste, le funzioni $f'(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$, sono entrambe integrabili, ed è inoltre:

$$x \geqq x_2, \qquad \frac{f'(x)}{f(x_2)} \geqq \frac{f'(x)}{f(x)} \geqq 0, \tag{6}$$

avremo:

$$f(x_2 + M) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_2+M} f'(x)\,dx,$$

$$\frac{f(x_2 + M)}{f(x_2)} - 1 = \int_{x_2}^{x_2+M} \frac{f'(x)}{f(x_2)}\,dx \geqq \int_{x_2}^{x_2+M} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx,$$

e, per la (5), e per la ipotesi posta sulla estensione esterna dell'insieme $[\xi]$,

$$\frac{f(x_2 + M)}{f(x_2)} - 1 \geqq \eta\,\delta.$$

Ciò dovendo accadere per valori x_2 grandi a piacere, contraddice l'ipotesi

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x + M)}{f(x)} = 1.$$

Si vede dunque che l'insieme dei punti $[\xi]$, dove la (2) può non essere soddisfatta, gode della proprietà che la estensione esterna di quella sua parte

che è contenuta in un intervallo $(x \ldots x+M)$ di ampiezza finita, diventa infinitesima col crescere indefinito di x. L'insieme $[\xi]$ è perciò (*) un insieme Ξ_2, e quello dei punti dove invece la (2) è soddisfatta è un insieme K_2. c. d. d.

16. Teorema 2.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, finita, continua, monotona e che ammette derivata atta alla integrazione definita in qualunque intervallo finito dell'intorno $(x_0 \ldots +\infty)$.*

Ad ogni numero ε positivo, se ne possa coordinare uno x_ε abbastanza grande perchè la relazione:

$$\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right| < \varepsilon \tag{7}$$

sia soddisfatta nei punti $[\xi]$ di un insieme denso egualmente nell'intorno $(x_\varepsilon \ldots +\infty)$.

Dico che si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1. \tag{8}$$

Preso infatti un numero $x > x_\varepsilon$, dividiamo l'intervallo $(x, \ldots x+1)$ in un numero arbitrario di tratti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

Entro ogni tratto δ_r si dovranno poter trovare punti nei quali è soddisfatta la (7).

Indichiamo con ξ_r uno di tali punti.

Per la integrabilità della $f'(x)$, avremo:

$$f(x+1) - f(x) = \lim \sum \delta_r f'(\xi_r). \tag{9}$$

Possiamo sempre supporre x_ε abbastanza grande perchè la $f(x)$ non cambi segno, e quindi non si annulli mai, nell'intorno $(x_\varepsilon, \ldots +\infty)$. Ivi è dunque integrabile anche la funzione $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente: avremo allora:

$$\xi_r \leq x+1, \qquad \frac{f'(\xi_r)}{f(x+1)} \leq \frac{f'(\xi_r)}{f(\xi_r)} < \varepsilon,$$

(*) Cfr. il n.° 9 del mio *Contributo alla teoria degli insiemi.*

epperò, dalle (9) si ha:

$$x \geqq x_\varepsilon, \qquad 1 - \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim \sum \delta_r \frac{f'(\xi_r)}{f(x+1)} \leqq \lim \sum \delta_r \frac{f'(\xi_r)}{f(\xi_r)} < \varepsilon \quad (10)$$

e ciò prova l'asserto.

17. Accostando questo teorema al precedente, si vede che la condizione $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} < \varepsilon$, che pel teor. 1.° è necessaria e per il teorema 2.° sufficiente, affinchè si abbia $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, non è dai due enunciati richiesta per gli stessi insiemi di punti. E cioè: i punti nei quali deve essere soddisfatta la condizione necessaria costituiscono un insieme non necessariamente denso in ogni punto dell'intorno in cui esso è situato, ciò è sempre richiesto invece dal secondo teorema.

Per giungere ad una condizione necessaria e sufficiente basterebbe provare che l'insieme $K_2(x)$ di cui si è fatto parola al teor. 1.° è denso egualmente in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito.

È bene di non confondere il complesso di tutti i termini $\xi_{x,h}$ delle successioni lungo le quali si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} = 0, \tag{11}$$

con l'insieme dei punti pei quali è

$$\frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon. \tag{12}$$

Fissato un ε, ad ogni valore di h corrisponde un valore $x_{\varepsilon,h}$ tale che

$$x > x_{\varepsilon,h}, \qquad x \leqq \xi_{x,h} \leqq x + h, \qquad \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon,$$

ma, non si può escludere che, al tendere di h allo zero $x_{\varepsilon,h}$ non tenda all'infinito, e così non si può asserire che, entro un determinato intorno dell'infinito, i valori che fanno parte di successioni lungo le quali è soddisfatta la (11) soddisfino anche tutti la (12).

Quella convergenza uniforme che occorrerebbe richiedere, ha sicuramente luogo quando si tratti di funzioni che hanno derivata logaritmica determi-

nata nel punto $x=\infty$; poichè, in forza delle (11), il limite: $\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ non può esistere senza essere nullo.

Si può aggiungere ancora che:

il teorema fondamentale della mia Memoria: *Sulla Determinazione dell'ordine di infinito*, vale, per le funzioni che hanno *derivata logaritmica determinata per $x=+\infty$, indipendentemente dalle ipotesi che la derivata ordinaria $f'(x)$, sia integrabile in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$ e che sia determinata per $x=+\infty$.*

Dimostrerò infatti il teorema seguente:

Teorema 3.° *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ della variabile reale x, ad un valore, finita, continua, monotona, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots +\infty)$ e che ammette derivata logaritmica determinata anche nel punto $x=+\infty$, soddisfi la condizione*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}=1,$$

è che la sua derivata logaritmica sia infinitesima per $x=\infty$.

La formula (4) trovata al teor. (1), senza aver ricorso alla supposta integrabilità della $f'(x)$, dimostra appunto che *la condizione è necessaria.*

Veniamo alla seconda parte: *La condizione è sufficiente.* Questa, che nel mio lavoro più volte citato, *Sulla determinazione, ecc.*, ha l'importanza maggiore, si trova ivi dimostrata in tre diversi modi. Mi permetto di riportare qui la terza dimostrazione perchè è semplicissima ed ha la massima generalità.

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente, e vediamo se è possibile che lungo una successione x_n di punti tendenti all'infinito, sia sempre

$$\frac{f(x_n+1)}{f(x_n)}>\delta, \quad \delta>1. \tag{13}$$

Si ha intanto:

$$f(x_n+1)=f(x_n)+f'(\xi_n), \qquad x_n \leq \xi_n \leq x_n+1,$$

$$\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)}=\frac{f(x_n+1)}{f(\xi_n)}-\frac{f(x_n)}{f(\xi_n)}=\frac{\frac{f(x_n+1)}{f(x_n)}-1}{\frac{f(\xi_n)}{f(x_n)}}. \tag{14}$$

Se poniamo:

$$\frac{f(x_n+1)}{f(x_n)} = M_n, \qquad \frac{f(\xi_n)}{f(x_n)} = m_n, \tag{15}$$

abbiamo:

$$1 \leqq m_n \leqq M_n, \tag{16}$$

e perciò, tenendo conto delle (15) e (13), si ha dalla 14:

$$\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)} = \frac{M_n - 1}{m_n} \geqq \frac{M_n - 1}{M_n} = 1 - \frac{1}{M_n} > 1 - \frac{1}{\delta}. \tag{17}$$

Poichè δ è una quantità costante > 1, la (17) ci dice che non è possibile che la derivata logaritmica sia infinitesima per $x = \infty$.

18. Se, come è supposto nella mia Memoria, ci si limita alla considerazione di quelle funzioni che sono finite, continue, monotone, derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, e che hanno derivata logaritmica determinata nel punto $x = +\infty$, e si dicono appartenere alla prima classe quelle per le quali è soddisfatta la condizione $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, potremo, analogamente a quanto ivi è detto nel *Teorema fondamentale*, concludere: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione appartenga alla prima classe, si è che abbia derivata logaritmica infinitesima per* $x = +\infty$.

19. Osservazione I. La condizione di *avere derivata logaritmica determinata*, che noi abbiamo imposto alle funzioni della prima classe, limita, più di quel che occorra, la utilità pratica del teorema fondamentale.

Vi sono infatti funzioni per le quali può dirsi che una tale condizione è conseguenza necessaria del fatto $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Per vedere, con maggiore chiarezza, le ragioni di questa cosa, escludo i punti x dove è $f'(x) = 0$, nei quali la derivata logaritmica è identicamente nulla. Ricordando che la $f(x)$ è monotona, verrò così ad escludere anche che sia $f'(\xi_{x,h}) = 0$ e potrò scrivere:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} \, \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \, \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)}.$$

Di qui, essendo

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} = 1,$$

deduco:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})}.$$

Ora, per le formule (4), si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} = 0.$$

D'altra parte, per ogni valore di x, si ha

$$\lim_{h=0} f'(\xi_{x,h}) = f'(x),$$

cioè, preso un numero positivo M maggiore di 1, si può ad ogni valore di x far corrispondere un H_x tale che

$$h \leq H_x, \qquad \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} < M, \qquad x \leq \xi_{x,h} \leq x + h.$$

Ogniqualvolta adunque *esista un valore positivo M con la proprietà espressa dalle formule precedenti, e le H_x corrispondenti abbiano limite inferiore H maggiore di zero*, fatto $h < H$, in tutte le formule precedenti, ne verrà

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

e la derivata logaritmica sarà veramente infinitesima, in conseguenza della ipotesi $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Tale conclusione potrà essere erronea solo quando sia $H = 0$.

Si osservi però che, in questo caso, ad ogni coppia di numeri positivi h, M, deve potersi coordinare un numero positivo x_h abbastanza grande perchè, in ogni intorno $(x, \ldots, +\infty)$, $x > x_h$, esista almeno un punto x' con la proprietà:

$$\frac{f'(x')}{f'(\xi_{x',h})} > M, \qquad x' \leq \xi_{x',h} \leq x' + h.$$

Se ora consideriamo che h può essere scelto piccolo a piacere ed M arbitrariamente grande, e che d'altra parte in ogni punto x' si ha sempre

$$\lim_{h=0} \frac{f'(x')}{f'(\xi_{x',h})} = 1,$$

si vede che, se la $f'(x)$ non è infinitesima almeno lungo determinate suc-

cessioni di valori x tendenti all'infinito, *non è possibile che essa soddisfi la condizione seguente:*

Esista un numero positivo δ *al quale si possa coordinare un numero* h *positivo tale, che, entro ogni tratto di ampiezza minore od eguale ad* h, *di un determinato intorno dell'infinito, la oscillazione della funzione* $f'(x)$ *sia minore di* δ.

In particolare si vede che:

Se per una funzione della variabile reale x, *ad un valore, monotona e derivabile in ogni intorno dell'infinito, è soddisfatta la relazione*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

se la derivata logaritmica $\frac{f'(x)}{f(x)}$ *non è infinitesima nel punto* $x = +\infty$, *e la derivata ordinaria* $f'(x)$, *è ivi determinata, senza essere infinitesima, questa stessa derivata non può essere continua uniformemente in un determinato intorno dell'infinito.*

Tenendo conto del fatto che le funzioni con cui più di frequente s'ha che fare nel calcolo infinitario, hanno sempre derivata uniformemente continua in un intorno determinato dell'infinito ed infinita per $x = +\infty$, tornerà utile il seguente teorema:

Teorema 4.° *Se una funzione della variabile reale x, ad un valore, monotona e derivabile in un determinato intorno dell'infinito, soddisfa la condizione* $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, *se la sua derivata ordinaria* $f'(x)$ *è continua uniformemente in un determinato intorno dell'infinito ed è determinata nel punto* $x = +\infty$, *senza essere ivi infinitesima; ciò basterà per concludere*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

Si noti, a questo proposito, che, da un noto teorema del prof. C. Arzelà (Cfr. *Sulle serie di funzioni.* Mem. Acc. di Bologna, anno 1899, pag. 135) si deduce subito che, per ogni segmento finito $(x_0, \ldots x)$ ad ogni numero positivo ε, può coordinarsi un numero positivo h abbastanza piccolo perchè la

somma dei segmenti $\delta_{h,s}$ nei quali non è:

$$|f'(x) - f'(\xi_{x,h})| < \varepsilon$$

sia tanto piccola quanto si vuole.

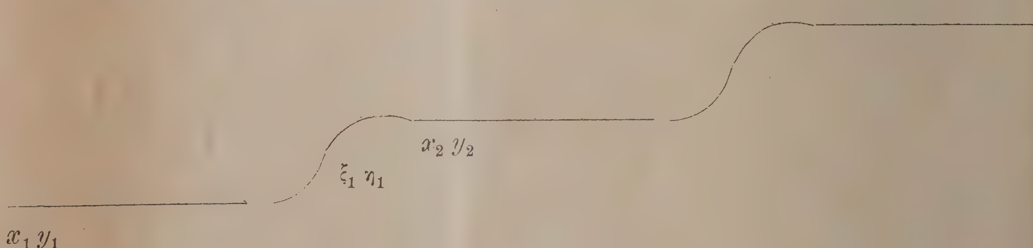
Ciò può servire di conferma a quanto fu dimostrato al teorema 1.° di questo §.

20. Osservazione II. Taluno che ha fama meritata di geometra illustre e che è in questo genere di quistioni specialmente versato, mi ha invitato ad esaminare con maggiore profondità l'importante argomento trattato nelle pagine precedenti, per vedere: se alcune delle condizioni espresse negli enunciati dei teoremi 1.° e 4.° non fossero nel fatto superflue, e non vi apparissero se non per la necessità di rendere rigoroso il ragionamento.

In particolare: esaminare (in relazione al Teor. 4.°) se non fosse sufficiente, per la derivata $f'(x)$, la condizione di essere finita e continua in ogni punto a distanza finita.

Ora non è difficile citare l'esempio di una funzione monotona, finita, derivabile in ogni intorno dell'infinito, finita anche nel punto $x = +\infty$, e quindi tale da rendere soddisfatta la relazione $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, la cui derivata è pure finita e continua in ogni punto a distanza finita, ma, lungo certe successioni ξ_n, è infinita nel punto $x = +\infty$.

Tale è la funzione rappresentata dalla curva



tracciata al modo seguente:

Indichiamo con h ed r due dati numeri positivi, e con p un numero maggiore di 1.

Consideriamo poi le successioni:

$$\begin{cases} r_n = \dfrac{r}{n^p} \\ \varphi_n = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots \infty). \end{cases}$$

Partendo ora da un punto qualunque del piano xy, che chiameremo (x_1, y_1) tracciamo un segmento $\{(x_1, y_1) - (x_1 + h, y_1)\}$ parallelo all'asse delle x.

Nel termine $(x_1 + h, y_1)$ tracciamo un arco di cerchio tangente a quel segmento, con raggio r_1, centro nel punto $(x_1 + h, y_1 + r_1)$, ed ampiezza φ_1.

Il termine di questo arco, avrà per coordinate,

$$\xi_1 = x_1 + h + r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 ; \qquad \eta_1 = y_1 + r_1 (1 - \cos \varphi_1).$$

In questo punto si continui la curva con un secondo arco eguale e tangente al primo, ma con la concavità rivolta verso l'asse delle x.

Chiamando con x_2, y_2 le coordinate del termine di questo arco, conduco in questo punto un segmento di lunghezza h parallelo all'asse delle x, continuo la curva con due archi tracciati in modo analogo ai precedenti ma con raggio r_2, ed ampiezza φ_2. Proseguo così indefinitamente.

Le ordinate y_n della curva tracciata, non crescono più rapidamente delle somme S_n della serie $\Sigma \frac{1}{n^p}$, epperò la funzione rappresentata da quella curva (evidentemente monotona e continua) è finita per $x = +\infty$.

La tangente varia con continuità, non è mai perpendicolare all'asse x, ma, nei punti di ascisse ξ_n, fa angoli φ_n che tendono al limite $\frac{\pi}{2}$.

La derivata, lungo la successione, ξ_n è dunque infinita, per $n = +\infty$ ed il rapporto $\frac{y'}{y}$ non può essere infinitesimo.

Con una lieve modificazione si costruisce una funzione *sempre crescente*, che conserva la medesima proprietà.

Basterà p. es. dare ai segmenti rettilinei inclinazioni positive ψ_n, con la condizione che la successione $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ diventi infinitesima di ordine superiore alla successione $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$, $\frac{\pi}{2} - \varphi_2$, $\frac{\pi}{2} - \varphi_3, \ldots$, conservare per gli archi circolari i medesimi raggi, e per quelli che volgono la convessità verso l'asse x, anche le stesse ampiezze, disponendoli in modo che si conservino a due a due tangenti fra di loro ed ai segmenti rettilinei a cui si congiungono.

21. Le difficoltà che si incontrano quando si cerchi il comportamento assintotico della derivata logaritmica, e che nel fatto dipendono dalla forma

che assume il criterio inverso di quello dell'Hôpital, sono in parte eliminate quando si risalga dalla derivata logaritmica al logaritmo.

Poichè, nei §§ precedenti, abbiamo trovato delle condizioni *necessarie e sufficienti* per l'applicazione del teorema dell'Hôpital, potremo senza nessuna difficoltà eseguire questo passaggio.

Ed anzitutto, se conserviamo la definizione di classe 1.ª, data al n.° 18; scorgeremo subito che i logaritmi delle funzioni appartenenti alla 1.ª classe soddisfano le condizioni richieste dal Teor. 10; e ne concluderemo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione della variabile reale x finita, continua, monotona, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito, ed avente derivata logaritmica determinata anche nel punto dell'infinito, soddisfi la condizione $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, *si è che il suo logaritmo sia infinito di ordine inferiore al primo.*

D'onde la espressione

$$y = e^{x \cdot \varepsilon(x)}$$

$x\,\varepsilon(x)$ monotona, $\varepsilon(x)$ finita, continua, derivabile in tutti i punti di intorno $(x_0, \ldots + \infty)$, infinitesima per $x = +\infty$, per le funzioni appartenenti alla prima classe, trovata al n.° 32, della citata Memoria.

22. L'enunciato precedente contiene delle condizioni superflue, ed, in particolare, quella che la derivata logaritmica sia determinata nel punto $x = +\infty$. Si hanno cioè i teoremi seguenti:

Teorema 5.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, finita, continua, sempre crescente in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots \infty)$ ed abbia derivata atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0 \ldots x)$.*

Dico che, se è soddisfatta la relazione

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

il logaritmo $\varphi = \lg f$, non può essere infinito di ordine superiore nè eguale al primo.

Supponiamo infatti che $\varphi = \lg f$, sia per $x = +\infty$, infinita di ordine $\geqq 1$.

La funzione φ, che per le ipotesi poste è sempre crescente, finita, continua ed ha derivata atta alla integrazione definita, dovrebbe soddisfare la condizione $\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| > m$, ($m$ positivo determinato).

Per il Teorema 12.°, dato al § V, si dovrebbero poter determinare due numeri positivi μ, x_μ, tali che in tutti i punti di un insieme K_2 contenuto nell'intorno $(x_\mu, \ldots \infty)$, $|\varphi'(x)| > \mu\, m$.

Preso un numero ε positivo $< \mu\, m$, la condizione $|\varphi'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < \varepsilon$, non potrebbe dunque essere soddisfatta che in un insieme $\Xi_2 = (x_\mu \ldots \infty) - K_2$. La condizione che al Teorema 1.° è stata riconosciuta necessaria, perchè esista la relazione $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, non potrebbe perciò essere soddisfatta.

Teorema 6.° *Sia:* $f = e^{x \cdot \varepsilon(x)}$. *La* $\varepsilon(x)$ *sia una funzione finita, monotona in un intorno* $(x_0 \ldots + \infty)$, *infinitesima per* $x = +\infty$. *La* $x\, \varepsilon(x)$ *sia anch'essa monotona in quello stesso intorno. Ciò basta per potere asserire che si ha* $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Poniamo, anche qui, che la $f(x)$ sia positiva, non decrescente e che la $\varepsilon(x)$ sia positiva, e perciò non crescente, in tutto l'intorno $(x_0 \ldots + \infty)$. Scriveremo:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{(x+1)\varepsilon(x+1) - x\varepsilon(x)} = e^{\varepsilon(x)} \cdot e^{(x+1)\{\varepsilon(x+1) - \varepsilon(x)\}}.$$

Poichè è $\lim\limits_{x=\infty} e^{\varepsilon(x)} = 1$, si tratta di provare che è

$$\lim_{x=\infty} (x+1)\{\varepsilon(x+1) - \varepsilon(x)\} = 0. \tag{18}$$

Ora, per essere $x\, \varepsilon(x)$ positivo non decrescente, si ha

$$(x+1)\,\varepsilon(x+1) > x\,\varepsilon(x)$$

d anche

$$(x+1)\{\varepsilon(x+1) - \varepsilon(x)\} > x\,\varepsilon(x) - (x+1)\,\varepsilon(x)$$

$$(x+1)\{\varepsilon(x) - \varepsilon(x+1)\} < \varepsilon(x).$$

Poichè si ha

$$\varepsilon(x) - \varepsilon(x+1) \geqq 0, \qquad \varepsilon(x) > 0,$$

ed è:

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

sarà anche $\lim_{x=\infty} (x+1) \{ \varepsilon(x+1) - \varepsilon(x) \} = 0$, e ciò dimostra il teorema.

È notevole il fatto che, per questa dimostrazione, *non è necessaria la* **continuità** della $f(x)$ nè, conseguentemente, della $\varepsilon(x)$.

23. Se vorremo estendere ora il concetto di *classe* anche a funzioni finite, continue, monotone, derivabili in tutti i punti di un intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, delle quali non è richiesto che nel punto $x = +\infty$ sia determinata la derivata logaritmica; se continueremo ad assegnare alla classe prima quelle fra tali funzioni per le quali si ha $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, potremo enunciare il seguente criterio:

Tutte le funzioni sempre crescenti appartenenti alla prima classe hanno la forma $y = e^{x\varepsilon(x)}$, $\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Le funzioni della forma $y = e^{x\varepsilon(x)}$, *dove* $x\,\varepsilon(x)$ *ed* $\varepsilon(x)$ *sono entrambe monotone, e la* $\varepsilon(x)$ *è finita, continua, derivabile in un intorno* $(x_0 \ldots + \infty)$, *infinitesima per* $x = +\infty$, *appartengono alla prima classe.*

Stabilite così le proprietà fondamentali delle funzioni appartenenti alla prima classe, non sarà difficile dedurne quelle relative alle classi superiori.

Ho già mostrato, nella Memoria preventiva più volte citata, qual profitto se ne tragga per la *Determinazione dell'ordine di infinito.* Quesito questo fino ad ora non risolto e può dirsi anche *non istudiato*, se non per classi limitatissime di funzioni.

Spero in un prossimo lavoro di riprendere questo argomento, e, seguendo la traccia segnata in quella prima Memoria, di svolgerlo con quella larghezza e quel rigore che esigono la sua importanza e le difficoltà che esso presenta.

Mi è grato intanto ringraziare qui il mio vecchio maestro e caro amico prof. Cesare Arzelà, pei consigli e gli incoraggiamenti di cui mi è stato cortese durante la compilazione della presente Memoria.

Modena, 13 Aprile 1902.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo VIII della Serie III, pag. 245 e seguenti.

Milano, 1903. — Tip. Bernardoni
di C. Rebeschini e C.

Beiträge

zu der

Theorie der Iterationsrechnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät

der

Universität Leipzig

vorgelegt von

Lucyan Emil Böttcher

aus Warschau.

Leipzig-R.

Druck von Oswald Schmidt.

1898.

Inhalt.

Vorwort.

In dieser Abhandlung beabsichtige ich keine vollständige ırstellung der Theorie der Iterationsrechnung vorzulegen, il sie schon heute wegen ihrer zahlreichen Anwendungen : Theorie gewisser Funktionalgleichungen ein umfangreiches pitel der mathematischen Analysis bilden kann.

Ich beabsichtige nur die wichtigsten Probleme der Iteionsrechnung zu formuliren und einen Weg zur Auflösung selben schematisch darzustellen.

Der erste Punkt der Theorie der Iterationsrechnung ist Einführung der iterirten Funktionen mit einem reellen, ionalen, positiven, ganzen Exponenten.

Diese Funktion aber ist mit Ausnahme einer sehr kleinen zahl von Fällen explicite mit Hülfe der bekannten Funkıen undarstellbar.

Der zweite Punkt der Theorie der Iterationsrechnung die Verallgemeinerung des Begriffes der iterirten Funkıen, wobei 1. ein reeller, rationaler, ganzer, negativer ponent; 2. ein reeller, rationaler; 3. ein reeller schlechthin; ein complexer Exponent auftritt.

Hier tritt die wichtige Frage auf, o b s o l c h e G e- i d e i r g e n d e i n e a n a l y t i s c h e Bedeutung haben.

Der erste Fall ist mit dem „Inversionsproblem“ und urch mit Auflösung der analytischen Gleichungen verıpft und vermöge dessen auflösbar.

Der zweite Fall ist mit dem „Interpolationsproblem“ und urch mit der Auflösung von gewissen Funktionalgleichungen bunden, deren Theorie noch wenig bekannt ist.

Der dritte Fall ist nur ein Grenzfall des zweiten.

Für den vierten Fall giebt es keine Definition
mit analytischen oder Funktionalgleichu
verbunden wäre. Es soll also ein solcher
der Verallgemeinerung des Begriffes der
rirten Funktionen dargestellt werden, der
den vierten Fall gestattet.

Ich versuche diesen Weg auf folgende Weise d
stellen:

Wenn es eine eingliedrige, continuirl
Transformationsgruppe giebt, deren
partikuläre Transformation mit der Ba
transformation identisch ist, dann ist
iterirte Transformation mit einem belieb
Exponenten und derselben Basistransforma
identisch mit einer gewissen Transforma
dieser Gruppe, deren Parameter in fester
ziehung zu dem Exponenten steht, die sich
Hülfe der Einführung der kanonischen F
der Gruppe als eine lineare darstellen l

Alles reducirt sich auf die Construktion derjenigen T
formation, die für diese Gruppe eine infinitesi
Transformation ist.

Das ist einerseits mit der Theorie des Ausdruckes

$$\lim_{N=\infty} \mathop{\Big|}^{N}_{t+\frac{\mathfrak{p}(t)}{N}} (z) = f(z),$$

die ich schematisch darzustellen versuche, verbunden, a
seits mit der Construktion einer solchen Funktion $\mathfrak{p}(z$
mit der gegebenen Funktion $f(z)$ durch die obige Bezi
verbunden ist.

Die Construktion von solchen Funktionen ist vo
Natur der Reihe der Iterationen:

$$f(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)\ \ldots\ldots$$

abhängig.

Wenn sie nach einer constanten Gr
convergirt, so ist es möglich, sie in gewi

llen darzustellen, d. h. die Funktion $\mathfrak{p}(z)$ zu
istruiren.

Ich versuche einen Fall näher zu untersuchen, aber es
chieht nur schematisch, weil vorläufig die entsprechenden
ersuchungen noch nicht fertig sind.

Ich zeige, dass innerhalb einer gewissen, geschlossenen
gebung, wo die Iteration $\lim\limits_{N=\infty} f_N(z)$
constante Grösse ist, die Formeln:

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \Big[^{N} (z).$$

$$N = \infty \quad t + \frac{C}{N} \, \frac{f_{n+1}(t) - f_n(t)}{f_n^{(1)}(t)}$$

$$\Big[^{a}_{f(t)} (z) = \lim_{n=\infty} \Big[^{N} (z).$$

$$N = \infty \quad t + \frac{Ca}{N} \, \frac{f_{n+1}(t) - f_n(t)}{f_n^{(1)}(t)}$$

tisch bestehen.

Meine Arbeit ist nur ein Bericht über meine Unter-
iungen in der Theorie der Iterationsrechnung, die in vielen
itungen nicht vollständig und bloss schematisch oder in
Form von Hypothesen dargestellt sind.

Leipzig, 2. Januar 1898.

Lucyan Emil Böttcher,
Stud. der Math.

Erster Theil.

Die Iterationsrechnung als ein specielles Capitel der Theorie der eingliedrigen continuirlichen Transformationsgruppen.

I. Allgemeine Begriffe.

§ 1. Verallgemeinerung des Begriffes der Veränderlichen und der Funktion. Wir wollen von Anfang an unsere Betrachtungen möglichst allgemein fassen; dazu wird uns eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes der Veränderlichen und der Funktion dienen, woraus sich auch ein verallgemeinerter Begriff der iterirten Formen von selbst ergeben wird.

Im n-dimensionalen Raume ist die Lage eines beliebigen Punktes durch das System seiner Coordinaten $x_1 \ldots\ldots x_n$ vollständig bestimmt, also ist das System $(x_1 \ldots\ldots x_n)$ ein analytisches Bild der Lage des entsprechenden Punktes X, und mit der Bewegung dieses Punktes verändert sich das System $(x_1 \ldots\ldots x_n)$ und vice versa.

Wir wollen ein solches System als verallgemeinerten Begriff der „Veränderlichen“ betrachten.

Ein Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} x'_i = f_i(x_1 \ldots\ldots x_n) \\ i = 1, 2, \ldots\ldots n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bedeutet, dass der ganze n-dimensionale Raum in der Weise transformirt wird, dass der Punkt X seine Lage verändert und in einen andern Punkt X′ übergeht, oder, was dasselbe ist, der Punkt X wird in den Punkt X′ transformirt; analytisch ausgedrückt: Das System $(x_1 \ldots\ldots x_n)$ wird in das System $\left(x'_1 \ldots\ldots x'_n\right)$ transformirt.

Die Gleichungen (1) stellen eine gewisse Transformatio

$$(x_1' \ldots x_n') = T(x_1 \ldots x_n) \ldots\ldots\ldots$$

dar, deren Resultat $(x_1' \ldots x_n')$ wir als Funkti des Systems $(x_1 \ldots x_n)$ betrachten wollen.

Das ursprüngliche System $(x_1 \ldots x_n)$ nennen wir Argumentsystem.

Wenn wir sagen, dass das System $(x_1' \ldots x_n')$ ei Funktion $T(x_1 \ldots x_n)$ des Systems $(x_1 \ldots x_n)$ i dann verstehen wir darunter, dass das resultiren System $(x_1' \ldots x_n')$ aus dem Argumentsyst $(x_1 \ldots x_n)$ durch die Transformation T entsteh die durch das Gleichungssystem (1) definirt ist.

§ 2. Definition der iterirten Transform tionen. Eine Reihe von Gleichungssystemen:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(1)} = f_i(x_1 \ldots . x_n) \\ x_i^{(2)} = f_i\left(x_1^{(1)} \ldots . x_n^{(1)}\right) \\ x_i^{(3)} = f_i\left(x_1^{(2)} \ldots . x_n^{(2)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(N)} = f_i\left(x_1^{(N-1)} \ldots . x_n^{(N-1)}\right) \end{array}\right\} i = 1, 2 \ldots . n \ \ldots$$

bedeutet, dass auf das System $(x_1 \ldots x_n)$ eine gew Operation $T(z_1 \ldots z_n)$ angewandt und N mal wieder (iterirt) wird. Dadurch entsteht eine neue Transforma die das System $(x_1 \ldots x_n)$ in das System $\left(x_1^{(N)} \ldots x_n^{(N)}\right)$ wandelt. Dieses neue System $\left(x_1^{(N)} \ldots . x_n^{(N)}\right)$ ist eine gew Funktion des ursprünglichen Systems $(x_1 \ldots x_n)$, des E nenten N (d. i. der Zahl, die angiebt, wie viel mal die ration T wiederholt ist) und hängt ausserdem von der N der Operation T ab.

Wir wollen einen wörtlichen und schriftlichen Ausd für diese Thatsachen geben; zu diesem Zwecke werden eine genaue Definition und eine bequeme Symbolik einfü

Wir wollen nämlich sagen: Das System $\left(x_1^{(N)} \dots x_n^{(N)}\right)$
t die N^{te} Iteration des Argumentsystems
: $\dots . x_n)$ mit der Basistransformation $T(z_1 \dots z_n)$,
er, was dasselbe bedeutet: Das System $\left(x_1^{(N)} \dots . x_n^{(N)}\right)$
t eine iterirte Funktion des Systems $(x_1 \dots . x_n)$
t dem Exponenten N und der Basisfunktion
$x_1 \dots x_n)$.

Diese Thatsache werden wir symbolisch durch die
eichung:

$$\left(x_1^{(N)} \dots \dots x_n^{(N)}\right) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \dots . z_n)}^{N} (x_1 \dots . x_n) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

rstellen. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält das
mbol $\Big|$ als Abkürzung des Wortes „Iteration" mit dem
ponenten N rechts oben (wie bei der gewöhnlichen Potenz
) und mit der Basisfunktion rechts unten.

Ausnahmsweise werden wir auch das Sympol

$$\mathop{\Big|}\limits^{N} (x_1 \dots x_n)$$
$$\left\{\begin{matrix} z_i' = f_i(z_1 \dots z_n) \\ i = 1, 2, \dots n \end{matrix}\right\}$$

brauchen.

I. Das Additions-, Multiplikations- und Associationstheorem.

§ 3. Das Additionstheorem. Die Basistransfor-
tion und ihre iterirten Transformationen: die zweite, dritte,
rte, $\dots \dots N^{te}, (N+1)^{te} \dots$ bilden eine gewisse, selbstver-
ndlich discontinuirliche Transformationenschaar. In diesem
pitel wollen wir zeigen, dass die Schaar der iterirten
ansformationen jeder beliebigen Basistransformation eine
uppe bildet. Das beruht auf folgendem Theorem, welches
r als Additionstheorem bezeichnen wollen.

Theorem. Wenn das System $(A_1 \ldots A_n)$ e
N^{te} Iteration des Systems $(B_1 \ldots B_n)$ bei der
gebenen Basistransformation $T(z_1 \ldots z_n)$ ist, w
ausserdem $(B_1 \ldots B_n)$ eine M^{te} Iteration von $(C_1 \ldots$
bei derselben Basistransformation $T(z_1 \ldots z_n)$
so ist das erste System $(A_1 \ldots A_n)$ eine $(M +$
Iteration des letzten Systems $(C_1 \ldots C_n)$ bei d
selben Basistransformation $T(z_1 \ldots z_n)$.

Wir können dasselbe Theorem auch so aussprec
Zwei nacheinander ausgeführte iterirte Tr
formationen mit derselben Basistransforma
und den Exponenten M und N sind äquival
einer dritten iterirten Transformation
derselben Basistransformation und dem
ponenten $M + N$.

§ 4. Das Multiplikationstheorem: Wenn
Transformation $S(x_1 \ldots x_n)$ eine N^{te} iterirte Tr
formation von $U(x_1 \ldots x_n)$ ist, und $U(x_1 \ldots x_n)$ e
M^{te} iterirte Transformation von $T(x_1 \ldots x_n)$
dann ist $S(x_1 \ldots x_n)$ eine $M.N^{te}$ iterirte Tra
formation von $T(x_1 \ldots x_n)$. Dieser Satz ist eine
wendung des Additionstheorems und kann mit Hülfe dess
bewiesen werden. Wir können ihn in der Form:

$$\mathop{\Big|}^{M}(x_1 \ldots . x_n) \equiv \mathop{\Big|}^{M.N}_{T(z_1 \ldots z_n)}(x_1 \ldots . x_n) \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$\mathop{\Big|}^{N}_{T(t_1 \ldots t_n)}(z_1 \ldots z_n)$$

analytisch darstellen.

§ 5. Das Additions- und Multiplikati
theorem in der Litteratur der iterirten Tr
formationen. Das Additions- und Multiplikationsth
ohne genaueren Beweis, als Analogie mit den Potenzir
formeln finden wir in einigen Arbeiten über Iterationsrech
als Grundlage derselben.

Siehe E. Schröder „Ueber die iterirten Funktionen“ [1]), Hoppe [2]), J. Farkas [3]), Korkine [4]), Léau [5]), Bourlet [6]) etc.

§ 6. Der Associationssatz. Die Berechnung der irten Transformationen ist schon in dem Falle, wo der ponent eine ganze und positive Zahl ist, mit so grossen wierigkeiten verbunden, dass sie mit Ausnahme einer r geringen Anzahl der einfachsten Fälle vollständig unchführbar ist.

Es giebt aber eine Möglichkeit, die Anzahl der bekannten irten Transformationen beliebig zu erweitern. Das ist glich mit Hülfe des sogenannten Associanssatzes, dessen Inhalt sich durch die Gleichung:

$$\underset{S^{-1}TS(z_1\ldots z_n)}{\overset{N}{\top\!\!\!\bot}}(x_1\ldots x_n) = S^{-1}\underset{T(z_1\ldots z_n)}{\overset{N}{\top\!\!\!\bot}} S(x_1\ldots x_n \quad \ldots\ldots (1)$$

dergeben lässt.

Ein Beweis ist hier unnöthig, weil dieser Satz sehr gut annt ist.

Dieser wichtige Satz spielt in der Theorie der iterirten ıktionen eine ausserordentlich wichtige Rolle. erst dient er zur Erweiterung der Anzahl r bekannten iterirten Funktionen.

Er gestattet mit Hülfe der bekannten Basistransformation $_1\ldots z_n)$ und einer vollständig beliebigen Transmation $S(z_1\ldots z_n)$ unendlich viele neue iterirte

---

1) Mathematische Annalen Band III p. 296—322 und zwar p. 317.

2) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band V 1860, p. 136 bis und zwar p. 136.

3) Journal de Mathematiques pures et appliques. Serie III Band X . p. 101—108 und zwar p. 105--106.

4) A. Korkine: „Sur un problem d'Interpolation.“ Bulletin des ıces Mathematiques et Astronomiques, Serie II, Tome VI, 1882, ıiére partie, p. 228—242 und zwar p. 228.

5) Leopold Léau: „Etude sur les équations fonctionnelles.“ ales de la Faculté des sciences de Toulouse, Band XI, 1897, E. ıitre, V p. 61—71 und zwar p. 61.

6) C. Bourlet: „Sur le problème de l'Iteration.“ Annales de la ılté des sciences de Toulouse, Band XII, 1898, C. p. 1—12 und p. 1.

Transformationen zu berechnen und zwar
folgende Weise: Wenn wir können Iterationen einer gewi
Transformation $T(z_1 \ldots z_n)$ dann mit Hülfe der Identitä
wir erreichen eben so viele neue Iterationsformel, wie
arbiträre Transformationen $S(z_1 \ldots z_n)$ betrachtet wa
Siehe E. Schröder: „Ueber die iterirten Funktionen."

Die Bedeutung des Associationssatzes zeigt sich uns
deutlicher, wenn wir die Funktionalgleichung (1)

$$U(x_1 \ldots x_n) = S^{-1} T S(x_1 \ldots x_n) \quad \ldots \ldots$$

betrachten werden, wo $T(x_1 \ldots x_n)$ und $U(x_1 \ldots x_n)$ geg
sind und $S(x_1 \ldots x_n)$ zu bestimmen ist.

Wenn die iterirten Transformationen mit der B
transformation $T(z_1 \ldots z_n)$ bekannt sind, so sind nach
„Associationssatze" auch iterirte Transformationen mit
gegebenen Basistransformation $U(z_1 \ldots z_n)$ bekannt.

Es handelt sich nur um die unbekannte Transform
$S(z_1 \ldots z_n)$.

Wir sehen, dass auf diese Weise die
rechnung der iterirten Funktionen sich
die Lösung der Funktionalgleichung (1),
$S(z_1 \ldots z_n)$ unbekannt ist, reducirt.

Bei diesen Problemen giebt es gewisse Complicati
Die Funktionalgleichung (1) oder gleichwerthige

$$S U(x_1 \ldots x_n) = T S(x_1 \ldots x_n) \quad \ldots \ldots$$

hat unendlich viele Lösungen mit gewissen Willkürlichk
von denen die wichtigsten diejenigen s
die durch Einführung der willkürlichen,
kannten Hülfstransformation $T(z_1 \ldots z_n)$ i
treten.

Es fragt sich nun, ob diese Willkürlichkei
die selbstverständlich in der Identität:

$$\underset{U(z_1 \ldots z_n)}{\overset{N}{\mathrm{I}}}(x_1 \ldots x_n) = S^{-1} \underset{T(z_1 \ldots z_n)}{\overset{N}{\mathrm{I}}} S(x_1 \ldots x_n)$$

für jeden **ganzen Werth** von N verschwinden, a
für jeden beliebigen Werth von N verschi
den. Das ist eine grosse und unvermeidliche Schwierigk
der ganzen Iterationsrechnung.

[II. Die iterirten Transformationen mit einem ganzen negativen Exponenten.

§ 7. Vorbemerkungen. Es giebt eine gewisse Analogie wischen Addition, Multiplikation und Potenzirung einerseits nd Iteration andererseits. Diese Analogie besteht nämlich arin, dass eine gewisse Operation wiederholt wird.

Einerseits haben wir: eine ganze, positive Zahl, einen anzen, positiven Coefficienten, eine ganze, positive Potenz, ndererseits haben wir: eine Iteration mit einem ganzen, posiven Exponenten.

Diese Analogie ist so tief, dass wir voraussetzen, dass auf dieselbe Weise wie die ganze, egative Zahl, oder Multiplicität, oder Potenz, allgeeine rationale Zahl, oder Multiplicität, oder Potenz; llgemeine reelle Zahl, oder Multiplicität, oder Potenz adlich allgemeine complexe Zahl, oder Multiplicität, oder otenz, auch die iterirte Transformation mit inem ganzen, negativen, allgemeinen ratioalen, allgemeinen reellen, endlich allgeeinen complexen Exponenten entsteht.

Auf Grund dieser Analogie sehen wir, dass die iterirten ransformationen dann und nur dann direkt aus der Basisansformation entstehen können, wenn der Exponent eine anze, positive Zahl ist; ebenso wie aus der Einheit nur eine anze, positive Zahl; durch die Addition nur eine ganze, ositive Multiplicität, und durch die Multiplication nur eine anze, positive Potenz direkt entstehen kann.

Also können die iterirten Transformationen mit beliebigen Exponenten aus der Basisansformation keineswegs direkt entstehen, ondern als Lösungen gewisser analytischer ler Funktionalgleichungen, oder endlich als renzwerthe von gewissen Ausdrücken aufeten.

Die analytischen und Funktionalgleichungen, die zur onstruktion der iterirten Transformationen mit ganzen, negaven und allgemeinen reellen, rationalen Exponenten dienen,

sind eine blosse Verallgemeinerung des Inversions- und Inte polationsproblems.

Siehe R. Hoppe[1]), E. Schröder[2]). Die Con struktion der Grenzausdrücke, die als Defini tion der iterirten Transformationen mit eine beliebigen Exponenten dienen können, bilde das Problem unserer Betrachtung, wobei wi sowohl bekannte Resultate darstellen, al auch eigene Untersuchungen mittheile wollen.

§ 8. Einführung der iterirten Transfo mationen mit einem negativen Exponenten. D ganze, negative Zahl $(-m)$ ist eine formelle Lösung d Gleichung: $x + m = o$.

Die ganze, negative Multiplicität $(-m) . a$ ist eine fo melle Lösung der Gleichung: $x + (+m) . a = o$.

Die ganze, negative Potenz a^{-m} ist eine formelle Lösu der Gleichung: $xa^{+m} = 1$.

Ebenso ist die iterirte Transformation m dem ganzen, negativen Exponenten $(-m)$ ei **formelle** Lösung der analytischen Gleichung.

$$\Big|_{T(z_1 \ldots z_n}^{m} (y_1 \ldots\ldots y_n) = (x_1 \ldots\ldots x_n)$$

was wir durch die Gleichung:

$$(y_1 \ldots y_n) = \Big|_{T(z_1 \ldots z_n}^{-m} (x_1 \ldots\ldots x_n)$$

ausdrücken.

Hier tritt eine besondere Bedingung in Kraft, nämli das Princip der Erhaltung der zweidimensi nalen Zahlenmannigfaltigkeit $\alpha + \beta i$.

Die formellen Gleichungen: $x + (+m) . a = o$; $xa^{+m} =$ sind „auflösbar“, weil ihre Lösungen immer innerhalb derselb

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. V. 1860. p. 1 bis 139, und zwar p. 136.

[2]) Mathematische Annalen Bd. III. 1871. p. 296—322.

idimensionalen Zahlenmannigfaltigkeit $\alpha + \beta i$, wie die Zahl ıthalten sind. Die erste Bedingung, die durch ;uchte Transformation erfüllt sein soll, ist , dass die Gleichung: $U(y_1 \dots y_n) = (x_1 \dots\dots x_n)$ die ılen $y_1 \dots\dots y_n$ definiren, und zwar in solcher ise definiren soll, dass sie innerhalb derben zweidimensionalen Zahlenmannigfalkeit $\alpha + \beta i$, wie die Zahlen $x_1 \dots\dots x_n$ enthalten d.

Auf diese Weise sind die iterirten Transfortionen mit einem ganzen, negativen Expoıten Transformationen von sicherer analycher Existenz, weil die Gleichung:

$$\overset{m}{\underset{T(z_1 \dots z_n)}{\Big|}}(y_1 \dots\dots y_n) = (x_1 \dots\dots x_n)$$

eine analytische, d. i. algebraische resp. transcendente chung immer „auflösbar" ist.

Es giebt noch einen tiefer gehenden Beweis der Existenz iterirten Transformationen mit einem ganzen negativen onenten.

Die iterirte Transformation mit dem gan-, negativen Exponenten $(-m)$ ist nicht nur e Lösung der Gleichung

$$\overset{+m}{\underset{T(z_1 \dots\dots z_n)}{\Big|}}(y_1 \dots\dots y_n) = (x_1 \dots x_n),$$

o eine Inversion der iterirten Transfor;ion mit dem entsprechenden ganzen, posien Exponenten $(+m)$ und derselben Basisnsformation $T(z_1 \dots\dots z_n)$, sondern auch eine rirte Transformation mit dem entsprechen- ganzen Exponenten $(+m)$ und der inversen istransformation $T_{-1}(z_1 \dots\dots z_n)$.

Dieser Fundamentalsatz für die iterirten Transformationen einem ganzen, negativen Exponenten ist der sogenannte ersionssatz."

IV. Die iterirten Transformationen mit einem gebroche Exponenten.

§ 9. Einführung der iterirten Transf mationen mit einem gebrochenen Exponent Interpolationssatz. Die gebrochene Zahl $\left(\frac{m}{n}\right)$ ist formelle Lösung der Gleichung $nx = m$.

Die gebrochene Multiplicität $\frac{m}{n} . a$ ist eine forme Lösung der Gleichung $nx = ma$.

Die gebrochene Potenz $a^{m/n}$ ist eine formelle Lö der Gleichung $x^n = a^m$.

Ebenso ist die iterirte Transformation dem gebrochenen Exponenten $\frac{m}{n}$ eine forme Lösung der Funktionalgleichung:

$$\mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \ldots z_n)}^{n} (x_1 \ldots x_n) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{m} (x_1 \ldots x_n) \ldots (1),$$

was wir so schreiben:

$$S(x_1 \ldots x_n) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{\frac{m}{n}} (x_1 \ldots x_n) \ldots (2).$$

Es fragt sich aber, ob die Funktionalgleich (1) auflösbar ist für beliebig ausgewählte We von m und n oder ob diese Auflösbarkeit schränkt ist.

Diese Frage lässt sich durch den folgenden sogenar „Interpolationssatz" vereinfachen.

Fundamentalsatz. Wenn die iterirte Tra formation

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{\frac{1}{n}} (x_1 \ldots x_n)$$

als Lösung der Funktionalgleichung:

$$\mathop{\Big|}\limits_{S(z_1\ldots z_n)}^{n}(x_1\ldots x_n)=T(x_1\ldots x_n)\ldots.(3)$$

nen analytischen Sinn hat, dann hat auch
e iterirte Transformation

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1\ldots z_n)}^{\frac{m}{n}}(x_1\ldots .x_n)$$

s Lösung der Funktionalgleichung:

$$\mathop{\Big|}\limits_{U(z_1\ldots z_n)}^{n}(x_1\ldots x_n)=\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1\ldots z_n)}^{m}(x_1\ldots x_n)\ldots(4),$$

nen analytischen Sinn, welcher sich durch
e Identität:

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1\ldots z_n)}^{\frac{m}{n}}(x_1\ldots x_n)=\mathop{\Big|}\limits_{\mathop{\Big|}\limits_{T(t_1\ldots t_n)}^{\frac{1}{n}}(z_1\ldots z_n)}^{m}(x_1\ldots .x_n)\;\ldots\ldots\ldots(5)$$

ısdrückt: d. i., die iterirte Transformation
it dem Exponenten $\frac{m}{n}$ ist identisch mit der
erirten Transformation mit dem Exponenten
und einer neuen Basistransformation, die
chts anderes ist, als die iterirte Transfor-
ation der ursprünglichen Basistransfor-
ation mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$.

Die Frage, ob die iterirte Funktion mit dem beliebigen
(ponenten $\frac{M}{N}$ ($M \lesseqgtr o, N > o$) einen analytischen Sinn hat, re-
cirt sich dadurch, dass der Zähler keine Rolle spielt und
rch 1 ersetzt werden kann, es bleibt also der Nenner.

Babbage[1]) zeigte für den einfachen Fall, wo das System
$\ldots x_n$) aus einer einzigen Veränderlichen besteht, dass
sere Aufgabe durch die Auflösung der gewissen Funktional-

---

[1]) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1815,
389—423.

gleichung sich so reducirt, dass auch der Nenner N kei Rolle spielt.

Die Babbage'sche Theorie besteht darin, dass wir ei vollständig beliebige Transformation S $(x_1 \dots x_n)$ wählen u eine Funktionalgleichung für eine unbekannte Transformati W $(x_1 \dots x_n)$ construiren.

Wenn

$$W^{-1} \mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \dots z_n)}^{N} W(x_1 \dots x_n) = T(x_1 \dots x_n) \quad \dots\dots\dots$$

oder, was dasselbe ist:

$$\mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \dots z_n)}^{N} W(x_1 \dots x_n) = WT(x_1 \dots x_n) \quad \dots\dots$$

ist, so ist

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \dots z_n)}^{\frac{1}{N}} (x_1 \dots x_n) = W^{-1} S\, W(x_1 \dots x_n) \dots$$

und damit

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \dots z_n)}^{\frac{M}{N}} (x_1 \dots x_n) = W^{-1} \mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \dots z_n)}^{M} W(x_1 \dots x_n) \dots$$

Wenn wir beweisen können, dass die Fun tionalgleichung

$$K\,W(x_1 \dots x_n) = W\,L(x_1 \dots x_n)$$

auflösbar ist, dann wird die Untersuchung d iterirten Transformationen mit einem b liebigen rationalen Exponenten vollständ erledigt.

Hier sind die Transformationen K $(x_1 \dots x_n)$ und L $(x_1 \dots$ gegeben, und unbekannt ist die Transformation W $(x_1 \dots x$

§ 10. *Die Willkürlichkeiten, die in d Theorie der iterirten Transformationen m beliebigen rationalen Exponenten eintrete*

Es zeigt sich aber, dass die Transformation S $(x_1 \dots$ *ein vollständig willkürliches Element bild* welches sich mit dem entsprechenden unbekannten Eleme W $(x_1 \dots x_n)$ in der Weise compensirt, dass in der Gleichu

$$W^{-1} \mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \ldots z_n)}^{N} W(x_1 \ldots x_n) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{M} (x_1 \ldots x_n)$$

d ebenso in der Gleichung

$$W^{-1} \mathop{\Big|}\limits_{S(z_1 \ldots z_n)}^{KN} W(x_1 \ldots x_n) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{KM} (x_1 \ldots x_n),$$

k eine ganze Zahl ist, die Willkürlichkeit der Transmation $S(x_1 \ldots x_n)$ verschwindet. Ich frage: Wird ese Willkürlichkeit auch in dem Falle:

$$W^{-1} S\, W(x_1 \ldots x_n) = \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{\frac{N}{M}} (x_1 \ldots x_n)$$

enso verschwinden?

Wenn diese Willkürlichkeit nicht verhwindet, dann ist dem Begriffe der iterirten ansformation mit einem ganzen Exponenten, r als eine vollständig bestimmte Transrmation dargestellt ist, der Begriff der rirten Transformation mit einem gebrochenen ponenten $\frac{M}{N}$ entgegengesetzt, der als gewisse nnigfaltigkeit einzelner von einander verhiedenen Transformationen zu betrachn ist.

Erinnern wir uns an den Begriff der gebrochenen enz $a^{M/N}$, die als Lösung der Gleichung $x^N = a^M$ dargellt ist.

Wir wissen, dass die gebrochene Potenz keine eintige Zahl, sondern eine Mannigfaltigkeit ist, die in unserem le aus N von einander verschiedenen Zahlen besteht. s zeigt uns, ohne einen strengen Beweis zu geben, dass uns nicht überraschen darf, wenn sich die iterirte ansformation mit einem gebrochenen Exnenten $\frac{M}{N}$ ebenso in der Form einer Mannigtigkeit von unter einander verschiedenen ansformationen darstellt. Das ist die Analogie schen der gebrochenen Potenz und Iteration mit einem rochenen Exponenten, eine Analogie, die aber nicht voll-

ständig klar ist. Der Begriff der gebrochenen Potenz stellt sich als Mannigfaltigkeit von N verschiedenen Zahl dar; der Begriff der Iteration mit einem gebrochenen E ponenten $\frac{M}{N}$ ist auch als Mannigfaltigkeit von unter einand verschiedenen Transformationen dargestellt, aber es ist nich darüber gesagt, *wie viele verschiedene Tran formationen darin enthalten sind.*

Wir müssen also annehmen, dass die Anzahl der unt einander verschiedenen Zweigtransformationen, die in de Symbol

$$\overline{\underline{\Big|}}^{\frac{M}{N}}_{T\,(z_1\ldots z_n)}(x_1\ldots x_n)$$

enthalten sind, eine unendlich grosse oder endliche, ab dann von N abhängige Zahl ist, welche mit N ins Unendlic wachsen kann.

So z. B. ist:

$$\overline{\underline{\Big|}}^{\frac{M}{N}}_{a\,z}(x) = a^{\frac{M}{N}}\,x,$$

also eine N-deutige Funktion von x, dagegen

$$\overline{\underline{\Big|}}^{\frac{M}{N}}_{2\,z^2-1}(x) = \cos\left(2^{\frac{M}{N}}\arccos x\right),$$

also eine unendlich vieldeutige Funktion von x.

§ 11. *Fortsetzung.* Das alles bedarf, um vo ständig klar zu sein, einer wesentlichen Ergänzung. Bei (e Einführung des Begriffes der iterirten Transformationen m einem gebrochenen Exponenten treten zwei Arten von W kürlichkeiten auf. Erstens: Eine beliebige Transformati $S(x_1\ldots x_n)$ und zweitens: Willkürlichkeiten, die bei der A lösung der Funktionalgleichung eintreten.

Das obenstehende gilt dann und nur dan, wenn wir die arbiträre Transformation fes halten, weil für jede einzelne arbiträre Tran formation ein anderes Bild der Vieldeutigket entsteht.

So z. B. ist:

$$\mathop{\Bigl|}\nolimits_{z}^{\frac{M}{N}}(x) = x$$

eutig,

$$\mathop{\Bigl|}\nolimits_{z}^{\frac{M}{N}}(x) = \mathop{\Bigl|}\nolimits_{\cos\left\{2\varkappa\pi + \arc\cos z\right\}}^{\frac{M}{N}}(x) = \cos\left\{\frac{2M\varkappa}{N}\pi + \arc\cos x\right\}$$

utig und:

$$\mathop{\Bigl|}\nolimits_{z}^{\frac{M}{N}}(x) = \mathop{\Bigl|}\nolimits_{z e^{2\pi i}}^{\frac{M}{N}}(x) = x\, e^{\frac{2M\pi}{N}\sqrt{-1}}$$

dlich vieldeutig.

Der Begriff der Iteration

$$\mathop{\Bigl|}\nolimits_{T(z_1 \ldots z_n)}^{\frac{M}{N}}(x_1 \ldots z_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

dargestellt als eine Mannigfaltigkeit, die entweder aus r unendlich grossen, oder einer endlichen, von N ab-gigen Anzahl untereinander verschiedener Transforma-en besteht.

Ich frage: Wo liegt der Grund dieser Mannig-igkeit? Selbstverständlich liegt er in den Will-ichkeiten.

Ich frage noch weiter: Liegt er in den beiden en der Willkürlichkeiten, oder ist er nur den Willkürlichkeiten der ersten oder der iten Art verbunden?

Ich will diese Thatsache klar darstellen.

Die Wahl der willkürlichen Transformation $S(x_1 \ldots x_n)$ vollständig frei. Dabei giebt es bei der Auflösung der ktionalgleichung gewisse Willkürlichkeiten, die für die elnen Transformationen $S(x_1 \ldots x_n)$ verschieden werden. frage: ob die Mannigfaltigkeit, die in dem bol (a) enthalten ist, gegen die Wahl der iträren Transformation $S(x_1 \ldots x_n)$ sich in-

variant verhält, d. h. für alle mögliche Tra formationen $S(x_1 \dots x_n)$ dieselbe bleibt, d. h. ob Willkürlichkeiten erster Art bloss illusorisch enthalten und dieser Mannigfaltigkeit zu Grunde li bloss der Inbegriff der Willkürlichkeiten zweiten Art (die mit Auflösung der fest stellten Funktionalgleichung eintreten.)

Der oben gegebene Fall mit der identischen Basistr formation $f(z) \equiv z$ zeigt uns, dass im allgemeinen nicht richtig ist, weil die Willkürlichkeiten erster wirklich eintreten:

$$f(x) \equiv x \equiv \cos\left\{2k\pi + \operatorname{arc\,cos} x\right\} \equiv \sin\left\{2k\pi + \operatorname{arc\,sin}\right.$$

$$\equiv \operatorname{tg}\left\{k\pi + \operatorname{arc\,tg} x\right\} \equiv x^{e^{2k\pi\sqrt{-1}}}.$$

Daraus folgen nachstehende Identitäten:

$$\mathop{\mathrm{I}}_z^{\frac{M}{N}}(x) \equiv x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathop{\mathrm{I}}_z^{\frac{M}{N}}(x) \equiv x\cos\left(\frac{2kM}{N}\pi\right) + \sqrt{1-x^2}\,.\,\sin\left(\frac{2kM}{N}\pi\right) \quad \dots$$

$$\mathop{\mathrm{I}}_z^{\frac{M}{N}}(x) \equiv x\cos\left(\frac{2kM}{N}\pi\right) - \sqrt{1-x^2}\,.\,\sin\left(\frac{2kM}{N}\pi\right) \quad \dots$$

$$\mathop{\mathrm{I}}_z^{\frac{M}{N}}(x) \equiv \frac{x + \operatorname{tg}\left(\frac{kM}{N}\pi\right)}{1 - x\operatorname{tg}\left(\frac{kM}{N}\pi\right)} \quad \dots\dots\dots$$

$$\mathop{\mathrm{I}}_z^{\frac{M}{N}}(x) \equiv x^{e^{\frac{2kM}{N}\pi\sqrt{-1}}} \quad \dots\dots\dots$$

etc. etc.

Wir können also fragen: ob der Inbegriff al möglichen arbiträren Transformatio $S(x_1 \dots x_n)$ in eine gewisse Anzahl von Kate rien zerfällt. Innerhalb einer solchen Ka

rie besitzt die Mannigfaltigkeit (a) eine gesse Anzahl von verschiedenen Transfortionen, deren Inbegriff sich gegen die ahl der Transformation $S(x_1 \ldots x_n)$ innerhalb r obengenannten Kategorie invariant verlt.

In diesem Falle wäre die Mannigfaltigkeit, die in dem nbol (a) enthalten ist, eine solche, die aus einer endlichen zahl von isolirten Mannigfaltigkeiten besteht.

Ich glaube aber, dass das unmöglich ist, und wenn die te Behauptung im allgemeinen unrichtig ist, dann bleibt h zu fragen, ob die bekannte Mannigfaltigkeit aus unendlich vielen particulären und zwar olirten" Mannigfaltigkeiten besteht, von nen jede mit einer gewissen Transformation $_1 \ldots x_n)$ verbunden ist, aber jede solche „isoite" particuläre Transformationenmannigtigkeit eine endliche oder unendlich osse ist.

§ 12. Es ist leicht zu zeigen, dass das obengesagte sehr ırscheinlich ist.

Sei $f_0(z)$ irgend eine particuläre Lösung der Funktionalchung $f\varphi(z) = \mathfrak{p} f(z) \ldots (1)$, wo die Funktion $\mathfrak{p}(z)$ eine iträre Funktion ist.

Sei $A(z)$ eine vollständig beliebige Funktion, die sich en $\mathfrak{p}(z)$ invariant verhält, d. h. die die Identität $(z) = A(z) \ldots (2)$ leistet.

Dann ist es leicht zu zeigen, dass

$$y = \Big|_{\varphi(t)}^{\frac{M}{N}} (z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

t sich darstellen in der Form der Lösung einer folgenden lytischen Gleichung:

$$\Big|_{\mathfrak{p}(t)}^{A f_0(y)} f_0(y) = \Big|_{\mathfrak{p}(t)}^{\frac{M}{N} + A f_0(z)} f_0(z) \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Inbegriff aller Willkürlichkeiten erster Art besteht
der Wahl der vollständig arbiträren Funktion $\mathfrak{p}(t)$. Inbegr
der Willkürlichkeiten zweiter Art besteht in der Wahl d
beschränkt arbiträren Funktion $A(t)$.

Um unsere Aufgabe aufzulösen, genug ist die Gleichu
(b) untersuchen und die Resultate verallgemeinern.

V. Gruppentheoretische Betrachtung der Theorie der iterirten Transformationen.

§ 13. Erweiterung der iterirten Transformationen für einen beliebigen Werth des Exponenten. Wir haben gesehen, dass die Schaar d
iterirten Transformationen mit einem beliebigen reell
rationalen Exponenten eine Gruppe bildet, die sich zu d
Begriff der eingliedrigen, continuirlichen Gruppe ebenso v
hält, wie die überall dichte Menge der reellen, rationa
Zahlen zu der continuirlichen Menge aller möglichen Zahl

Ist es möglich, den Inbegriff der iterirt
Transformationen so zu erweitern, dass
eine eingliedrige continuirliche Grup
bildet?

Das wird dann und nur dann möglich sein, wenn d
Begriff der iterirten Transformationen mit einem beliebi
reellen oder complexen Exponenten eingeführt wird. Der Beg
der iterirten Transformation mit einem ganzen, positiven E
ponenten ist unmittelbar eingeführt; durch das Inversio
problem — die iterirte Transformation mit einem ganz
negativen Exponenten, durch das Interpolationsproblem
die iterirte Transformation mit einem beliebigen, endlich
rationalen Exponenten.

Es bleibt noch der Begriff der iterirten Transformati
mit einem irrationalen Exponenten. Sie kann dargest
werden als Grenze von iterirten Transformationen, de
rationale Exponenten sich einem gegebenen irrationa
Werthe nähern, nämlich dem Exponenten der gesuch
iterirten Transformation.

Aber die Existenz des Begriffes der iterirten
ınsformation mit einem rationalen Exponenten ist noch
:ht bewiesen, es ist unbekannt, ob er über-
upt einen analytischen Sinn hat.

Desto weniger ist es gestattet, a priori zu
gen, dass

$$\lim_{p=\infty} \left| \frac{\frac{M_p}{N_p}}{T(z_1 \ldots z_n)} \right| (x_1 \ldots . x_n), \quad \text{wo} \lim_{p=\infty} \frac{M_p}{N_p} = \mu$$

st der gegebene irrationale Exponent) einen bestimm-
ı analytischen Sinn hat.

Wir sehen also, dass die Existenzfrage für die iterirten
nsformationen mit einem irrationalen Exponenten noch
plicirter ist, als die Existenzfrage für die iterirten Trans-
ıationen mit einem rationalen Exponenten, weil hier die
ge nach der Existenz eines Grenzwerthes hinzutritt.
ın wir noch weiter gehen und nach den iterirten Trans-
ıationen mit einem complexen Exponenten fragen, dann
den wir überhaupt weder eine analytische, noch eine
ktionalgleichung finden, die zur Bestimmung derselben
en kann.

Die Existenzfrage für die iterirten Trans-
mationen mit einem complexen Exponenten
also auf dem obigen Wege vollständig un-
änglich.

Nach dem obigen Standpunkte, d. h. nach dem Additions-
Multiplicationstheorem wird die iterirte Transformation
jeden Werth des Exponenten bestimmt, wenn gleichzeitig
t nur die Basistransformation

$$T(z_1 \ldots z_n) \equiv T^1(z_1 \ldots z_n) \equiv \left|_{T(t_1 \ldots t_n)}^{1} (z_1 \ldots . z_n)\right.$$

ern auch

$$T^i(z_1 \ldots z_n) \equiv \left|_{T(t_1 \ldots t_n)}^{+\sqrt{-1}} (z_1 \ldots z_n)\right.$$

gegeben ist, weil wir dann haben:

$$\mathop{\Big|}\limits_{T(z_1\ldots z_n)}^{a+b\sqrt{-1}}(x_1\ldots\ldots x_n) \equiv \mathop{\Big|}\limits_{T(z_1\ldots z_n)}^{a} \qquad \mathop{\Big|}\limits_{T_i(z_1\ldots z_n)}^{b}(x_1\ldots\ldots x_n).$$

§ 14. Der erste gruppentheoretisc Fundamentalsatz. Unsere Aufgabe können wir v ständig auflösen mit Hülfe der Gruppentheorie. Die wendbarkeit der gruppentheoretischen Betrachtung der iteri Transformationen mit einem beliebigen Exponenten wird uns klar, wenn wir uns erinnern, dass, wenn nur der griff der iterirten Transformation mit einem beliebigen (ree oder complexen) Exponenten eingeführt und analytisch klärt ist, dann der Inbegriff aller iterirten Transformatic (die allen möglichen Werthen des Exponenten entsprec eine eingliedrige, continuirliche Gruppe bildet. Als P meter dieser eingliedrigen, continuirlichen Gruppe dient Exponent der iterirten Transformationen, die die Elem dieser Gruppe bilden.

Für uns wird als Grundlage unserer Betrachtungen Umkehrung des oben gesagten dienen, nämlich der folg

Fundamentalsatz No. 1. Der Begriff iterirten Transformation mit einem beliebi Exponenten ist dann und nur dann vollstän definirt, wenn es mindestens eine eingli rige, continuirliche Transformationengru giebt, die die Basistransformation unse Iterationen als eine particuläre Transf mation enthält.

Diese Bedingung ist nothwendig und hinreichend. diese Bedingung eine nothwendige Bedingung ist, ist ständig klar.

Es bleibt nur zu zeigen, dass die oben aufgestellte n wendige Bedingung auch hinreichend ist. Wir werden se dass die ganze Frage auf die Auflösbarkeit von gew Funktionalgleichungen zurückgeführt werden kann.

§ 15. Der zweite gruppentheoretische F damentalsatz. Wenn wir auf irgend eine Weise i eingliedrige, continuirliche Gruppe:

$$x_i' = \varphi_i (x_1 \ldots\ldots x_n a)$$
$$i = 1, 2, \ldots. n$$

unden haben, die unsere Basistransformation

$$x_i' = f_i (x_1 \ldots\ldots x_n)$$
$$i = 1, 2, \ldots. n$$

particuläre Transformation enthält, so dass eine Gleichung

$$f_i (x_1 \ldots. x_n) \equiv \varphi_i (x_1 \ldots. x_n \alpha) \quad i = 1, 2, \ldots n$$

ıtisch besteht, so wird die Untersuchung der iterirten nsformationen mit gegebener Basistransformation

$$x_i' = f_i (x_1 \ldots. x_n) \equiv \varphi_i (x_1 \ldots x_n \alpha)$$
$$i = 1, 2, \ldots n$$

urch erleichtert, dass wir jetzt eine infinitesimale Transnation der oben genannten eingliedrigen, continuirlichen ıppe haben, mit Hülfe deren unsere Betrachtungen vereinıt werden.

Fundamentalsatz Nr. 2. Wenn eine eingliege, continuirliche Gruppe die gegebene sistransformation als eine particuläre Transmation enthält, so stellt jede einzelne rticuläre Transformation der eingliedrigen, ntinuirlichen Gruppe eine iterirte Transmation mit der oben genannten Basistransmation dar, wobei zwischen dem Parameter particulären Transformation der Gruppe d dem Exponenten der entsprechenden Iteion eine Gleichung besteht, die unabhängig ı den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ ist, d. h. von .x_n frei ist.

1. Selbstverständlich bleiben Wiederholungen der Basissformation $\quad x_i' = \varphi_i (x_1 \ldots. x_n a)$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

ı der Gruppeneigenschaft in der Gruppe. Unser Satz also bewiesen für den Fall des ganzen, positiven Expoen der Iteration.

2. Mit der Transformation

$$x_i' = \varphi_i (x_1 \dots x_n a)$$
$$i = 1, 2, \dots n$$

gehört auch ihre inverse Transformation der Gruppe
Also hat sowohl die iterirte Transformation $T^{-1}(x_1 \dots$
wie die Basistransformation ihr entsprechendes Element
der Gruppe. Daraus folgt, dass der Satz bewiesen ist
den Fall des ganzen, negativen Exponenten der Iteration

3. Ich frage, ob eine gewisse Transformation, de
N^{te} Wiederholung identisch ist mit der gegebenen particulä
Transformation der Gruppe, existirt und in der Gruppe e
halten ist.

Die Gleichungen der beliebigen Transformation, die
der Gruppe enthalten ist:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(1)} = \varphi_i (x_1 \dots x_n \beta) \\ i = 1, 2, \dots\dots n \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots$$

lauten in der canonischen Form

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_j (x_1^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)}) = \Omega_j (x_1 \dots\dots x_n) \\ j = 1, 2, \dots n - 1 \\ W (x_1^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)}) = W (x_1 \dots\dots x_n) + b \end{array}\right\} \dots\dots\dots$$

Durch N-malige Wiederholung dieser Transformation
halten wir eine neue Transformation

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(N)} = \varphi_i (x_1 \dots x_n \gamma) \\ i = 1, 2, \dots n \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots$$

die in der canonischen Form lautet:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_j (x_1^{(N)} \dots\dots x_n^{(N)}) = \Omega_i (x_1 \dots\dots x_n) \\ j = 1, 2, \dots n - 1 \\ W (x_1^{(N)} \dots\dots x_n^{(N)}) = W (x_1 \dots\dots x_n) + b N \end{array}\right\} \dots\dots\dots$$

Die Gleichungen der gegebenen Transformation e
Gruppe:

$$\left.\begin{array}{l} x_i' = \varphi_i (x_1 \dots x_n \alpha) \\ i = 1, 2, \dots n \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots$$

uten in der canonischen Form:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_j(x_1' \dots x_n') = \Omega_j(x_1 \dots x_n) \\ j = 1, 2, \dots n-1 \\ W(x_1' \dots x_n') = W(x_1 \dots x_n) + a \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (6).$$

Wenn wir voraussetzen $a = N b$ . . . . (7),

i. $b = \frac{a}{N}$, dann ist die erreichte Transformation eine solche ansformation, die gleichzeitig der Gruppe gehört und ren N^{te} Wiederholung mit der gegebenen Transformation entisch ist. Das zeigt uns, dass die iterirte Transformation t der oben genannten Basistransformation und dem Exnenten $\frac{1}{N}$ ebenso wie die Basistransformation ein entrechendes Element in der Gruppe besitzt.

Daraus geht hervor, dass der Satz bewiesen ist für jeden ellen, rationalen Werth des Exponenten, was sich in limite weitert für jeden reellen Werth.

4. Weiter können wir nicht gehen, weil die früheren trachtungen uns die iterirten Transformationen nur mit em reellen Exponenten ergeben (indirekt für rationale erthe, in limite für irrationale) und keine anderen. bleibt für uns ein einziges Mittel: Das alles, was für erirte Transformationen mit einem reellen xponenten bewiesen ist, wollen wir a priori raussetzen für alle übrigen Exponenten. Das eine Willkürlichkeit, welche wir später näher untersuchen rden.

§ 16. Fortsetzung. Jetzt wollen wir den zweiten ll des obigen Fundamentalsatzes beweisen, nämlich dass der Identität:

$$\text{ansf.} \begin{bmatrix} x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_n, p) \\ i = 1, 2, \dots n \end{bmatrix} = \overset{P}{\underset{T(z_1 \dots z_n)}{\Big|}} (x_1 \dots x_n) \dots\dots (1),$$

lche theils bewiesen, theils vorausgesetzt worden ist:

$$P = \mathfrak{p}(p) \dots\dots\dots\dots (2),$$

bei die Gleichung (2) von $x_1 \dots x_n$ vollständig frei ist.

Wir stellen folgende Gleichungen in der canonischen Form a

$$\left.\begin{array}{ll} x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, p). & (x_1' \ldots x_n') = \overline{\Big|}^{\,P}_{T(z_1 \ldots z_n)} (x_1 \ldots x_n) \\ x_i'' = \varphi_i(x_i' \ldots x_n'\, q). & (x_1'' \ldots x_n'') = \overline{\Big|}^{\,Q}_{T(z_1 \ldots z_n)} (x_1' \ldots x_n' \\ x_i'' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, r). & (x_1'' \ldots x_n'') = \overline{\Big|}^{\,R}_{T(z_1 \ldots z_n)} (x_1 \ldots x_n) \end{array}\right\} \ldots\ldots$$

Vermöge der Gruppeneigenschaft und des Additio theorems bestehen die Gleichungen:

$$r = F(p, q) \equiv p + q \;\ldots\ldots (4) \quad R = P + Q \;\ldots\ldots\ldots$$

Beide Gleichungen bestehen unabhängig von den Wert $x_1 \ldots x_n$.

Wenn die Funktion $r = F(p, q)$ mit der Gruppe gege ist, so ist die Funktion $R = \mathfrak{p}(r)$ durch Auflösung der Fu tionalgleichung

$$\mathfrak{p}\{p + q\} = \mathfrak{p}(p) + \mathfrak{p}(q)$$

zu finden. Es ist leicht zu erkennen, dass $\mathfrak{p}(p) = C\, p$, wo C constante Grösse ist.

F u n d a m e n t a l s a t z N°. 2: Z w i s c h e n d e m E p o n e n t e n d e r i t e r i r t e n T r a n s f o r m a t i o n u d e r e n t s p r e c h e n d e n p a r t i c u l ä r e n T r a n s f o r t i o n d e r G r u p p e b e s t e h t e i n e s o l c h e B e z i e h u d a s s d e r E x p o n e n t s i c h v o n d e m P a r a m e d e r c a n o n i s c h e n F o r m d e r o b e n g e n a n n p a r t i c u l ä r e n T r a n s f o r m a t i o n n u r u m e i c o n s t a n t e n F a k t o r u n t e r s c h e i d e t. Das ist n den obigen Untersuchungen leicht zu beweisen.

T h e o r e m. W e n n d i e i t e r i r t e T r a n s f o r m a t m i t p a r t i c u l ä r e n T r a n s f o r m a t i o n d e r G r u p d e r e n P a r a m e t e r i n i h r e r k a n o n i s c h e n F o r i s t, c o i n c i d i r t, d a n n i s t d e r E x p o n e n t d i e i t e r i r t e n T r a n s f o r m a t i o n g l e i c h β/α, w o α P a r a m e t e r d e r j e n i g e n T r a n s f o r m a t i o n (

ruppe ist, mit welcher die Basistransforma-on coincidirt.

§ 17. Fortsetzung: Wir wollen diese Theorie mit r obigen Theorie vergleichen.

Hier entsteht eine Hypothese, nach welcher der arbiträren Transformation $S(x_1 \ldots x_n)$ und der particulären Mannigfaltigkeit der Will-rlichketen die mit Auflösung der Funktional-eichung (1) eintreten, eine einzige continuir-che Gruppe entspricht, die unsere Basis-ansformation mit allen ihren iterirten Trans-rmationen particulär enthält.

Diese Hypothese folgt unmittelbar aus der bekannten entität:

$$\prod_{T(z_1 \ldots z_n)}^{N} (x_1 \ldots . x_n) = W^{-1} \prod_{S(z_1 \ldots z_n)}^{N} W(x_1 \ldots . x_n) \quad \ldots \ldots (1)$$

S $(z_1 \ldots z_n)$ eine arbiträre Transformation ist.

$W(z_1 \ldots . z_n)$ ist eine Lösung der Funktionalgleichung

$$W\,T(x_1 \ldots . x_n) = S\,W(x_1 \ldots . x_n) \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Daraus geht hervor eine gruppentheoretische Hypo-ese: Es giebt eine unendlich grosse Anzahl von llständig von einander verschiedenen, ein-iedrigen, continuirlichen Gruppen, die in ner gewissen, partikulären Transformation t allen ihren Iterationen mit ganzen, sowohl sitiven, wie negativen (und gewissen ratio-len) Exponenten coincidiren.

Z. B. der identischen Basistransformation

$$f(z) \equiv z$$

tspricht unendlich grosse Anzahl von vollständig von ein-der verschiedenen, eingliedrigen, continuirlichen Gruppen z. B.

$$z' = z^{[\cos(2 a \pi) + \sqrt{-1}\,\sin(2 a \pi).]}$$

$$z' = \left[\cos(2 a \pi) + \sqrt{-1}\,\sin(2 a \pi)\right] z.$$

$$z' = \frac{z + \operatorname{tg}(a\pi)}{1 - z \operatorname{tg}(a\pi)},$$

d: wirklich bei allen ganzen Werthen von a coincidiren.

§ 17. Die Farkas'schen Sätze, als ein speciel Fall des „ersten Fundamentalsatzes" von S. für die Theorie der continuirlichen Grupp Jules Farkas[1]) und unabhängig von ihm A. Korkin haben gezeigt, dass

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x)$$

eine blosse Funktion von $\mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x)$ sit.

Wir können also schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x) = \text{þ} \left\{ \mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x) \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

das ist der erste Satz.

In denselben Arbeiten ist noch bewiesen, dass

$$\frac{\frac{\partial}{\partial p} \mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x)}{\frac{\partial}{\partial x} \mathop{\Big|}_{f(z)}^{p} (x)} = \text{þ}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

das ist der zweite Satz.

Der erste Satz ist nichts anderes, als ein specieller F des allgemeinen Satzes, der in den Werken von H. P Sophus Lie: „Vorlesungen über continuirliche Grupp „Theorie der Transformationsgruppen." Erster Abschnitt u dem Namen des „ersten Fundamentalsatzes" eingeführt w

Der ganze Gang des Beweises, den Farkas führt, und der verallgemeinern lässt, unterscheidet sich sehr wenig von in den obengenannten Werken gegebenen Beweise.

Aus dem Additionstheorem geht unter den Voraussetzun

$$\left. \begin{array}{c} x_i^{(p)} = \text{þ}_i\,(p, x_1 \ldots\ldots x_n) \\ i = 1, 2 \ldots\ldots n \end{array} \right\} (4)$$

[1]) Journal de Mathematiques pures et appliques, Serie III, Ban 1884, p. 101—108.

[2]) Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronomiques, Seri Band VI, 1882, p. 228—242 und zwar p. 231—232.

folgende Funktionalgleichung hervor:

$$\mathfrak{p}_i[p+2, x_1 \ldots \ldots x_n] \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{p}_i[p, \mathfrak{p}(q, x_1 \ldots x_n) \ldots\ldots \mathfrak{p}_n(q, x_1 \ldots x_n)] \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{p}_i[q, \mathfrak{p}_1(p, x_1 \ldots x_n) \ldots\ldots \mathfrak{p}_n(p, x_1 \ldots x_n)]$$
$$i = 1, 2, \ldots n \ldots\ldots (5)$$

Wir differenziren diese Funktionalgleichungen partiell Bezug auf p und setzen der Einfachheit halber:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} \mathfrak{p}_i(p, x_1 \ldots x_n = \mathfrak{p}^{(1)}_{i,o}(p, x_1 \ldots x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{p}_i(p, x_1 \ldots x_n) = \mathfrak{p}^{(1)}_{i,k}(p, x_1 \ldots x_n) \end{array}\right\} (6)$$

Dann bekommen wir:

$$\mathfrak{p}^{(1)}_{i,o}(p+q, x_1 \ldots x_n) \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{p}^{(1)}_{i,o}[p, \mathfrak{p}_1(q, x_1 \ldots x_n) \ldots \mathfrak{p}_n(q, x_1 \ldots x_n)] \equiv$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{p}^{(1)}_{i,k}[q, \mathfrak{p}_1(p, x_1 \ldots x_n) \ldots \mathfrak{p}_n(p, x_1 \ldots x_n)]\, \mathfrak{p}^{(1)}_{k,o}(p, x_1 \ldots x_n)$$
$$i = 1, 2, \ldots n \ldots (7).$$

Setzen wir p = o und der Einfachheit halber

$$\mathfrak{p}^{(1)}_{i,o}(o, x_1 \ldots x_n) = \xi_i(x_1 \ldots x_n) \ldots (8)$$
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_i(q, x_1 \ldots x_n) = x^{(q)}_i \\ i = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \ldots (9).$$

Dann erhalten wir:

$$\mathfrak{p}^{(1)}_{i,o}(q, x_1 \ldots x_n) \equiv \xi_i(x^{(q)}_1 \ldots x^{(q)}_1) \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{k=o} \mathfrak{p}^{(1)}_{i,k}(p, x_1 \ldots x_n)\, \xi_k(x_1 \ldots x_n)$$
$$i = 1, 2, \ldots n \ldots\ldots (10).$$

Daraus geht hervor

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x^{(q)}_i}{\partial q} = \xi_i(x^{(q)}_1 \ldots x^{(q)}_n) \\ i = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \ldots (11).$$

Das ist der erste Farkas'sche Satz.

Weiter folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x^{(q)}_i}{\partial q} = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial x^{(q)}_i}{\partial x_k} \\ i = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \ldots\ldots (12).$$

Das ist der zweite Farkas'sche Satz.

Der erste Farkas'sche Satz ist sehr wichtig, weil er a sagt, dass die erste partielle Abgeleitete jedes Element $x_i^{(q)}$ des Systems

$$(x_1^{(q)}\dots x_n^{(q)}) = \mathop{\Big|}\limits^{q}_{T(z_1\dots z_n)} (x_1\dots x_n)$$

in Bezug auf den Exponenten q eine blosse Funktion v n Veränderlichen $x_1^{(q)}\dots\dots x_n^{(q)}$ ist.

§ 19. Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, denen die iterirten Tran formationen unabhängig von der Basistran formation genügen. Aus dem ersten Farkas'schen Sa folgt ein wichtiges System von partiellen Differenti gleichungen zweiter Ordnung, welches jede iterirte Tra formation als Funktion des Systems der Argumente und Exponenten unabhängig von der Wahl der Basistransforn tion erfüllt. Die Elemente $x_1^{(p)}\dots\dots x_n^{(p)}$ sind Funktionen v $(n+1)$ Veränderlichen: $p, x_1\dots x_n$. Das Element $\frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial p}$ lässt sich als blosse Funktion von n Veränderlich $x_1^{(p)}\dots\dots x_n^{(p)}$ darstellen.

Daraus folgt, dass die Jacobi'sche Determinante

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial p}\; x_1^{(p)}\dots\dots x_n^{(p)}\right]}{\partial\;(p\quad x_1\dots\dots x_n)}$$

identisch verschwindet. Endlich erhalten wir ein System v n partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_i^{(p)}}{\partial p^2} & \frac{\partial x_1^{(p)}}{\partial p} & \frac{\partial x_2^{(p)}}{\partial p} \cdots\cdots & \frac{\partial x_n^{(p)}}{\partial p} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(p)}}{\partial p\, \partial x_1} & \frac{\partial x_1^{(p)}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2^{(p)}}{\partial x_1} \cdots\cdots & \frac{\partial x_n^{(p)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(p)}}{\partial p\, \partial x_2} & \frac{\partial x_1^{(p)}}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2^{(p)}}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial x_n^{(p)}}{\partial x_2} \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ \frac{\partial^2 x_i^{(p)}}{\partial p\, \partial x_n} & \frac{\partial x_1^{(p)}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_2^{(p)}}{\partial x_n} \cdots\cdots & \frac{\partial x_n^{(p)}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots. n.$$

§ 20. Reduktion der iterirten Transforma- onen auf die kanonischen Formen. Aus dem eiten Farkas'schen Satze folgt eine lineare partielle Diffe- tialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial p} = \xi_1 (x_1 \ldots x_n) \frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial x_n} \quad \ldots . \quad (1)$$

raus $x_i^{(p)}$ als eine der Lösungen dieser partiellen Diffe- tialgleichung hervorgeht, die dabei dem simultanen System ügt:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial x_i^{(p)}}{\partial p} = \xi_i \left(x_1^{(p)} \cdots x_n^{(p)}\right) \\ i = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Nach Auflösung des simultanen Systems

$$\frac{d x_1^{(p)}}{\xi_1 \left(x_1^{(p)} \ldots x_n^{(p)}\right)} = \frac{d x_2^{(p)}}{\xi_2 \left(x_1^{(p)} \ldots x_n^{(p)}\right)} = \ldots = \frac{d x_n^{(p)}}{\xi_n \left(x_1^{(p)} \ldots x_n^{(p)}\right)} = \frac{d p}{1} \quad (3)$$

er der Form:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 \left(x_1^{(p)} \ldots. x_n^{(p)}\right) = C_1 \\ \Omega_2 \left(x_1^{(p)} \ldots. x_n^{(p)}\right) = C_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Omega_{n-1} \left(x_1^{(p)} \ldots. x_n^{(p)}\right) = C_{n-1} \\ W \left(x_1^{(p)} \ldots. x_n^{(p)}\right) = C_n + p \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

erhalten wir ein Lösungssystem:

$$\left.\begin{array}{l}
\Omega_1 (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = \Omega_1 (x_1 \dots . x_n) \\
\Omega_2 (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = \Omega_2 (x_1 \dots . x_n) \\
- - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - \\
\Omega_{n-1} (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = \Omega_{n-1} (x_1 \dots . x_n) \\
W (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) - p = W (x_1 \dots . x_n)
\end{array}\right\} \dots\dots\dots$$

Dieses Gleichungssystem definirt uns $x_1^{(p)} \dots x_n^{(p)}$ in Form gewisser Funktionen von $p, x_1 \dots x_n$, die, wie leicht beweisen ist, auch der partiellen Differentialgleichung genügen.

Daraus folgt

Theorem: Wenn es möglich ist, der gegeben Basistransformation $T(z_1 \dots z_n)$ eine eingliedri continuirliche Gruppe auf solche Weise zuz ordnen, dass sie unsere Basistransformati als eine particuläre Transformation enthä so ist es immer möglich durch Integration ei simultanen Systems von Differentialgleichung solche Funktionen

$$\Omega_1 (x_1 \dots x_n) \dots . \Omega_{n-1} (x_1 \dots x_n)\, W (x_1 \dots x_n)$$

zu erhalten, dass unter den Voraussetzung

$$(x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}) = T (x_1 \dots x_n)$$

$$(x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = \Big|_{T(z_1 \dots z_n}^{\,p} (x_1 \dots x_n)$$

folgende Gleichungssysteme:

$$\Omega_1 (x_1^{(p)} \dots x_n^{(p)}) = \Omega_1 (x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}) = \Omega_1 (x_1 \dots . x_n)$$
$$\Omega_2 (x_1^{(p)} \dots x_n^{(p)}) = \Omega_2 (x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}) = \Omega_2 (x_1 \dots . x_n)$$
$$- - - - -$$
$$- - - -$$
$$- - -$$
$$\Omega_{n-1} (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = \Omega_{n-1} (x_1^{(1)} \dots . x_n^{(1)}) = \Omega_{n-1} (x_1 \dots . x_n)$$
$$W (x_1^{(1)} \dots . x_n^{(1)}) = W (x_1 \dots . x_n) + 1$$
$$W (x_1^{(p)} \dots . x_n^{(p)}) = W (x_1 \dots . x_n) + p$$

entisch bestehen. Wir sehen, dass diese Formeln nichts leres sind, als ein specieller Fall der Anwendung des ;ociationssatzes und zwar in seiner einfachsten Form, die e Verallgemeinerung des Abelschen Problem ist.

Wir dürfen nicht vergessen, dass in unserer Basistransmation unendlich viele wesentlich von einander verschiedene gliedrige, continuirliche Gruppen coincidiren. Jeder einnen Gruppe entsprechen zunächst eine infinitesimale Transmation, weiter simultane Gleichungssysteme, endlich entechende Form des Associationssatzes.

§ 21. Der dritte gruppentheoretische Fundantalsatz. Es bleibt noch übrig die Rolle der infiniimalen Transformation, die der eingliedrigen continuirlichen ıppe entspricht, näher zu untersuchen. Wenn der Basisnsformation $T(z_1 \ldots z_n)$ eine eingliedrige, continuirliche ıppe zugeordnet ist, die sie als eine partikuläre Transmation enthält, so ist auch die infinitesimale Transforion dieser Gruppe gegeben. Daraus geht hervor, dass der sdruck:

$$\lim_{N=\infty} \prod^{n} (x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \left[\begin{array}{l} z'_i = x_i + \frac{K}{N} \xi_i (z_1 \ldots z_n) \\ i = 1, 2, \ldots\ldots n \end{array} \right]$$

e einzelne Transformation unserer eingliederigen Gruppe stellt, wenn K jeden beliebigen reellen oder complexen rth erreichen kann. Nach unseren Theorien soll unter selben Voraussetzung derselbe Ausdruck jede mögliche irte Transformation mit einem vollständig beliebigen Exenten darstellen.

Fundamentalsatz: Wenn es möglich ist, der gebenen Basistransformation eine solche gliedrige, continuirliche Transformationsuppe zuzuordnen, die sie als eine partikuläre ansformation enthält, so ist mit derselben uppe auch ein System von Funktionen ge-

geben: $\xi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \xi_n(x_1 \ldots x_n)$ von solcher B
schaffenheit, dass folgende Identitäten gelt

$$T(x_1 \ldots x_n) = \lim_{N=\infty} \prod^{N} (x_1 \ldots x_n)$$

$$\left[z_i' = z_i + \frac{a}{N} \xi_i (z_1 \ldots z \right. \atop i = 1, 2, \ldots n$$

$$\prod^{p}_{T(z_1 \ldots z_n)} x_1 \ldots x_n) = \lim_{N=\infty} \prod^{N} (x_1 \ldots x_n)$$

$$\left[z_i' = z_i + \frac{ap}{N} \xi_i (z_1 \ldots z_n) \right. \atop i = 1, 2, \ldots n$$

Hier ist a eine constante Grösse, die von der Wahl
Systems $\xi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \xi_n(x_1 \ldots x_n)$ abhängig ist und gle
1 gesetzt werden kann. Wir müssen aber bemerken, da
dieser Satz nur scheinbar einfach ist, w
seine Anwendbarkeit durch den Werth m
(ap), der nicht zu gross sein darf, beschrän
ist. Wenn mod. (ap) grösser wird als eine dem Sys
$(x_1 \ldots x_n)$ entsprechende Zahl, so wird der Ausdruck

$$\lim_{N=\infty} \prod^{N} (x_1 \ldots x_n)$$

$$\left[z_i' = z_i + \frac{ap}{N} \xi_i (z_1 \ldots z_n) \atop i = 1, 2, \ldots n \right]$$

überhaupt keine Bedeutung haben. Das ist analog der n
wendbarkeit des gewöhnlichen Taylor'schen Satzes:

$$f(2) = f(a) + \frac{z - a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots$$

die dann und nur dann möglich ist, wenn mod. $(z - a)$ ni
zu gross ist.

Zweiter Theil.

Allgemeine Convergenztheorie für iterirte Funktionen.

VI. Allgemeine Convergenzfrage für die rirten Funktionen mit einer eindeutigen Basisfunktion.

§ 23. Begriff der Iterationskette. Die Grössen $z_1\, z_2\, z_3 \ldots\ldots z_1 = f(z_0),\ z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2), \ldots\ldots$ wo ıktion f(z) eine eindeutig bestimmte Funktion ist, bilden e unendliche Reihe. Wir versuchen diese Reihe möglichst veranschaulichen. Dazu werden wir die Grössen $z_1\, z_2\, z_3 \ldots$ in einer und derselben Complexenzahlenebene stellen. Dazu wählen wir eine Ebene und stellen alle rthe $z_0\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots$, die im allgemeinen complexe Zahlen l, in bekannter Weise geometrisch dar. Alle Punkte $Z_1\, Z_2\, Z_3 \ldots$ die geometrische Bilder der Grössen $z_0\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots\ldots$ l, verbinden wir nacheinander in der obengenannten Reihen-e durch geradlinige Sehnen. Auf diese Weise entsteht e im allgemeinen gebrochene Linie mit den Ecken $Z_0\, Z_1$ $Z_3 \ldots$ die wir eine Iterationskette des Anfangs-nktes Z_0 (des Anfangswerthes z_0) nennen werden. em Punkte der Complexenzahlenebene entspricht eine rationskette, die einer gegebenen Basisfunktion f(z) zu-rdnet ist.

§ 24. Iterationskette auf der Kugelfläche. sehen, dass die Iterationsketten, die den verschiedenen isfunktionen zugeordnet sind, unendlich verschiedene sind ihre Form unzugänglich ist für irgend eine allgemeine oretische Betrachtung. Diese Thatsache complicirt sich ch den Umstand, dass auch der unendlich ferne Punkt Complexenzahlenebene eine Ecke der Iterationskette bilden n. Aber dieser Umstand kann vereinfacht werden, indem Anschaulichkeit dadurch wieder hergestellt wird, dass zur geometrischen Darstellung der complexen Zahlen it die Ebene, sondern die Kugelfläche wählen. Wenn der lpunkt der Complexenzahlenebene der Südpol der Com-tenkugelfläche ist, dann entspricht der Mannigfaltigkeit unendlich fernen Punkte der Ebene der Nordpol der

Kugel. Diese geometrische Darstellung wird für uns u wichtiger, als die Kette in dem Falle, wo $\lim\limits_{n=\infty} z_n = \infty$ in jedem anderen Falle (d. h. wo $\lim\limits_{n=\infty} z_n$ eine bestimmte liche Zahl ist) derselben Betrachtung unterworfen werden k

Eine Iterationskette $Z_0\, Z_1\, Z_2\, Z_3 \ldots\ldots$ in der Ebene s sich auf diese Weise dar durch eine Iterationskette $\zeta_0\, \zeta_1\, \zeta_2\, \zeta$ auf der Kugelfläche.

§ 25. **Verschiedene Formen der Iteratio ketten. Iterativ periodische und aperiodis Funktionen.** Die Anzahl der Elemente $z_0\, z_1\, z_2\, z_3$ bezw. $\zeta_0\, \zeta_1\, \zeta_2\, \zeta_3 \ldots\ldots$ ist unendlich gross, also haben wir einer endlichen geschlossenen Fläche eine endlich grosse Anzahl von Punkten. Das ist nur in zwei Fällen möglich:

1. Die Elemente $z_0\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots\ldots$ sind nicht alle u einander verschieden und bilden unabhängig von Lage Anfangspunktes eine endliche Anzahl wesentlich verschied Grössen, d. h. dass unabhängig von dem Anfangswerthe identisch ist $z_0 \equiv z_m$, also auch

$$z_k \equiv z_{k+m} \equiv z_{k+2m} \equiv z_{k+3m} \equiv \ldots\ldots \equiv z_{k+n.m} \equiv \ldots\ldots \equiv$$
$$\equiv z_{k-m} \equiv z_{k-2m} \equiv z_{k-3m} \equiv \ldots\ldots \equiv z_{k-n.m} \equiv \ldots\ldots$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

In diesem Falle ist die Basisfunktion von solcher Beschaffenheit, dass ihre m^{te} Ite tion mit dem Argument selbst identisch solche Funktionen werden wir iterativ-per dische Funktionen, mit der Periode m nenn In diesem Falle entspricht jedem Punkte ζ_0 eine geschlos m-eckige polygonale Iterationskette, die nur in speci Lagen in eine μ-eckige polygonale Kette ausarten kann, aber m durch μ theilbar ist.

2. Wenn im Allgemeinen jedem Punkte der Kugelfl eine unendliche Anzahl von Elementen $\zeta_1\, \zeta_2\, \zeta_3 \ldots\ldots$ entspr die alle von einander verschieden sind, so muss auf der Ku fläche wenigstens ein (augenscheinlich dem Anfangspu ζ_0 zugeordneter) solcher Punkt P existiren, dass in se

ngebung sich eine unendlich grosse Anzahl von Punkten $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ unendlich dicht gruppiert.

Unter dieser Voraussetzung können wir noch zwei Möglichkeiten bemerken: entweder werden sich die Glieder der Reihe $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ von einer gewissen Stelle ab alle unendlich dicht uppiren, oder sich in zwei Gruppen zertheilen. Die Elente der ersten Gruppe gruppiren sich unendlich dicht in Umgebung des Punktes P. Für Elemente der zweiten uppe müssen wir noch einen Punkt P_1 voraussetzen, in ssen Umgebung sich die Punkte der Reihe $\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ endlich dicht gruppiren. Unter dieser Voraussetzung können r noch zwei Möglichkeiten bemerken: entweder zertheilen h die Glieder der Reihe $\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ von einer gewissen elle in zwei Gruppen von Punkten, wo die Elemente der en Gruppe sich unendlich dicht in der Umgebung des nktes P_0, die Elemente der zweiten Gruppe sich unendlich ht in der Umgebung des Punktes P_1 gruppiren; oder die eder der Reihe $\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ zerfallen von einer gewissen lle an in drei Gruppen. Die Elemente der ersten gruppiren h unendlich dicht in der Umgebung des Punktes P_0, der zweiten gruppiren sich unendlich dicht in der Umbung des Punktes P_1; für die Elemente der dritten Gruppe ssen wir einen dritten Punkt P_2 annehmen, in dessen Umbung entweder alle Elemente dieser dritten Gruppe sich endlich dicht gruppiren oder nicht, dann entsteht eine rte Gruppe etc.

Im Allgemeinen also giebt es nur zwei Möglichkeiten:

1. Von einer gewissen Stelle an zertheilen sich die mente der Reihe $\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$ in eine endliche Anzahl Gruppen, deren Elemente sich unendlich dicht in den gebungen der entsprechenden „Grenzpunkte" gruppiren.

2. Von einer gewissen Stelle an ist es möglich solche ppen von Elementen auszuwählen, die sich innerhalb der gebung des entsprechenden Grenzpunktes unendlich dicht ppiren, aber die Anzahl dieser Gruppen kann unendlich chsen, ohne die Reihe zu erschöpfen.

§ 26. Die Grenzpunkte der Iterationskette. eorem Nr. 1. Wenn einem Punkte ζ_0 eine end-

liche Anzahl der Grenzpunkte $P_1 P_2 \ldots P_{m-1}$ zugeordnet ist, welche von einer gewiss Stelle die Reihe $\zeta_0\, \zeta_1\, \zeta_2\, \zeta_3 \ldots\ldots$ vollständig erschöpf dann sind alle Punkte $P_1 P_2 \ldots P_{m-1} P_m$ von d Werthe ζ_0 unabhängig, sie sind consta Grössen, Lösungen der Gleichung $f_m(z) - z =$ die durch die Beziehungen $p_2 = f(p_1)$; $p_3 = f(p_2)$; $p_m = f(p_{m-1})$, $p_1 = f(p_m)$ verbunden sind.

Denken wir uns, dass innerhalb der Umgebung e gewissen Grenzpunktes P_1 sich die Elemente $\zeta_{\nu_1}\, \zeta_{\nu_2}\, \zeta_{\nu_3}$ unendlich dicht gruppiren, wo $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots\ldots$ ist.

Die Differenzen $\nu_{i+1} - \nu_i$ können nur im Anfange oscilli wenn aber i gross genug ist, so sind die Differenzen s gleich m. Wir können mit beliebig kleinem Radius ε die Punkte $P_1 P_2 \ldots\ldots P_{m-1} P_m$ Kreise construiren und wäh eine so grosse Zahl N_ε, dass für jedes $\sigma \gtrless N_\varepsilon$ der Pu z_σ innerhalb eines dieser Kreise liegt. Das zeigt, dass Unterschied $\nu_{i+1} - \nu_i$ eine bestimmte und zwar eine consta Grösse ist, die gleich der Anzahl der Grenzpunkte d. i. m

Wäre dieser Unterschied kleiner oder grösser als dann gäbe es eine kleinere oder grössere Anzahl als m Grenzpunkten $P_1\ P_2 \ldots\ldots$ Wäre dieser Unterschied n constant in limite, oder schon von einer gewissen Stelle so würde die Anwendung des Additionstheorems hier ei Widerspruch zeigen. Daraus geht hervor, dass in limite

$$f_m \cdot f_n(z) - f_n(z) = 0 \qquad \lim n = \infty .$$

Aber die Gleichung $f_m(t) - t = 0$ ist keine Id tität, also muss $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)$ eine constante Grösse s und zwar eine Lösung der Gleichung $f_m(t) - t = 0$.

Wenn die Punkte ζ_q, ζ_{q+m}, ζ_{q+2m}, ζ_{2+3m}, $\ldots$ sich der Umgebung des Punktes P_1 unendlich dicht gruppi dann müssen die Punkte ζ_{q+1}, ζ_{q+m+1}, ζ_{q+2m+1}, ζ_{q+3m+} auch sich unendlich dicht in der Umgebung des Pun $f(P_1)$ gruppiren (wenn die Funktion $f(z)$ in dem Punkte eine stetige Funktion ist; aber die Stetigkeit der Funk $f(z)$ in dem Punkte P_1 eine conditio sine qua non ist, u welcher Punkt P_1 ein Grenzpunkt sein kann). Wir se

o, dass der Punkt $f(P_1)$ sich in der Gruppe der Punkte ..P_m befinden muss. Wir können setzen $P_2 = f(P_1)$; eben solche Weise erhalten wir $P_3 = f(P_2)$; $P_4 = f(P_3)$; $P_m = f(P_{m-1})$, $P_1 = f(P_m)$.

Bemerkung. Alle Wurzeln der Gleichung $f_m(t) - t = o$ nen wir in Gruppen zertheilen auf folgende Weise:

$$
\begin{array}{l}
t_1,\ f(t_1),\ f_2(t_1) \ldots\ldots f_{m-2}(t_1),\ f_{m-1}(t_1) \\
t_2,\ f(t_2),\ f_2(t_2) \ldots\ldots f_{m-2}(t_2),\ f_{m-1}(t_2) \\
t_3,\ f(t_3),\ f_2(t_3) \ldots\ldots f_{m-2}(t_3),\ f_{m-1}(t_3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Die Gruppe $P_1 P_2 \ldots P_{m-1} P_m$ muss identisch t einer dieser Gruppen sein; mit welcher aber identisch wird, das ist eine Frage, e ebenso von der Natur der ausgewählten uppe dieses Systems, wie von der Natur der ge des Anfangspunktes ζ_0 abhängig ist.

Die Unabhängigkeit der Gruppe von den Grenzpunkten $P_2 \ldots P_{m-1} P_m$ von der Lage von ζ_0 zeigt sich nur da-ch, dass sie eine constante Gruppe für einen gewissen eich ist.

Die ganze Kugelfläche zertheilt sich in biete, wo zu dem Inneren eines jeden ein-lnen Gebietes eine entsprechende Gruppe r Grenzpunkte $P_1 \ldots P_m$ gehört. (Die Anzahl ist auch von der Lage des Gebietes abhängig.)

Theorem Nr. 2. Wenn einem Punkte ζ_0 der gelfläche eine unendliche Anzahl der Grenz-nkte $P P_1 P_2 \ldots$ entspricht, so können diese nkte dann und nur dann von dem Anfangs-nkte ζ_0 abhängig sein, wenn zwischen diesen enzpunkten $P P_1 P_2 P_3 \ldots$ sich der Anfangs-nkt ζ_0 selbt befindet. Sei $\nu_1 \nu_2 \nu_3, \nu_4 \ldots$ die Reihe aufeinander folgenden Indices, deren entsprechende ıkte $\zeta_{\nu_1} \zeta_{\nu_2} \zeta_{\nu_3} \ldots$ sich unendlich dicht in der Umgebung ies gewissen Grenzpunktes P gruppiren. Die Differenz $_{i+1} - \nu_i$ muss mit i unendlich wachsen, weil im Falle, wenn

$\lim\limits_{i=\infty}(\nu_{i+1}-\nu_i)$ eine endliche Zahl ist, eine endliche Anza der Grenzpunkte vorhanden wäre, was der Voraussetzu widerspricht. Dabei aber nähert sich die Differenz:

$$f_{\nu_{n+1}}(z)-f_{\nu_n}(z)\equiv f_{\nu_{n+1}-\nu_n}f_{\nu_n}(z)-f_{\nu_n}(z)$$

mit unendlich wachsendem n unendlich der Null. W müssen hier feststellen, ob die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}[f_{\nu_{n+1}-\nu_n}(t)-t]=o$$

in limite einen Identitätscharakter hat, oder nicht. Dies Thatsache ist aber von der Lage des Anfang punktes ζ_0 vollständig unabhängig. Es komm nur auf die Natur der Basisfunktion an.

Wenn diese Gleichung in limite eine Identität bild dann wird in limite $f_{\nu_{n+1}-\nu_n}(t)-t=o \qquad n=\infty.$

Aber $\nu_{n+1}-\nu_n$ wächst mit n ins Unendliche, also h t selbst einen Grenzpunktcharakter und mu sich innerhalb der Reihe der Grenzpunkte b finden.

Also befindet sich der Anfangspunkt ζ_0 innerhalb d Reihe $P P_1 P_2 P_3 \ldots.$ Wenn aber die obengenannte Gl chung $f_{\nu_{n+1}-\nu_n}(t)-t=o$ in limite keine Identität bild so müssen alle Grenzpunkte als Lösungen der obengenannt Gleichung constante Grössen sein. Sie sind also v ζ_0 unabhängig, oder besser gesagt, abhängig nicht v der Lage des Punktes ζ_0, sondern von der Lage des G bietes, dem der Punkt ζ_0 angehört.

§ 27. Iterativ periodische und iterat aperiodische Funktionen. Iterationskette Daraus ergiebt sich eine Classification der Funktionen na ihren iterativen Eigenschaften in zwei Gruppen: 1. iterat periodische, 2. iterativ aperiodische Funktionen. Die iterat aperiodischen Funktionen haben keine reelle Periode, ab dadurch ist eine complexe Periode nicht ausgeschlossen. I Iterationskette jedes beliebigen Punktes ζ_0 in dem Fal einer iterativ periodischen Basisfunktion, die eine rationa

iode hat, ist eine geschlossene, polygonale Linie mit einer lichen Anzahl von Ecken. Die Iterationskette jedes beigen Punktes ζ_0, die einer iterativ periodischen Funktion einer irrationalen Periode entspricht, bildet eine unendlange, polygonale Linie, deren Ecken überall eine gee Curve dicht erfüllen, die dem Anfangspunkte ζ_0 geordnet ist, und zwar vollständig oder theilweise. Iterationskette eines beliebigen Punktes ζ_0, die einer ativ aperiodischen Basisfunktion entspricht, ist nicht so ach, wie im vorigen Falle. Es giebt eine gewisse Mannigkeit von Gestalten der Iterationsketten, die nicht von Lage des Punktes ζ_0, sondern von der Lage des Gebietes, derselbe angehört, abhängig ist. Zuerst betrachten wir he Punkte, deren Iterationsketten entweder in einen elnen Punkt ausarten oder in eine geschlossene, polyale Linie oder in eine sigmatische Linie (d. h. die ine geöffnete Kette zerfallen, deren letzte Ecke die erste e einer geschlossenen polygonalen Linie bildet). Alle nkte, deren Iterationsketten in eine gelossene m-eckige polygonale Linie ausarten, rden wir Koenigs'sche Convergenzpunkte Ordnung nennen (weil H. G. Koenigs[1]) diese tsachen näher betrachtet hat). Alle Punkte, deren rationsketten in eine sigmatische polyale Linie mit n freien Ecken und einem eckigen geschlossenen Polygon ausarten, rden wir isolirte Żórawski'sche Punkte n n^{ten} Grad nennen, die dem entsprechenden eckigen geschlossenen Polygon (dessen Ecken nigs'sche Convergenzpunkte m^{ter} Ordnung sind) zugenet sind (weil H. K. Żórawski in seiner Arbeit bieżności iteracyi" (polnisch) (Ueber die Convergenz der ation[2]) diese Punkte näher besprochen hat). Alle anderen

---

[1]) Bulletin de Sciences Mathematiques et Astronomiques, Serie II, l VII, 1883, Première Partie, p. 239—357.

[2]) Abhandlungen der math., naturw. Fakultät der Akademie in au. Band XXVI, p. 271—288. Sonderabdruck 1893. Verlag der lemie, 1893 und zwar p. 6—8; 8—12; 12—18.

Punkte, die keine isolirten Punkte sind, haben Iterationskett
die unendlich viele verschiedene Ecken haben, die sich e
weder alle in der Umgebung eines gewissen constan
Punktes gruppiren (und ein spiralförmiges oder ein einfa
bogenförmiges oder ein vielfach bogenförmiges, d. i. in
wisse Anzahl bogenförmiger Bilder zerfallendes Bild d
stellen) oder die in eine endliche Anzahl von Iterationsket
von oben genannter Beschaffenheit zerfallen, oder aber e
lich bildet die Iterationskette eine unendliche polygonale Li
die einer Curve eingeschrieben ist, die si
assymptotisch einer gewissen von der Basi
funktion f(z) abhängigen und von der Lage d
Anfangspunktes unabhängigen Curve nähe

Unter den algebraischen, rationalen Funktionen [1]) gi
es nur eine einzige, die eine iterativ periodische Funkt
sein kann, nämlich die allgemeine lineare Funktion

$$\frac{Az+B}{Cz+D}$$

weil alle ihre Iterationen ebenso lineare Funktionen si
Diese nothwendige Bedingung ist aber keine hinreiche
Bedingung. Diese Bedingung ist in der Notiz des H.
Polignac [2]) in der Form:

$$\frac{(A+D)^2}{AD-BC} = 4\cos^2\varphi, \text{ wobei } \frac{\varphi}{\pi} \text{ eine rationale Zahl i}$$

$$\text{d. i. } \frac{(A+D)^2}{AD-BC} = 4\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu} \dots\dots\dots\dots\dots$$

wo μ und λ ganze, theilerfremde Zahlen sind. Diese B
dingung ist auch in einer anderen Form darstellbar.

Zwischen den algebraischen, rationalen Funktionen gie
es überhaupt keine iterativ periodische Funktion mehr, w
der Grad der iterirten Funktion, wie es H. E. Netto i
seinen „Vorlesungen über Algebra“ [3]) zeigt, stets steig

[1]) Siehe Babbage, An essay towards the Calculus of Functions l
Leopold Léau, „Sur un probléme d'iteration.“ Bulletin de l
Société Mathematique de France. Paris. Tome XXVI, 1898, p. 5—

[2]) Bulletin de la Société Mathematique de France. Tome V, 18
p. 69—70.

[3]) Erster Band. Leipzig, 1896, p. 321—323.

s Beispiel einer iterativ periodischen Funktion mit einer tionalen ganzen Periodicität kann uns eine algebraische, ationale Funktion dienen, die durch die Identität

$$\frac{F f(z) - F(z)}{f(z) - z} = o,$$

n $F(z)$ eine algebraische, ganze vom Grade N Funktion n z ist, definirt ist, wobei die Zahl N die Periodicität ist.

Dadurch ist es aber nicht ausgeschlossen, dass diese nktionen, die iterativ aperiodisch sind, in Wirklichkeit e complexe Periodicität haben können.

Z. B. alle Funktionen:

$$2z^2 - 1;\ 2z^2 + 1,\ \frac{2z}{1 - z^2},\ \frac{2z}{1 + z^2},\ \frac{Az^4 + (2z - 1)}{1 + A(2z^2 - z^4)} \ldots\ldots$$

en eine complexe Periode $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lg 2}$.

§ 28. Classification der Convergenzpunkte. ındamentalsatz. Alle Punkte, die der Gleiung $f(z) - z = o$ genügen, zerfallen in drei ıtegorien: 1. Convergenzpunkte, die nur r Basisfunktion $f(z)$ zugeordnet sind, aber ine Convergenzpunkte der inversen Basisnktion $f_{-1}(z)$ sind. 2. Convergenzpunkte, e nur der inversen Basisfunktion $f_{-1}(z)$ zuordnet sind, aber keine Convergenzpunkte r Basisfunktion $f(z)$ sind. 3. Convergenznkte, die gleichzeitig der Basisfunktion $f(z)$ d der inversen Basisfunktion $f_{-1}(z)$ zugelnet sind.

Wir bezeichnen die Punkte, die der ersten Kategorie ören, als positive Convergenzpunkte; die Punkte, i der zweiten Kategorie gehören, als negative Conrgenzpunkte, endlich die Punkte, die der dritten egorie gehören, als singuläre Convergenzpunkte. erseits erscheint es nothwendig, die ganze Frage auf eine ndlich kleine Umgebung des Convergenzpunktes zu bec·änken, andrerseits müssen wir uns beschränken auf dieegen Fälle, wo die Basisfunktion $f(z)$ eine differenzirbare

Funktion ist. Wir wollen zunächst die Thatsachen betrachte nach den bekannten Methoden analog den Betrachtungen d H. Netto. Siehe „Vorlesungen über Algebra“ [1]). Denk wir uns, dass der Punkt z so nahe bei dem Punk $x: f(x)-x=o$ ausgewählt ist, dass man die Funktion f(in eine Reihe nach den Potenzen von $z-x$ entwickeln kan Hier giebt es folgende Fälle:

Der Punkt x ist ein gewöhnlicher Punkt der Funkti $f(z)$, also in einer gewissen Umgebung von ihm giebt es:

$$f(z)=x+\frac{(z-x)}{1!}f^{(1)}(x)+\frac{(z-x)^2}{2!}f^{(2)}(x)+\ldots$$

Setzen wir voraus $|f^{(1)}(x)|$ sei von Null verschied und die Differenz $(z-x)$ so klein, dass es möglich ist, schreiben:

$$f(z)=x+\frac{(z-x)}{1!}f^{(1)}(x)\quad\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$z_1-x=(z-x)f^{(1)}(x)\quad\ldots\ldots\ldots$$

Hier giebt es drei Möglichkeiten: a) $|f^{(1)}(x)|<$ b) $|f^{(1)}(x)|>1$; c) $|f^{(1)}(x)|=1$.

a) $|f^{(1)}(x)|<1$. Wenn $|f^{(1)}(x)|<h<1$ ist, dann $|z_1-x|<h|z-x|$. Auf ebensolche Weise wird $|z_2-x|<$ $|z_1-x|$, weil der Punkt z_1 noch näher an x als z lie wird; ebenso wird $|z_3-x|<|z_2-x|h$; $|z_4-x|<|z_3-$ ..... $|z_n-x|<h|z_{n-1}-x|$ d. i. $|z_n-x|<h^n|z-x|$ limite $|z_n-x|=o$.

W e n n $|f^{(1)}(x)|<1$ i s t, d a n n w i r d j e d e R e i $z_1 z_2 z_3 \ldots$, d e r e n e i n E l e m e n t g e n ü g e n d n a h e d C o n v e r g e n z p u n k t e x l i e g t, c o n v e r g e n t, w j e d e s f o l g e n d e E l e m e n t n o c h n ä h e r d e m P u n x l i e g t, a l s o a l l e d i e s e E l e m e n t e s i c h u n e r l i c h d i c h t i n d e r U m g e b u n g d e s P u n k t e g r u p p i r e n u n d e i n b o g e n f ö r m i g e s o d e r s p i r a l f ö r m i g e s C o n v e r g e n z b i l d g e b e n, j e n a d e m $f^{(1)}(x)$ r e e l l p o s i t i v o d e r c o m p l e x (a u c h r n e g a t i v) i s t. Wenn $f^{(1)}(x)$ eine complexe Zahl ist

[1]) Dr. Eugen Netto, Vorlesungen über Algebra. Erster B Leipzig, 1896.

bei $\arg f^{(1)}(x)$ ist rational gegen π (oder wenn $f^{(1)}_{(x)}$ eine reelle, gative Zahl ist), dann zerfällt das spiralförmige Convergenzd in ein endliches, reguläres Büschel von bogenförmigen nvergenzbildern. Das alles ist unmöglich in dem Falle, $\arg f^{(1)}(x):\pi$ eine irrationale Zahl ist, weil dann das spiralmige Convergenzbild untheilbar bleibt.

b) $|f^{(1)}(x)|>1$. Wenn $|f^{(1)}(x)|>H>1$ ist, dann ist $-x|>H|z-x|$ also steht der Punkt z_1 weiter von x als z. Wenn er nicht zu weit liegt, dann wird noch $-x|>H|z_1-x|$ also liegt der Punkt z_2 noch weiter x. Die Reihe $z_1\ z_2\ z_3\ \ldots$ entfernt sich mehr und mehr n Punkte x, und das wird so lange dauern, bis die Formel $-x)=(z_{n-1}-x)f^{(1)}(x)$ schon unrichtig wird. Die genden Glieder können sich entweder noch weiter entfernen r nicht. Jedenfalls kann die Reihe $z_k,\ z_{k+1},\ z_{k+2},\ \ldots$ dem Punkte x nur so lange nähern, bis die Formel $-x=(z_{n-1}-x)f^{(1)}(x)$ richtig wird, dann entfernen sich folgenden Elemente mehr und mehr, also ist der Punkt ür die Reihe $z\ z_1\ z_2\ z_3\ \ldots$ unzugänglich. Wir sehen so, dass die Punkte x, wo $|f^{(1)}(x)|<1$ ist, sich f(z) als Convergenzpunkte verhalten, wenn gegen $|f^{(1)}(x)|>1$, so sind sie keine Convergenznkte für f(z).

Wir haben vorausgesetzt, dass der Punkt x ein gewöhner Punkt der Funktion f(z) ist, also innerhalb einer gesen Umgebung des Punktes x gelten gleichzeitig die henentwicklungen:

$$=x+\frac{(z-x)}{1!}f^{(1)}(x)+\frac{(z-x)^2}{2!}f^{(2)}(x)+\frac{(z-x)^3}{3!}f^{(3)}(x)+\ldots$$

$$z)=x+\frac{(z-x)}{1!}f_{-1}^{(1)}(x)+\frac{(z-x)^2}{2!}f_{-1}^{(2)}(x)+\frac{(z-x)^3}{3!}f_{-1}^{(3)}(x)+.$$

Aber es ist $f^{(1)}(x)\,.\,f_{-1}^{(1)}(x)=1$; daraus folgt, dass bei $(x)|<1$ ist $|f_{-1}^{(1)}(x)|>1$ und bei $|f^{(1)}(x)|>1$ ist $|f_{-1}^{(1)}(x)|<1$.

Also, wenn der Punkt x ein Convergenzpunkt für f(z) t dann ist er kein Convergenzpunkt für $f_{-1}(z)$, und umgeert, wenn der Punkt x ein Convergenzpunkt für $f_{-1}(z)$ ist, n ist er kein Convergenzpunkt für f(z). Also diese

Punkte x, die der Gleichung $f(x) - x$ genüge
sind positive Convergenzpunkte, wenn $|f^{(1)}(x)| <$
und negative Convergenzpunkte, wenn $f^{(1)}(x)| > 1$ i

§ 29. Fortsetzung. Es bleibt noch übrig, den F
wo $|f^{(1)}(x)| = 1$ ist, zu betrachten. Dieser Fall bildet a
ein ganz specielles Problem, deshalb wollen wir die C
tinuität der Betrachtungen unterbrechen und zu den Fäl
übergehen, wo $f^{(1)}(x)$ entweder 0 oder ∞ ist, d. i. wo
Punkt ein „merkwürdiger" Punkt (nach Klein) oder ein „V
zweigungspunkt" ist. Der Punkt x ist ein „merkwürdig
Punkt, wenn die Funktion f(z) in der Umgebung des Punkte
in der Form:

$$f(z) - x = \frac{(z-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(z-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x) + \ldots$$

darstellbar ist, wo k eine ganze und selbstverständlich p
tive Zahl ist. Dann ist selbstverständlich, dass der Punk
ein Convergenzpunkt mit positiver Bedeutung ist. Der Pu
x ist ein „Verzweigungspunkt" der Funktion f(z), wenn
Funktion f(z) in der Umgebung des Punktes x in der Fo
$f(z) - x = A_0 (z-x)^k + A_1 (z-x)^{k+1} + A_2 (z-x)^{k+2} + \ldots$
darstellbar ist, wo k eine gebrochene, positive Zahl
Wenn der Punkt z nahe genug dem Punkte x liegt, dann g
$z_1 - x = A_0 (z-x)^k; \quad |z_1 - x| = |A_0| [|z-x|]^k \quad \ldots$

Alles ist davon abhängig, ob $k < 1$, oder $k > 1$
Wenn $k > 1$ ist, dann wird $|z-x|^k$ vermöge des Unendl
kleinwerdens von $|z-x|$ unendlich klein von höherer Ordn
als $|z-x|$, es wird also unabhängig von $|A_0|$: $|z_1 - x|$
$< |z-x|$, demnach ergiebt sich $|z_2 - x| = |A_0| \, |z_1 -$
$|z_2 - x| < |z_1 - x|$; $|z_3 - x| = |A_0| z_2 - x|^k$; $|z_3 - x| < |z_2 -$
$\ldots\ldots\ldots$ in limite wird $\lim\limits_{n=\infty} |z_n - x| = 0.$

Anders verhält es sich für $k < 1$, weil dann unabhän
von der endlichen Zahl $|A_0|$: $|z_1 - x| > |z-x|$ wird;
der Punkt z_1 von x weiter liegt als z. Die Reihe $z_1 z_2 z$
entfernt sich mehr und mehr vom Punkte x, was so la
dauert, als noch $f(z) - x = A_0 (z-x)^k$ richtig ist; wenn
so weit von x ist, dass die folgenden Glieder der Reih
$z_2 \; z_3 \ldots$ der Formel $z_{n+1} - x = A_0 (z_n - x)^k$ nicht genü

nn können sie sich entweder noch weiter von dem Punkte entfernen, oder dem Punkte x nähern, aber nicht länger, bis die Formel $z_{m+1} - x = A_0 (z_m - x)^k$ noch einmal htig wird, von hier ab entfernt sich die Reihe von dem nkte x mehr und mehr etc. Das zeigt uns, dass der Punkt für f(z) kein Convergenzpunkt ist. Wir sehen, dass r Punkt x, der ein kritischer Punkt für f(z) t, für die Basisfunktion f(z) entweder ein nvergenzpunkt sein kann, oder nicht, je chdem in der Reihenentwicklung: (α) $k > 1$, er $k < 1$ ist.

Wenn aber in der Umgebung des Punktes x ist

$$) - x = A_0 (z - x)^k + A_1 (z - x)^{k+1} + A_2 (z - x)^{k+2} + \dots$$

n ist in der nächsten Umgebung desselben Punktes x

$$(z) - x = a_0 (z - x)^{\frac{1}{k}} + a_1 (z - x)^{\frac{1}{k}+1} + a_2 (z - x)^{\frac{1}{k}+2} + \dots$$

raus hervorgeht, dass wenn der Punkt x ein Conrgenzpunkt für f(z) ist, dann ist er kein Conrgenzpunkt für $f_{-1}(z)$ und vice versa. Derlbe Satz ist giltig für gewöhnliche Punkte ensogut, wie für die merkwürdigen und itischen Punkte. Wir können also im Allgemeinen en: Der Punkt x, der eine Lösung der Gleichung $f^*(z) - z = 0$ wo $f^*(z)$ eine der Zweigfunktionen der Basisfunktion f(z) ist auch ein Convergenzpunkt für $f^*(z)$ sowohl, wenn er i gewöhnlicher, oder ein merkwürdiger Punkt derselben nktion ist, als auch wenn er ein Verzweigungspunkt der nktion f(z) ist, aber von solcher Beschaffenheit, dass $x) = 0$ ist.

In dem anderen Falle, wo entweder der Punkt x ein öhnlicher Punkt von $f^*(z)$ ist, aber von solcher Beschaffen, dass $|f^{*\prime}(x)| > 1$ ist; oder er ein Verzweigungspunkt der nktion $f^*(z)$ ist von der Beschaffenheit $f^{*\prime}(x) = \infty$, ist er i negativer Convergenzpunkt. Daraus geht hervor: Jeder nkt x, der der Gleichung $f(z) - z = 0$ genügt, ist ein tiver Convergenzpunkt, wenn entweder $|f^{(1)}(x)| < 1$ oder $x) = 0$ ist, wenn aber $|f^{(1)}(x)| > 1$ oder $f^{(1)}(x) = \infty$ ist, an ist er ein negativer Convergenzpunkt.

§ 30. **Die Netto-Lemeray'sche Theorie.** bleibt noch der Fall übrig, wo $|f^{(1)}(x)| = 1$ ist. Hier ist Punkt x ein gewöhnlicher Punkt, ebenso für die Ba funktion $f(z)$, wie für ihre inverse Funktion, genauer ges sowohl für diese Zweigfunktion $f^*(z)$, für welche $f^*(x) - x$ ist, als auch für diejenige Zweigfunktion $f^*_{-1}(x)$, für wel $f^*_{-1}(x) - x = 0$ ist. Wir wollen eine Uebersicht über bisher erreichten Resultate geben, hauptsächlich über jenigen von E. Netto, C. Isenkrahe und Lemer Siehe E. Netto: „Vorlesungen über die Algebra" [1]) C. Isenkrahe: „Das Verfahren der Funktionswiederhol seine geometrische Veranschaulichung und algebraische wendung" [2]) und Lemeray. [3])

Wenn wir den allgemeinen Fall betrachten wo nämlich den, wo z und f(z) nicht nothwendig reell sind, d müssen wir den Fall $|f^{(1)}(x)| = 1$ in zwei Unterfälle zerle 1. $\arg f^{(1)}(x)$ ist gegen π rational; 2. $\arg f^{(1)}(x)$ ist gege irrational. Diese beiden Fälle sind wesentlich in ihrer N von einander verschieden. Wenn $f^{(1)}(x) = +1$ ist, dann

$$(z_1 - x) = (z - x) + \frac{(z-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wenn $|z - x|$ genügend klein ist. Daraus folgt:

$$\frac{z_1 - x}{z - x} = 1 + \frac{z - x}{2!} f^{(2)}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir $z - x = r e^{\varphi i}$; $z_1 - x = r_1 e^{\varphi_1 i}$;

$$\frac{f^{(2)}(x)}{2!} = R e^{\theta i} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dann erhalten wir:

$$\frac{r_1}{r} e^{(\varphi_1 - \varphi) i} = 1 + R r e^{(\varphi + \theta) i} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = 1 + 2 Rr \cos(\varphi + \theta) + R^2 r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der Punkt x ist dann und nur dann ein Convergi punkt, wenn bei unendlich kleinem $r\ {}^{r_1}/_r < 1$ ist, d. i.

$$1 + 2 R r \cos(\varphi + \theta) + R^2 r^2 < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1]) Eugen Netto, Vorlesungen über Algebra. Erster Band. Leipzig,

[2]) Leipzig, B. G. Teubner, 1897. 113.

[3]) Nouvelles Annales de Mathematique III s. Tome XVI p. 306—319. Tōme XVII 1898 p. 75—80.

is ist aber dann, und nur dann möglich, wenn $\cos(\varphi+\theta) < 0$. ie ganze unendliche kleine Umgebung des Punktes x: $(x) - x = 0$, $f^{(1)}(x) = +1$] zerfällt in zwei Gebiete durch die erade $\cos(\varphi+\theta) = 0$. Der Punkt x ist ein positiver Conrgenzpunkt (d. h. ein Convergenzpunkt für $f(z)$ und kein nvergenzpunkt für $f_{-1}(z)$) innerhalb desjenigen Gebietes,) $\cos(\varphi+\theta) < 0$ ist; derselbe Punkt x ist ein negativer nvergenzpunkt für $f(z)$ (d. h. kein Convergenzpunkt r $f(z)$ und ein Convergenzpunkt für $f_{-1}(z)$) ıerhalb desjenigen Gebietes, wo $\cos(\varphi+\theta| > 0$ ist. Wenn r Punkt z sich auf der Geraden $\cos(\varphi+\theta) = 0$ befindet, nn ist $r_1 > r$, aber dadurch ist der Punkt z_1 von dieser raden fortgedrängt in eines von den beiden obengenannten biete, es fragt sich nur, wo wird er eintreten. Um die eilungsgerade $\delta'' Z_0 S'$ zu construiren, führen wir zwei rade: $Z_0 \xi \|$ der positiven Richtung der Axe der reellen hlen und $Z_0 \vartheta$, so dass der Winkel $\vartheta Z_0 \xi$ zwischen den posien Richtungen von $Z_0 \vartheta$ und $Z_0 \xi$ gleich θ ist. Dann ist Gerade $\delta'' Z_0 S'$, die senkrecht auf $Z_0 \vartheta$ steht, die gesuchte eilungsgerade. Das Gebiet der positiven Convergenz liegt iks des Strahles $Z_0 S' (\sphericalangle \xi Z_0 S' = \frac{\pi}{2} - \theta)$ und rechts des rahles $Z_0 S'' (\sphericalangle \xi Z_0 S'' = \frac{3}{2}\pi - \theta)$. Das andere Gebiet ge-rt der negativen Convergenz. Wir haben:

$$\frac{r_1}{r}\cos(\varphi_1 - \varphi) = 1,\ \frac{r_1}{r}\sin(\varphi_1 - \varphi) = \pm Rr \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

s aus der Gleichung (5): $\frac{r_1}{r} e^{(\varphi_1 - \varphi)i} = [1 + 2 Rr \cos(\varphi+\theta)]$ $+ i Rr \sin(\varphi+\theta)$ nach der Voraussetzung $\cos(\varphi+\theta) = 0$ folgt. er die Formel $\cos(\varphi+\theta) = 0$ ergiebt zwei Fälle: entweder $\sin(\varphi+\theta) = +1$ (d. i. der Punkt z befindet sich auf dem lbstrahl PS' oder $\sin(\varphi+\theta) = -1$ (d. i. der Punkt z ndet sich auf dem Halbstrahl PS''. In dem ersten Falle, l. bei $\sin(\varphi+\theta) = +1$ ist $\varphi_1 - \varphi > 0$, d. i. $\varphi_1 > \varphi$, und Punkt z_1 tritt in das positive Convergenzgebiet ein, weil links von PS' geht; in dem zweiten Falle, d. i. bei $\sin(\varphi+\theta) = -1$ ist $\varphi_1 - \varphi < 0$, d. i. $\varphi_1 < \varphi$, und der Punkt z_1

tritt ebenso in das positive Convergenzgebiet (weil er rec
von PS″ geht). Wir sehen also, dass die ganze Theilun
gerade dem positiven Convergenzgebiete gehört, d. h.
Punkt x ist ein Convergenzpunkt von positiver Bedeut
für beide Aeste der Theilungsgeraden. Diese Gerade un
scheidet sich von beiden Gebieten, die sie trennt, dadu
dass jedes einzelne Gebiet entweder eine positive Converg
oder eine negative Convergenz darstellt; längs der Theilu
geraden giebt es eine beiderseitige Convergenz, d. h. ebe
positive, wie negative. Wenn der Punkt z auf d
obengenannten Theilungsgeraden liegt, da
tritt der Punkt $z_1 = f(z)$ in das positive Co
vergenzgebiet ein und die Reihe $z\ z_1\ z_2\ z_3 \ldots$
convergirt gegen P. Aber der Punkt $z_{-1} = f_{-}$
tritt in das negative Convergenzgebiet e
und die Reihe $z_{-1}\ z_{-2}\ z_{-3} \ldots$ convergirt ebe
und ebenfalls gegen P. Wir haben den a
gemeinen Satz:

Die nächste Umgebung des Punktes x,
$f(x) - x = 0$ und $f^{(1)}(x) = 1$ ist, wird durch eine
rade in zwei Gebiete zertheilt, innerhalb
ersten convergiren bloss $f(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ inn
halb des zweiten convergiren bloss $f_{-1}(z), f_{-2}$
$f_{-3}(z), \ldots$ längs der Theilungsgeraden convergi
beide Reihen $f(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ und $f_{-1}(z), f_{-2}$
$f_{-3}(z), \ldots$ gleichzeitig.

§ 31. Fortsetzung. Der allgemeine F
$|f^{(1)}(x)| = 1$, wobei $\arg f^{(1)}(x)$, ist gegen π ratio
Die Theorie des allgemeinen Falles, nämlich wenn $|f^{(1)}(x)|$
und $\arg f^{(1)}(x) : \pi$ eine rationale Zahl ist, ist von H.
Lémeray in seiner Arbeit „Sur la convergence des subst
tions uniformes“ [1]) dargestellt worden.

Wenn $\arg f^{(1)}(x)$ rational gegen π ist, dann können
schreiben $f^{(1)}(x) = \cos\frac{2\lambda\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{\mu}$ . . . . . .

[1]) Bulletin de Société Mathematique de France, Tome X
p. 255—262. 1895.

λ und μ theilerfremd sind. Um diesen Fall genau geo-
trisch darzustellen, wollen wir die Complexenzahlenebene
eine λ-blättrige Riemannsche Fläche auf solche Weise
jiciren, dass der Punkt x in den Verzweigungspunkt aller
Blätter und die Gerade $X_0 \xi$ die || der Axe der reellen
len ist, in die gemeinsame Verbindungslinie treffe. Dann
ilen die Strahlen $X_0 \xi$, $X_0 \xi_1$, $X_0 \xi_2$, ... $X_0 \xi_{\mu-1}$, $X_0 \xi_\mu$
$X_0 \xi$), die denselben Winkel $\frac{2\lambda\pi}{\mu}$ bilden und sich in den
sprechenden Blättern der Riemannschen Fläche befinden,
ganze nächste Umgebung des Punktes X_0 in μ congruente
toren $C_1 C_2 \ldots C_{\mu-1} C_\mu$.

Jetzt wollen wir die Iterationskette $z\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots$ in μ
erketten: $z, z_\mu, z_{2\mu}, z_{3\mu}, \ldots$; $z_1, z_{\mu+1}, z_{2\mu+1}, z_{3\mu+1}, \ldots$;
$z_{\mu+2}, z_{2\mu+2}, z_{3\mu+2}, \ldots$;
....
.... $z_{\mu-1}, z_{2\mu-1}, z_{3\mu-1}, z_{4\mu-1}, \ldots$
heilen. Wenn der Punkt Z_0 sich innerhalb des Sektors
befindet, dann befinden sich $Z_0, Z_\mu, Z_{2\mu}, Z_{3\mu}, \ldots$ stets
rhalb C_ν; $Z_1 Z_{\mu+1}, Z_{2\mu+1}, Z_{3\mu+1}$ ...... stets innerhalb
-1, ...
.... $Z_{\mu-1}, Z_{2\mu-1}, Z_{3\mu-1}, Z_{4\mu-1}, \ldots$
.. stets innerhalb $C_{\nu-1}$.

Wir können also anstatt der Reihe $z\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots\ldots$
bloss die Reihe $z, z_\mu, z_{2\mu}, z_{3\mu}, \ldots$ betrachten.

Es ist bewiesen, dass alle Glieder $f_\mu^{(2)}(x)$, $f_\mu^{(3)}(x), \ldots f_\mu^{(\mu)}(x)$
Reihenentwicklung

$$\ldots - x) = (z - x) + \frac{(z-x)^2}{2!} f_\mu^{(2)} x + \frac{(z-x)^3}{3!} f_\mu^{(3)}(x) + \ldots$$

esem Falle verschwinden. Wenn dabei $f_\mu^{(\mu+1)}(x) = o$ ist,
n verschwinden auch alle Glieder $f_\mu^{(\mu+2)}(x)$, $f_\mu^{(\mu+3)}(x), \ldots$
(x). Wenn dabei noch $f_\mu^{(2\mu+1)}(x) = o$ ist, dann verschwin-
auch alle Glieder $f_\mu^{(2\mu+2)}(x)$, $f_\mu^{(2\mu+3)}(x), \ldots f_\mu^{(3\mu)}(x)$ etc.

Das erste Glied, das nicht verschwindet,
an nur die Form $f_\mu^{(k\mu+1)}(x)$ haben. Um den Zu-

sammenhang mit dem § 30 nicht zu verlieren, wollen vorläufig $k=1$ voraussetzen. Dann erhalten wir:

$$(z_\mu - x) = (z-x) + \frac{(z-x)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} f_\mu^{(\mu+1)}(x) + \ldots\ldots$$

$$\frac{z_\mu - x}{z-x} = 1 + \frac{(z-x)^\mu}{(\mu+1)!} f_\mu^{(\mu+1)}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der Punkt x kann dann und nur dann ein Converg punkt für $f(z)$ sein, wenn $|z_\mu - x| < |z-x|$ ist. Setzen voraus:

$$z - x = r e^{\varphi i};\ z_\mu - x = r_\mu e^{\varphi^\mu i};\ \frac{f_\mu^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!} + Re^{\theta i} \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{r_\mu}{r}\right)^2 = 1 + 2 R r^\mu \cos(\mu\varphi + \theta) + R^2 r^{2\mu} \ldots\ldots\ldots$$

Die Bedingung $r_\mu < r$ ist dann und nur dann er wenn $\cos(\mu\varphi + \theta) < o$ ist, d. h. wenn $(2k + \frac{1}{2})\pi < \mu\varphi +$

$$(2k + 1 + \frac{1}{2})\pi \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, d. h.

$$\frac{(2k + \frac{1}{2})\pi - \theta}{\mu} < \varphi < \frac{(2k + 1 + \frac{1}{2})\pi - \theta}{\mu} \ldots$$

Setzen wir $k = o, 1, 2, \ldots \mu - 1$, dann erhalten wi Geraden, die mit der positiven Richtung der Axe der re Zahlen die Winkel

$$\frac{(2k + \frac{1}{2})\pi - \theta}{\mu} \text{ und } \frac{(2k + 1 + \frac{1}{2})\pi - \theta}{\mu}$$

bilden.

Um diese Thatsachen geometrisch zu erklären, fi wir zwei Geraden: $X_0 \xi \|$ der Axe der reellen Zahlen $X_0 \vartheta$ auf solche Weise, dass der Winkel $\vartheta X_0 \xi$ zwischen positiven Richtungen von $X_0 \vartheta$ und $X_0 \xi$ gleich $\frac{\theta}{\mu}$ ist. drehen die Complexenzahlenebene um Punkt X_0 in sich selbst so lange, bis ans $X_0 \xi$, $X_0 \vartheta$ mit der Verbindungslinie der o genannten Riemannschen Fläche coïncid

rd. Dann theilen die Strahlen $X_0\xi_q$, die mit r Axe der reellen Zahlen die Winkel:

$$\frac{(q+\frac{1}{2})\pi-\theta}{\mu}; \; q=0,1,2,\ldots 2\lambda\mu-1$$

lden, die ganze Umgebung des Punktes x in n Riemannschen Flächen in $2\lambda\mu$ Gebiete, so innerhalb jedes Sektors C_ν erscheinen λ biete der positiven Convergenz in der Form r gleichen Sektoren, die von einander mit -1 eben solchen Sektoren und von den Rändern s ganzen Sektors C_ν durch je einen Halbktor getrennt sind. Diese Zwischensektoren tsprechen der negativen Convergenz. Die rahlen, die die verschiedenartigen Convernzgebiete trennen, gehören sowohl der poiven, wie der negativen Convergenz an.

§ 32. Fortsetzung. Setzen wir nicht nur $f(x)-x=o$. $f^{(1)}(x)=1$ voraus, sondern auch

$$(z_1-x)=(x-x)+\frac{(z-x)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x)$$

. $f^{(2)}(x)=f^{(3)}(x)=\ldots=f^{(k)}(x)=o$.

Dadurch ist eine gewisse Zerlegung der Umgebung Punktes x in positive und negative Convergenzbereiche geführt. Der Punkt x ist ein Convergenzpunkt der Funktion nicht in totaler Weise, sondern innerhalb dieser Gebiete der ngebung des Punktes x, wo $\cos(k\varphi+\theta)<o$ ist. Das t uns, dass $(2\lambda+\frac{1}{2})\pi<k\varphi+\theta<(2\lambda+1+\frac{1}{2})\pi$, also

$$\frac{(2\lambda+\frac{1}{2})\pi-\theta}{k}<\varphi<\frac{(2\lambda+1+\frac{1}{2})\pi-\theta}{k} \text{ ist.}$$

Wir construiren, wie in § 30 zwei Geraden $X_0\xi$ und ϑ so, dass $\sphericalangle\,\vartheta X_0\xi=\theta$ ist, dann construiren wir 2k Strahlen ξ, $X_0\xi_1$, $X_0\xi_2$, ... $X_0\xi_{2k-1}$, die mit der Axe der reellen len die Winkel

$$\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi-\theta}{k}; \; \mu=0,1,2,\ldots 2k-1.$$

bilden. Diese Strahlen zertheilen die Umgebung des Pu
x in 2k Sektorengebiete, innerhalb deren nachein
$\cos(k\varphi + \theta) < o$ und $> o$ ist; sie bestimmen also nachein
folgend positive und negative Convergenzgebiete. Läng
Theilungsgeraden ist der Punkt x sowohl von positiver,
von negativer Bedeutung. Diese Theilung der Umgebun
Punktes x beweist, dass die Iterationskette bogenfö
convergirt und ganz innerhalb eines und desselben Se
enthalten ist.

§ 32. Wir wollen endlich den allgemeinen Fall:

$$(z_\mu - x) = (z - x) + \frac{(z-x)^{k\mu+1}}{(k\mu+1)!} f_\mu^{(k\mu+1)}(x)$$

betrachten. Der Punkt x ist ein positiver Convergenzp
innerhalb derjenigen Gebiete, wo $\cos(k\mu + \theta) < o$ ist.

Wir projiciren die Complexenzahlenebene auf
besprochene λ-blättrige Riemannsche Fläche, so dass
Punkt X_0 in den Verzweigungspunkt fällt und die
zweigungslinie mit der Verbindungslinie derjenigen Ger
$X_0\vartheta$, die den Winkel $\sphericalangle \vartheta X \xi = \frac{\theta}{k\mu}$ bildet, zusammenfäl

Jeder Sektor zerfällt in Untergebiete, unter denen
der positiven Convergenz entsprechen, diese λk Sektoren
positiver Convergenz sind von einander durch $(\lambda k - 1)$
solche Sektoren und von den Rändern des Sektoren C_ν d
zwei Halbsektoren getrennt. Um die Form der Iterat
ketten näher zu erkennen, wollen wir die Untersektoren
positiven Convergenz mit den Indices 1, 2, 3, . . . k;
3, . . . k; . . . . 1, 2, 3, . . . k bezeichnen. Die Iterat
kette, deren Anfangspunkt Z_0 sich innerhalb des Sektor
und des Untersektors mit dem Index α befindet, hat
reguläre spiralförmige Gestalt, und ihre Ecken befinden
innerhalb der nacheinander folgenden Sektoren C_ν, abe
den gleichnamigen Untersektoren. Sie zerfällt in μ ein
bogenförmige Iterationsketten, die sich innerhalb eines
desselben Untergebietes befinden. Das Nähere finden w
folgenden Arbeiten:

Dr. Eugen Netto: „Vorlesungen über Algebra". Erster
d. Leipzig. Teubner, 1896.

Dr. C. Isenkrahe: „Das Verfahren der Funktionswieder-
ng, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische
vendung." Leipzig. Teubner, 1897.

Lemeray: „Sur la convergence des substitutionsuniformes."
velles Annales de Mathematiques. Dritte Serie. Band XVI.
7. 306—319. Band XVII. 1898. 75—80. Séan. l. c. p. 30.

Es bleibt noch übrig der Fall $|f^{(1)}(x)| = 1$, wobei arg
x) gegen π irrational ist, welcher Fall meines
sens noch nie irgend einer näheren Betrachtung unter-
fen wurde. Wir werden ihn nicht näher betrachten.

§ 33. Begriff der rythmischen Convergenz.
ler Complexenzahlenebene oder Kugelfläche giebt es nicht
solche Punkte, deren Iterationskette „regelmässig" con-
irt, d. h. alle ihre Ecken, von einer gewissen Stelle an
nnend, sich innerhalb der Umgebung eines und desselben
ktes gruppiren, sondern es giebt auch solche Punkte,
n Iterationsketten in eine gewisse Anzahl von Unter-
en zerfallen, von denen jede ihren eigenen Grenzpunkt
Wenn dem Punkte z eine Gruppe von m Convergenz-
kten $P_1 P_2 \ldots P_{m-1} P_m$ zugeordnet ist, d. h. wenn die
e $z_0, z_m, z_{2m}, z_{3m}, \ldots$ gegen P_1; $z_1, z_{m+1}, z_{2m+1},$
-1, $\ldots$ gegen P_2; $z_2, z_{m+2}, z_{2m+2}, z_{3m+2}, \ldots$
n P_3; $\ldots z_{m-1}, z_{2m-1}, z_{3m-1}, z_{4m-1}, \ldots$
n P_m convergirt, dann sagen wir, dass dem Punkte z
ne reguläre, sondern eine rythmische Con-
genz mit dem Rythmus m zugeordnet ist.
m Punkte z, dem eine rythmische Convergenz vom
mus m gegen die Funktion f(z) zugeordnet ist, ist gleich-
ig eine reguläre Convergenz gegen die Funktion $f_m(z)$
ordnet. Dieser wichtige Satz gestattet uns, die ryth-
e Convergenz auf ebensolche Weise zu betrachten, wie
reguläre, unter der Voraussetzung, dass als Basisfunktion
die alte Funktion f(z) und ihre Inversion $f_{-1}(z)$, sondern
neue Funktion $f_m(z)$ und ihre Inversion $f_{-m}(z)$ genommen
r dabei an der Stelle der Iterationskette $z, z_1, z_2, z_3, z_4 \ldots$
andere Iterationskette $z, z_m, z_{2m}, z_{3m}, z_{4m} \ldots$ erscheint.

Durch wiederholte Abbildung z..f(z) nach dieser Iterati
kette construiren wir:

$$\begin{array}{l} z_1, z_{m+1}, z_{2m+1}, z_{3m+1}, z_{4m+1}, \ldots\ldots\ldots \\ z_2, z_{m+2}, z_{2m+2}, z_{3m+2}, z_{4m+2}, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{m-1}, z_{2m-1}, z_{3m-1}, z_{4m-1}, z_{5m-1}, \ldots\ldots \end{array}$$

Das zeigt uns, dass es bloss die erste Unterkette z, z_{2m}, z_{3m} ... mit Hülfe der bekannten Sätze zu erker genügt, alle folgende Unterketten sind blosse Abbildur der ersten.

VI. Zerlegung der Complexenzahlenebene resp. Kug fläche in verschiedenartige Convergenzgebiete.

§ 34. Umgebung der Convergenzpunkte. haben gefunden, dass jedem Punkte x, der der Gleic $f(x) - x = 0$ und der Bedingung $|f^{(1)}(x)| < 1$ genügt, gewisse Umgebung zugeordnet ist, die nur solche Pu enthält, deren Iterationsketten nach x convergiren. In di Falle stellt sich diese Umgebung in der Form eines geschlossenen Contours (auf der Kugelfläche) der den Pun enthält, dar. Die Peripherie dieses Contours ist vorl unbekannt, und das einzige, was wir jetzt darüber s können, ist, dass er keineswegs durch den Punkt x g darf und dass er ihn vollständig umschliesst. Ganz ar verhält es sich in dem Falle, wo $|f^{(1)}(x)| = 1$; hier ist abhängig vom arg $f^{(1)}(x)$ und von gewissen damit verknü Reihenentwicklungen. Z. B. wenn $f^{(1)}(x) = +1$ und

$$f(z) - x = (z - x) + \frac{(z-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \ldots \text{ ist,}$$

dann umschliesst der obengenannte Cont den Punkt x nie, sondern seine Periph geht durch ihn, in diesem Falle hat sie in Punkte x einen einfachen Punkt.

Wenn aber

$$f(z) - x = (z - x) + \frac{(z-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x) + \ldots$$

ebenso in allen möglichen Fällen, die mit $f^{(1)}(x) = -1$ mit $\arg f^{(1)}(x) = \nu\pi$, wo ν eine rationale Zahl ist, ver-pft sind, dann geht die Peripherie des obengenannten tours nicht nur durch den Punkt x, sondern hat dort n singulären Punkt mit einem Vielfachheitscharakter. nn aber $\arg f^{(1)}(x) = \nu\pi$ ist, wo ν eine irrationale Zahl dann geht die Peripherie des obengenannten Contours it nur durch den Punkt x, sondern hat auch dort einen ndlich vielfachen Punkt, also die Form desjenigen Theiles Umgebung des Punktes x, welches der positiven Con-genz entspricht, ist in diesem Punkte vollständig jeder timmung unzugänglich. Die Theilungsgeraden, die die zelnen Convergenzgebiete in der Umgebung eines solchen ktes x von einander trennen und im vorigen § dargestellt den, sind Tangenten derjenigen Zweige der Peripherie, in dem Punkte x zusammentreffen. Dadurch ist die ganze gebung des Punktes x in eine gerade Anzahl von Unter-ieten getheilt, die der positiven oder der negativen Convergenz sprechen. Die Iterationsketten, die ihren Anfangspunkt ler Umgebung eines solchen Punktes haben, convergiren n und nur dann gegen x, wenn der Anfangspunkt sich rhalb eines positiven Untergebietes befindet, wobei sie weder ganz innerhalb desselben Untergebietes enthalten , oder in eine endliche Anzahl von Unterketten zerfallen, denen jede ganz innerhalb des entsprechenden Unter-ietes enthalten ist. Das geschieht aber nur dann, wenn $f^{(1)}(x)$ gegen π rational ist. In jedem anderen Falle hat einen spiralförmigen Charakter, der bestehen bleibt, wenn Iterationskette convergirt, aber nähere Bedingungen der vergenz sind noch unbekannt, wegen des besonderen rakters der Umgebung von x. Wir wollen möglichst au die Form von solchen Umgebungen untersuchen, wobei beide Fälle $|f^{(1)}(x)| < 1$ und $|f^{(1)}(x)| = 1$ unabhängig von nder im einzelnen betrachten wollen.

§ 35. **Die Convergenzgebiete, die den po-iiven Convergenzpunkten zugeordnet sind.** wollen zunächst den Fall $|f^{(1)}(x)| < 1$ betrachten. Wir en gesagt, dass die Form der Peripherie des zu dem

Punkte x zugeordneten Gebietes, welches den Punkt x
diesem Falle) umschliesst, noch unbekannt ist. Wir kön
aber dieses Gebiet näherungsweise auf folgende Weise
struiren: Wenn $|f^{(1)}(x)| < 1$, dann giebt es in der Umgeb
des Punktes x ein solches Gebiet, wo $|f(z) - x| < |z - x|$
Wir können immer einen solchen Kreis construiren, der
Centrum in dem Punkte x und einen so grossen Radius
dass jeder andere Kreis, mit demselben Centrum und et
grösserem Radius aus diesem Gebiete heraustritt; also
der Peripherie unseres Kreises giebt es wenigstens ei
Punkt z, von der Beschaffenheit, dass $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|} = 1$ ist.
Einführung eines solchen Kreises verdanken wir G. Koenig
Darum werden wir den obengenannten Kreis C_x „Koeni
scher Convergenzkreis der dem Punkte x
geordnet ist“, nennen. Koenigs hat in der genann
Arbeit noch einen wichtigen Begriff eingeführt, nämlich den „
Convergenzkreises mit gewisser Potenz h“
des grössten Kreises, der nur solche Punkte z enthält,
der Bedingung $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|} \leqq h$ genügen, wo selbstverständ
$|f^{(1)}(x)| < h < 1$ ist.

Der Koenigs'sche Convergenzkreis bildet aber nur ei
gewissen Theil des betrachteten Convergenzgebietes.
diesen Theil zu erweitern und sich mehr dem gesuch
Gebiete zu nähern, wollen wir nach solchen Punkten frag
die sich selbst ausserhalb des Koenigs'schen Convergenzkre
befinden, aber deren erste Iterationen in das Innere eintre
Um diesen Contour zu erhalten, gestatten wir dem Punk
sich längs derjenigen Kreise zu bewegen, die mit dem Koen
schen Convergenzkreis concentrisch sind und deren Rad
von dem Radius des Convergenzkreises ausgegangen unend
langsam wachsen. Wenn wir längs der Peripherien a
dieser Kreise alle Punkte wählen, deren erste Iteratio
in das Innere des Convergenzkreises eintreten, dann erhal

[1]) Bulletin de Sciences Mathematiques et Astronomiques, Seri
Tome VII, 1883. Première Partie. p. 339—357 und zwar p. 347—3

ein gewisses Oval, das den Punkt x und den Convergenz-
is vollständig umschliesst. Damit aber ist das Gebiet
r Punkte, deren erste Iterationen in den Convergenzkreis
treten nicht erschöpft. Es wird dann und nur dann er-
öpft, wenn wir den Begriff von Żórawskischen isolirten
ıkten, die dem Convergenzpunkte x zugeordnet sind, ein-
ren. Die isolirten Żórawskischen Punkte erster Ordnung,
dem Punkte x zugeordnet sind, erhalten wir durch Auf-
ıng der Gleichung $f(z) - x = 0$ . . . . (1).
Sei x_{i_1} ein solcher Punkt. Gestatten wir dem Punkte x
der Umgebung jeden Punktes x_{i_1} sich zu bewegen, aber
solche Weise, dass die erste Iteration sich innerhalb des
nigs'schen Convergenzkreises befindet. Das ist möglich,
l $f(x_{i_1}) = x$. Auf solche Weise erhalten wir ausser dem
en Oval, das den Punkt x umschliesst, ebensoviele einzelne
le, als es isolirte Żórawskische Punkte erster Ordnung
t; alle diese Ovale bilden ein System, das wir „System
Convergenzovale erster Ordnung" nennen wollen, weil die
e Iteration eines jeden Punktes, der sich innerhalb jedes
ebigen Ovals dieses Systems befindet, dem Koenigs'schen
vergenzkreise angehört, dasjenige Oval, das den Con-
genzkreis enthält, wird Hauptoval erster Ordnung genannt.
werden uns noch mehr dem vollständigen Convergenz-
ete des Punktes x nähern, wenn wir diejenigen Punkte
ersuchen, deren zweite Iterationen sich innerhalb des Koenigs-
n Convergenzkreises befinden. Zu diesem Zwecke führen
die isolirten Żórawskischen Punkte von zweiter Ordnung
die wir durch Auflösung der Gleichung $f(z) = x_{i_1}$ erhalten,
x_{i_1} ein beliebiger isolirter Żórawskischer Punkt erster
nung ist. Sei $x_{i_1 i_2}$ ein beliebiger isolirter Żórawskischer
kt zweiter Ordnung. Wenn wir dem Punkt z gestatten,
ausserhalb eines jeden Ovals erster Ordnung und in der
gebung eines jeden isolirten Żórawskischen Punktes zweiter
nung zu bewegen, und zwar auf solche Weise, dass seine
Iteration dem System von Ovalen erster Ordnung gehört,
erhalten wir eine neue Ovalenreihe: ein Oval umschliesst
Punkt x, den Convergenzkreis und das Hauptoval erster
nung; das System der Ovale, die die ersten Żórawskischen

isolirten Punkte umschliessen und das System der Ovale, die zweiten isolirten Żórawskischen Punkte umschliessen.

Das Oval, welches den Convergenzpunkt enthält, Hauptoval zweiter Ordnung genannt. Dadurch erhalten ein „System der Convergenzovale zweiter Ordnung“, die zweite Iteration eines jeden Punktes, der sich inner jedes beliebigen Ovals dieses Systems befindet, dem Koe schen Convergenzkreise angehört. Wir werden uns mehr dem vollständigen Convergenzgebiete, das dem Pu x zugeordnet ist, nähern, wenn wir diejenigen Punkte u suchen, deren dritte Iterationen sich innerhalb des Koe schen Kreises befinden. Auf ebensolche Weise erhalten ein „System der Convergenzovale dritter Ordnung“, Oval, das den Punkt x, Convergenzkreis, Hauptoval e Ordnung und Hauptoval zweiter Ordnung umschliesst, System von Ovalen, die die isolirten Żórawskischen Pu erster Ordnung, ihre ersten und zweiten Ovale umschlie ferner ein System von Ovalen, die die isolirten Żóraw schen Punkte zweiter Ordnung und ihre Ovale umschlie endlich ein System von Ovalen, die die isolirten Żóraw schen Punkte dritter Ordnung umschliessen etc. etc. sehen also, dass zur Construction des totalen Converg gebietes, das dem Punkte x zugeordnet ist, wir alle e Żorenskischen Punkte: $f(x_{i_1}) = x$; alle zweiten Żóraw schen Punkte: $f(x_{i_1 i_2}) = x_{i_1}$; alle dritten Żórawskis Punkte: $f(x_{i_1 i_2 i_3}) = x_{i_1 i_2}; \ldots$ in infinitum finden mü Jeder Żórawskische Punkt ist durch ein gewisses Oval geschlossen. Wenn wir das System der Convergenz k^{ter} Ordnung betrachten, dann ist der Punkt x durch Convergenzkreis, durch das erste, zweite, dritte ... k^{te} umgeben; jeder erste Żórawskische Punkt ist durch das e zweite, dritte .... k^{te} Oval; jeder zweite Żórawsk Punkt ist durch das erste, zweite, dritte .... $(k-1)^{te}$ jeder dritte Żórawskische Punkt ist durch das erste, zw dritte .... $(k-2)^{te}$ Oval umgeben etc. etc. Wenn k w in infinitum, dann nähert sich das System der Converg ovale k^{ter} Ordnung dem Convergenzgebiete selbst und

limite mit ihm zusammen. Der Punkt x, jeder erste, eite, dritte . . . etc. Żórawskische Punkt ist von unend- n vielen „concentrischen“ Ovalen umschlossen. Es fragt h nun, ob dieses Ovalensystem, das einen und denselben nkt umschliesst, irgend einen bestimmten Contour liefert, er nicht. Erstens können die „concentrischen“ Ovale sich chstens berühren, also es giebt keine Punkte, wo sich zwei er mehrere Peripherien der „concentrischen“ Ovale ver- iedener Ordnung schneiden. Wir wollen zeigen, dass es ne zwei „excentrische“ Ovale giebt, d. h. zwei solche ale, die zwei verschiedene Punkte umschliessen, können h nicht mit ihren Peripherien schneiden. Wäre das mög- n, dass zwei verschiedene Ovale O_1 und O_2 sich mit ihren ripherien schnitten, dann gäbe es wenigstens einen solchen nkt Z, der ebenso gut dem Ovale O_1, wie dem Ovale O_2 gehören könnte. Der Punkt Z gehört dem Oval O_1 an, o seine Iterationskette muss sich vor allem in dem Oval n kleinerer Ordnung befinden, ferner kann sie in den nvergenzkreis eintreten. Die Anzahl der Ecken, die sich sserhalb des Convergenzkreises befinden, und die Lage rselben ist so innig mit dem Ovale O_1 verbunden, dass sie rch dasselbe näherungsweise bestimmt wird. Der Punkt Z gehört aber auch dem Oval O_2 an, also seine Iteration l gleichzeitig mit derjenigen, die nur dem Ovale O_1, und t einer anderen, die nur dem Ovale O_2 entsprechen kann, sammenfallen. Das ist ein Widerspruch. Wir können chstens von der Berührung sprechen. Aber die Ovale von llicher Ordnung können sich nicht berühren, weil in den rührungspunkten auch die höheren Ovale sich berühren ssten (weil sie sich nicht schneiden dürfen). In diesen nkten werden sich zwei getrennte Untergebiete eines und selben Gebietes berühren mit ihren Peripherien, oder mit n Spitzen zusammenfallen. Als solche Spitze, oder so ein rührungspunkt kann nur ein solcher Punkt Q sein, der r Gleichung $f_m(Q) = Q$ genügt. W a r u m? Weil seine rationskette als eine eindeutig bestimmte Kette nicht in ei von einander verschiedene Convergenzuntergebiete len kann. Das ist aber unvermeidlich, weil in dem Punkte

Q sich zwei solche Untergebiete zusammentreffen. Widerspruch kann dadurch vermieden werden, dass voraussetzen $f_m(Q) = Q$, d. h. die Iterationskette artet einen einzigen Punkt des Zusammenfallens der Untergeb aus, wenn $m = 1$ ist, oder in eine Gruppe der einzelnen Punkte von ebensolcher Beschaffenheit. Wäre d $|f_m^{(1)}(Q)| < 1$, dann wäre Punkt Q durch sein eigentliches zugeordnetes Oval umschlossen: er kann also nicht als Punkt des Zusammenfallens zweier irgend welcher Un gebiete dienen. Ebenso darf es nicht sein $|f_m^{(1)}(Q)| >$ Es bleibt noch übrig $|f_m^{(1)}(Q)| = 1$ zu betrachten. W $Q_1\, Q_2\, Q_3 \ldots.$ einzelne Punkte sind, wo sich die Untergeb des ganzen Convergenzgebietes, das dem Punkte x zugeord ist, berühren, oder mit den Spitzen zusammenfallen, d muss zwischen ihnen die Beziehung $Q_2 = f_m(Q_1)$, $Q_3 = f_m(Q_2$ existiren, wo m eine ganze Zahl ist.

§ 36. Die Convergenzgebiete, die den sin lären Convergenzpunkten zugeordnet si Jetzt wollen wir den Fall $|f^{(1)}(x)| = 1$ untersuchen, und nächst setzen wir voraus $f^{(1)}(x) = 1$. Wenn in der gebung des Punktes x

$$f(z) - x = (z - x) + \frac{(z - x)^{k+1}}{(k+1)} f^{(k+1)}(x) + \ldots$$

ist, dann zerfällt die Umgebung des Punktes x in 2 k biete, von denen k von positiver Convergenz sind, d. i. solche Punkte enthalten, die der Bedingung $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|} <$ genügen; die übrigen k Gebiete sind von negativer Conv genz. Nehmen wir eine der Theilungsgeraden als A und den Punkt x als Pol des Polarcoordinatensystems. D bildet das Innere des Gebietes, das die Curve $\varrho = a\cos(\theta +$ als Peripherie hat, k positive und k negative Converg gebiete. Nehmen wir a als grösste Zahl von der Beschaff heit, dass alle positive Gebiete nur diejenigen Punkte z halten, die uns $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|} < 1$ geben, deren Periphe

nigstens einen Punkt z enthalten, für welchen $\frac{|f(z)-x|}{|z-x|}=1$

Hier ist $\theta = \arg f^{(k+1)}(x)$. Solches Convergenzbild elt hier dieselbe Rolle, wie früher der Convergenzkreis, h. durch ebensolche Abbildung und Erweiterung erreichen r ein vollständiges, dem Punkte x zugeordnetes Convernzgebiet mit allen seinen Untergebieten. Dieses Unteriet, das den Punkt x umschliesst, hat hier einen vielhen Punkt für seine Peripherie: zerfällt in noch kleinere tergebiete, von denen jedes Gebiet der Curve $\varrho = a \cos(\theta + k\varphi)$ ı positiver Bedeutung entspricht. In dem Falle, wo (x) $= \cos \frac{2\lambda\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\lambda\pi}{\mu}$ ist, betrachten wir $f_\mu(z)$ anstatt). Der allgemeine Fall, wo $\arg f^{(1)}(x)$ gegen π irrational ist vorläufig unbekannt.[1])

§ 37. Die Iterationsketten. Die Iterationskette es beliebigen Punktes convergirt dann und nur dann nach wenn der gegebene Punkt sich innerhalb des Convergenzietes, das dem Punkte x zugeordnet ist, befindet. Aber ganze Convergenzgebiet des Punktes x ist keineswegs totales Bereich, es zerfällt in eine gewisse Anzahl, vielht in eine unendlich grosse Anzahl von geschlossenen ergebieten. Die Gestalt der Iterationskette ist abhängig der Lage des Anfangspunktes, und zwar 1º von der re des Untergebietes, dem er gehört; 2º von der Lage Anfangspunktes innerhalb des Untergebietes. Es giebt schen den einzelnen Untergebieten des vollständigen Congenzgebietes, das dem Punkte x zugeordnet ist, gewisse iken, gewisse Zwischengebiete, deren Bedeutung sich auf e bekannte Weise erklären lässt. Die Peripherien der ıergebiete haben eine merkwürdige Eigenschaft. Jedem ukte, der dem Untergebiete angehört, entspricht eine ationskette, deren erste Ecken innerhalb des Untere etes bleiben. Je näher der Peripherie der Anfangspunkt

[1]) Léopold Léau: „Etude sur les equations fonctionnelles une ou ısicurs variables". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, o XI. 1897. E. Chapitre III. p. 30.—.

liegt, desto grösser ist die Anzahl der Ecken der Iterati
kette, die innerhalb des Untergebietes bleiben. Da
folgt, dass die ganze Iterationskette, de
Anfangspunkt auf der Peripherie eines Unt
gebietes sich befindet, dieser Periphe
vollständig eingeschrieben ist. Das gesch
immer, wenn dieses Untergebiet den Convergenzpunkt ent

Satz: Die Peripherie eines jeden Unt
gebietes, das dem Punkte x zugeordnet
d. h. dem Convergenzgebiete des Punkte
gehört, ist eine geschlossene (auf der Kugelflä
vollständig bestimmte Curve, die sich ge
die Transformation $x_1 + y_1 i = f(x + yi)$ invari
verhält.

Dabei definirt dieser Satz nicht nur die Peripherien
einzelnen Untergebiete, sondern auch jede andere Curve,
alle Ecken jeder beliebigen Iterationskette enthält. Je
Punkte z ist eine Curve zugeordnet, die sich gegen
Transformation $x_1 + y_1 i = f(x + yi)$ invariant verhält.
Iterationskette, die dem Punkte z entspricht, ist vollstä
in diese Curve eingeschrieben. Die Curve, die sich g
die Transformation $x_1 + y_1 i = f_n(x + yi)$, wo n eine g
Zahl ist, invariant verhält, aber für jede Transforma
$x' + y' i = f_m(x + yi)$, wo $m < n$ ist, keine invariante C
ist, wollen wir „Invariante Curve der Funktion $f_n(z)$“ nen
Die fundamentale Eigenschaft der invarianten Curven
der Basisfunktion f(z), die gleichzeitig die Peripherie
beliebigen Untergebietes bildet, ist $\lim\limits_{n=\infty} f_n^{(1)}(z) \neq 0$. Dieser
ist leicht zu beweisen: $f_n^{(1)}(z) = f^{(1)}(z)\, f^{(1)}(z_1)\, f^{(1)}(z_2) \ldots f^{(1)}(z$
Innerhalb des Untergebietes ist $\lim\limits_{n=\infty} f_n^{(1)}(z) = 0$ weil in li
$f_n(z) = x = \text{Const.}$ ist. Das ist innerhalb des Untergeb
möglich, aber auf der Peripherie haben die Glieder $f^{(}$
$f^{(1)}(z_1)$, $f^{(1)}(z_2) \ldots$ verschiedenartige Werthe, deren Pro
eine vollständig unbestimmte Grösse ist.

§ 38. Die convergenzlosen Gebiete. Con
iren wir für jeden Punkt x, der ein positiver Converg

nkt ist, sein entsprechendes Convergenzgebiet. Hier llen wir eine Bemerkung über negative Convergenzpunkte schalten; ihre Umgebung darf gewissen Convergenz-bieten angehören. Alle negativen Convergenz-nkte bilden vollständig isolirte Punkte r entsprechenden invarianten Curven von). Durch die Construktion der Convergenzgebiete, die em Convergenzpunkte $x\,[f(x) - x = 0 \mid f^{(1)}(x) \mid \leqslant 1]$ zugeord-t sind, erschöpfen wir das ganze Gebiet der regulären nvergenz. Wenn wir dasselbe für die neue Basisfunktionen z), $f_3(z)$, $f_4(z)$.... construiren werden, was für $f(z)$ dar-stellt ist, dann erschöpfen wir die Gebiete der rythmischen nvergenz vom Rythmus 2, 3, 4,... Es ist sicher, dass da-rch ein vollständiges Gebiet von irgend welcher Conver-nz erschöpft ist. Es fragt sich nun, ob dadurch die ganze mplexenzahlenebene resp. Kugelfläche ebenso erschöpft rd. Wir wissen, dass es Curven giebt, längs deren es erhaupt keine Convergenz giebt: das sind die Peripherien r einzelnen Untergebiete, die einem beliebigen Convergenz-biete von irgend welchem Rythmus und irgend welchem enzpunkte angehören. Es fragt sich nun, ob es totale biete giebt, innerhalb deren überhaupt keine Convergenz rhanden ist. In dem Falle

$$f(z) = \frac{A z^4 + B(2z^2 - 1)}{B + A(2z^2 - z^4)} = Cn\, 2\, Cn_{-1}(z)$$

stirt solches Gebiet und belegt die ganze Ebene. In erm Falle ist die Möglichkeit der Existenz solches Gebietes neswegs ausgeschlossen. Vielleicht werden durch die ngenannten Constructionen diese Zwischengebiete nicht illt, und zwar in diesem Falle erscheinen sie als Gebiete, jeder Convergenz vollssändig fremd sind. Die Iterations-ten der Punkte, die sich dort befinden, nähern sich mit en Ecken den Peripherien oder irgend welchen speciellen arianten Curven von $f_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$ Vielleicht den durch obengenannte Construktionen diese Zwischen-iete erfüllt, und zwar in diesem Falle reduciren sich

diese Gebiete auf die schon bekannten Curven. Vorlä
sind diese Thatsachen unbekannt, weil noch zu wenig
spiele derselben betrachtet wurden.

Dritter Theil.

Das Fundamentalproblem der Iterationsrechnung.

VIII. Der Fundamentalsatz des § 21.

§ 39. Vorbemerkungen. In dem ersten Th
unserer Arbeit haben wir bewiesen, dass, wenn es uns
lungen ist der Basisfunktion f (z) eine solche neue Funk
þ (z) zuzuordnen, dass die Gleichung:

$$f(z) = \lim_{N=\infty} \mathop{\Big|}_{t+\frac{\text{þ}(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots\ldots\ldots$$

identisch besteht, dann giebt es auch folgende ebenfalls i
tische Gleichung:

$$\mathop{\Big|}_{f(t)}^{\alpha} (z) = \lim_{N=\infty} \mathop{\Big|}_{t+\frac{\alpha\text{þ}(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots\ldots\ldots$$

Der oben gegebene Beweis besteht darin, dass wir vor
gesetzt haben, dass die Basisfunktion f(z) eine partiku
Transformation $x^1 = \varphi(x, a)$ einer gewissen eingliedrigen, c
tinuirlichen Transformationsgruppe ist. Die Transforma
$t_1 = t + \frac{1}{N}\text{þ}(t), N = \infty$ ist eine solche infinitesimale Tr
formation einer gewissen eingliedrigen, continuirlichen Tr
formationsgruppe, die unendlich viel mal wiederholt die
gebene Basisfunktion giebt. Wenn die Existenz der o
genannten Gruppe bewiesen ist und selbst dargestellt
dann ist unser Problem schon aufgelöst. Wenn aber
Gruppe nicht gegeben ist, wenn dabei ihre Existenz n
sicher ist, dann hat unser Satz eine problematische
deutung.

Es giebt aber eine specielle Methode, mit Hülfe deren unter gewissen Bedingungen unser Fundamentalproblem ɔsen können. Diese Methode ist innerhalb derjenigen Bene der Complexenzahlenebene resp. Kugelfläche giltig, die innerhalb der Convergenzgebiete von regulärem oder mischem Charakter, die der Funktion $f(z)$ gehören, ben. Diese Methode folgt unmittelbar aus der näheren ·achtung gewisser Algorithmen, die mit der Theorie der vergenz der iterirten Funktionen verknüpft sind.

Zunächst wollen wir die Formel (1) näher betrachten.

§ 40. Allgemeine Theorie des Ausdrucks

$$\lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t+\frac{\text{þ}(t)}{N}} (z)$$

Setzen wir voraus, dass in einer gewissen Umgebung Punktes z die Funktion $\text{þ}(t)$ eindeutig bestimmt, endlich von Null verschieden ist. Construiren wir einen Kreis mit dem Centrum in z und einen solchen Radius R, dass halb seiner Peripherie kein Punkt z von der Beschaffen- $\text{þ}(z) = 0$ oder $= \infty$ sich befindet. Sei M_R der grösste h von $|\text{þ}(z)|$ innerhalb eines solchen Kreises.

Der Punkt $z_1 = z + \frac{\text{þ}(z)}{N}$ befindet sich auf der Peripherie Kreises mit dem Centrum z und Radius $\frac{1}{N} |\text{þ}(z)|$ also halb des Kreises K_1 mit demselben Centrum z und ius $\frac{1}{N} M_R$. Wenn die Zahl N genügend gross ist, dann bleibt Punkt z_1 innerhalb des Kreises C_R, es ist also $|\text{þ}(z_1)| <$. Daraus folgt, dass der Punkt $z_2 = z_1 + \frac{1}{N} \text{þ}(z_1)$ innerdes Kreises sich befindet, der sein Centrum in z_1 und Radius $\frac{1}{N} M_R$ hat, umsomehr befindet er sich innerhalb Kreises K_2 mit dem Centrum z und Radius $\frac{2}{N} M_R$. Wenn Zahl N genügend gross ist, dann bleibt der Punkt z_2

innerhalb des Kreises C_R, daraus folgt $|\mathfrak{p}(z_2)| < M_R$. Dar folgt weiter, dass der Punkt $z_3 = z_2 + \frac{1}{N}\mathfrak{p}(z_2)$ sich innerh eines Kreises befindet, der sein Centrum in z_2 und den Ra $\frac{1}{N}M_R$ hat, umsomehr befindet er sich innerhalb des Kre K_3 mit dem Centrum z und Radius $\frac{3}{N}M_R$ etc. etc. Wir se dass es immer möglich ist zu beweisen, dass die Punkte Reihe $z_{i+1} = z_i + \frac{1}{N}\mathfrak{p}(z_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ sich innerhalb Kreises C_R befinden und in limite die Iterationskette z $z_3 \ldots z_m \ldots$ eine continuirliche Curve bildet, unter der Vor setzung aber, dass $i < m$ ist, wobei $m M_R \leqq N R$. Wenn N unendliche wächst, dann wächst auch m ins unendliche in limite wird $\lim\limits_{N=\infty}\left[\frac{m}{N}\right] \leqq \frac{R}{M_R}$. Diese Bedingung zeigt dass der Algorithmus

$$f(z) = \lim_{N=\infty} \mathop{\Big|}_{t+\frac{\mathfrak{p}(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots\ldots\ldots$$

dann und nur dann unmittelbar zugänglich ist, wenn R ist, weil dann $m = N$ voraussetzen möglich ist. Wir kön den Radius R mehr und mehr vergrössern, bis $\frac{R}{M_R}$ max. denn für jede weitere Vergrösserung von R erhalten kleinere Werthe für $\frac{R}{M_R}$ d. h. da M_R schneller als R wä

Dieser Maximalwerth von $\frac{R}{M_R}$ ist eine dem Punkte z geordnete Zahl, die wir mit Q_z bezeichnen.

Setzen wir jetzt $Q_z > 1$, dann ist sicher, dass die g Iterationskette $z\, z_1\, z_2 \ldots z_{N-1}\, z_N$ vollständig bestimmt und in limite eine gewisse Curve bildet. Wir können schreiben:

$$= \frac{z_1 - z}{\wp(z)} = \frac{z_2 - z_1}{\wp(z_1)} = \frac{z_3 - z_2}{\wp(z_2)} = \ldots\ldots = \frac{z_N - z_{N-1}}{\wp(z_{N-1}} \ldots (1)$$

us folgt:

$$\frac{z_1 - z}{\wp(z)} + \frac{z_2 - z_1}{\wp(z_1)} + \frac{z_3 - z_2}{\wp(z_2)} + \ldots\ldots + \frac{z_N - z_{N-1}}{\wp(z_{N-1})} \ldots (2)$$

Wenn $N = \infty$, dann bildet die Reihe $z\, z_1\, z_2 \ldots z_{N-1}\, z_n$ continuirliche Curve, dadurch erhält die Gleichung (2) nde Form

$$1 = \int_z^{z_n} \frac{dt}{\wp(t)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

i der Integrationsweg schon vollständig bestimmt ist.

Fundamentalsatz 1: Die unbekannte Funk- n $f(z)$, die durch den Ausdruck (A) definirt ist eine Lösung der analytischen Glei- ng, wobei der Integrationsweg vollständig eben ist und die unbekannte Grenze z sich erhalb desjenigen Kreises mit Centrum in efindet, der keinen Punkt z von der Be- affenheit $\wp(z) = \infty$ oder 0 enthält.

§ 41. Jetzt wollen wir Q_z beliebig auswählen, daraus dass der Ausdruck

$$f_1(z) = \lim_{N=\infty} \prod^{N} (z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)'$$
$$t + \frac{Q_z\, \wp(t)}{N}$$

vollständig bestimmte Grösse ist, und zwar die einzige ng der Gleichung:

$$Q_z = \int_z^{z} \frac{dt}{\wp(t)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)'$$

ch innerhalb des Kreises mit Centrum in z, der keinen er Funktion $\wp(t)$ enthält, befindet, wobei der Integrations- g vollständig bestimmt ist. Daraus folgt weiter, dass der ruck (A)′ eine ebenso bestimmte Grösse ist, und zwar die

einzige Lösung der Gleichung (B)′, die sich innerhalb
wohlbekannten Kreises befindet. Daraus folgt:

Fundamentalsatz 2: Jedem Punkte z der Eb
wo þ (z) endlich und von Null verschieden ist, entspricht
solche reelle Zahl Q_z dass der Ausdruck

$$\lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{a\,þ(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots \ldots \ldots ,$$

dann und nur dann vollständig bestimmt ist, wenn es $|a| <$
ist. Dieser Ausdruck ist eine Lösung der Gleichung

$$a = \int_{z}^{Z} \frac{dt}{þ(t)} \quad \ldots \ldots \ldots$$

und zwar die einzige, die sich innerhalb des wohlbekan
Kreises mit Centrum z befindet.

§ 42. Wenn wir den Ausdruck (a) haben, wo $|a| > Z$
ist, untersuchen wollen, dann schreiben wir $a = \lambda a$
$(1-\lambda)a \ldots (2)$, wo λ eine solche reelle, positive, als 1 kleinere Z
ist, dass $\lambda a < Q_z \ldots (3)$. Dann setzen wir voraus, $n\lambda$
eine ganze Zahl. Wir haben:

$$\lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{a\,þ(t)}{N}}^{\lambda N} (z) = \lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{\lambda a\,þ(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$\lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{a\,þ(t)}{N}}^{(1-\lambda)N} (z) = \lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{(1-\lambda a\,þ(t)}{N}}^{N} (z) \quad \ldots \ldots \ldots$$

Daraus folgt:

$$\lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{a\,þ(t)}{N}}^{N} (z) = \lim_{N=\infty} \prod_{t+\frac{(1-\lambda a\,þ(t)}{N}}^{N} \quad \prod_{t+\frac{\lambda a\,þ(}{N}}^{N} (z) \ldots \ldots$$

Wir sehen also, dass wenn $|a| > Q_z$, dann können wir
ıer schreiben $a = \lambda a + (1 - \lambda) a$; $a_1 = (1 - \lambda) a$, worin
$| < Q_z$ ist.

Dann wird

$$\lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t + \frac{a \mathfrak{p}(t)}{N}} (z) = \lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t + \frac{a_1 \mathfrak{p}(t)}{N}} (z_1)$$

ıei
$$z_1 = \lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t + \frac{\lambda a \mathfrak{p}(t)}{N}} (z) \qquad a_1 = (1 - \lambda) a.$$

Wenn $|a_1| < Q_{z_1}$ ist, dann ist alles auf den Fundamental-
2 zurückgeführt; ist das nicht der Fall, dann schreiben
$a_1 = \mu a_1 + (1 - \mu) a_1$, wo $\mu |a_1| < Q_{z_1}$ und betrachten wie
ıer etc. etc. Hier treten zwei auf: 1. entweder jede Zahl a
ı in eine Summe $a = a_1 + a_2 + a_3 \ldots . + a_k$ zerlegt sein,
der Ausdruck (a) der Berechnung zugänglich ist. Dann
t uns dieser Ausdruck eine Lösung der Gleichung (b) vor,
ei die Integration längs eines bekannten Weges durch-
hrt ist, und es ist, dass sie eine einzige Lösung
die auf diesem Wege erreichbar ist. 2. oder es giebt
ı jeden Werth vom z ein bestimmtes Maximum für $|a|$,
ass der Ausdruck (a) dann und nur dann eine bestimmte
se darstellt, wenn $|a| < M$ ist, wobei M sowohl von z
i von a abhängig ist. Jedenfalls, wenn beide Ausdrücke

$$\lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t + \frac{\mathfrak{p}(t)}{N}} (z) = f(z), \quad \lim_{N=\infty} \prod^{N}_{t + \frac{a \mathfrak{p}(t)}{N}} (z) = \varphi(z)$$

gıd eine Bedeutung haben, und zwar der erste als eine
ıktion f(z) und der zweite als eine Funktion $\varphi(z)$, dann ist

$$\varphi(z) \equiv \prod^{a}_{f(t)} (z).$$

IX. Anwendung der Theorie der Convergenz auf da Fundamentalproblem.

§ 43. Vorbemerkungen. Nehmen wir einen p tiven Convergenzpunkt x von der Beschaffenheit f(x) — x = Es giebt in der Ebene resp. Kugelfläche ein gewisses (vergenzgebiet, das aus einer vorläufig unbekannten An von getrennten Untergebieten besteht. Wir wollen so Punkte z betrachten, die innerhalb eines beliebigen Un gebietes, das dem gegebenen Convergenzpunkte x geh liegen. Dann convergirt die Reihe $z\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots$ und z nach x.

Aus dieser Convergenz folgen gewisse Algorithmen. diese Algorithmen näher zu untersuchen, wollen wir folge drei Fälle betrachten: 1. $|f^{(1)}(z)| < 1$ aber $f^{(1)}(x)$ ist von verschieden. Dieser Fall ist von H. G. Koenigs.[1] [2] [3] präcis bearbeitet.

2. $f^{(1)}(x) = o$. Dieser Fall ist in denselben Aufga wie der erste von H. A. Grevy[4]) bearbeitet. 3. $|f^{(1)}(x)|$ = Dieser Fall unter der Voraussetzung $f^{(1)}(x) = +1$ ist H. Lémeray[5]) und Léau[6]) in denselben Aufgaben un sucht.

§ 44. Die Koenigs'sche Theorie. Theorem Innerhalb des ganzen Convergenzgebietes, dem Punkte x zugeordnet ist, convergirt Reihe: $(z - x) + (z_1 - x) + (z_2 - x) + \ldots$. und ste eine Funktion dar, die innerhalb des gan Convergenzgebietes des Punktes x keine and Singularitäten hat, als die ausserordentlic d. h. gewöhnlichen Pole.

---

[1]) Bulletin des Sciences Mathem. et Astron. Band II. 1883. p. 340-5

[2]) Annales Scientifiques de l'Ecole normale superieure, Serie Tome I. 1884. Supplement.

[3]) Daselbst. Serie III, Tome II. 1885. p. 385—404.

[4]) Daselbst. Serie III, Tome XI. 1894. p. 249—323.

[5]) Bulletin de la Société Mathematique de France. Tome XI 1895. p. 255—262.

[6]) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Tom E. Chapitrd III, IV, V.

Theorem 2. Wenn eine gegebene Funktion) in dem Punkte x gleich Null und innerhalb ıer gewissen Umgebung von x eindeutig bemmt, endlich, stetig ist, dann gehört zu lem Punkte des Convergenzgebietes von x ıe solche Zahl h, dass die Reihe $\wp(z_h) + \wp(z_{h+1}) + {}_{h+1}) + \ldots$ convergirt und eine ebenso einutig bestimmte, endliche, stetige Funktion rstellt.

Theorem 3. Innerhalb des ganzen Conrgenzgebietes ist die Reihe $1 + f^{(1)}(z) + f_2^{(1)}(z) + (z) + \ldots\ldots$ eine convergente Reihe und stellt ıe vollständig bestimmte, endliche, stetige nktion vor, die nur ausserwesentliche ıgularitäten enthalten darf. Das ist eine sehr htige Reihe, weil sie nicht nur innerhalb des speciell ıgewählten Convergenzgebietes convergirt, sondern innerhalb ıs jeden Convergenzgebietes, das dem beliebigen positiven ıvergenzpunkte zugeordnet ist.

Theorem 4. Wenn eine gegebene Funktion) in dem Punkte x gleich 1 und innerhalb ıer gewissen Umgebung von x eindeutig bemmt, endlich, stetig ist, dann gehört zu lem Punkte des Convergenzgebietes vom x ıe solche Zahl h, dass das Produkt $\wp(z_h) . {}_{+1}) \wp(z_{h+2}) \ldots$ convergirt und eine ebenso einıtig bestimmte, endliche, stetige Funktion rstellt.

Theorem 5. Innerhalb des ganzen Conrgenzgebietes, das dem Punkte x zugeordnet s, convergirt in dem Falle $o < |f^{(1)}(x)| < 1$ der ısdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n(z) - x}{(f^{(1)}(x))^n}$$

d stellt eine eindeutig bestimmte, endliche nktion von z vor, die auch stetig ist. Sie ist lch Null in allen Żórawskischen Punkten, also innerhalb ıs getrennten Untergebietes ist diese Funktion, die wir

Koenigs'sche adjungirte Funktion der Bas funktion f(z) werden nennen, in einem einzigen Pun gleich Null. Sie ist unbestimmt längs jeder Periph der einzelnen, getrennten Untergebiete.[1]) Wir sehen also, diese Funktion B(z) innerhalb des Convergenzgebietes, dem Punkte x zugeordnet ist, aber nur innerhalb di Gebietes eine eindeutig bestimmte, endliche, stetige von verschiedene Funktion ist. Jedes Untergebiet enthält ei Nullpunkt der Koenigsschen Funktion, nämlich seinen Żóra kischen Punkt und unendlich viele Pole der Koenigs'sc Funktion, die unendlich dicht die Peripherie des Untergebie bilden. Die Koenigs'sche adjungirte Funktion B(z) spielt ausserordentlich wichtige Rolle. Wenn $f^{(1)}(x)$ eine compl Zahl ist, dann construiren wir zwei Curvenbüschel: 1) B(z) = const.; 2) arg B(z): Const.

Alle Curven 1) sind geschlossene Ovale, die den Punk oder jeden Zórawskischen Punkt umschliessen, die sich unendlich wachsendem C der Peripherie des entsprechen Untergebietes nähern. arg . B(z) = Const. Alle 2) Cur bilden eine Schaar, die sich in dem Punkte x oder in je einzelnen Żòrawskischen Punkt in einen Büschel zusamm treffen. Um die invarianten Curven zu bestimmen, set wir mod B(z) = r, arg . B(z) = φ,

$$\operatorname{mod} f^{(1)}(x) = \alpha$$
$$\arg f^{(1)}(x) = \beta,$$

dann stellt uns die Gleichung

$$-\frac{1}{\alpha} \arg B(z)$$

die Gleichung a . mod B(z) = Const.
eine Schaar von invarianten Curven für f(z) dar, die sich in d Punkte x und in jedem Zórawskischen Punkte in Büscheln z sammentreffen. Jedem Punkte in dem Convergenzgebiete vo spricht eine invariante Curve, die entweder durch x o einen Żórawskischen Punkt geht. Hier bleibt die Iteratio kette nur eine gewisse Zeit dieser Curve eingeschrieben, w die Ecken sprungweise in invariante Curven, die sich r

[1]) Dabei sie ist unendlich gross in ganzer Kugelfläche, die nicht in halb des Convergenzgebietes des Punktes x enthalten ist.

rten Żórawskischen Punkten den niedrigeren Ordnungen ndigen, treten; endlich tritt sie auf diejennige invariante ve, die dem Punkte x selbst gehört; von diesem Momente ot sie stets dieser Curve eingeschrieben und nähert sich Convergenzpunkte x.

§ 45. Einführung der Korkine'schen Funkn. Theorem 6. Innerhalb jedes beliebigen ivergenzgebietes von einfacher Convergenz llt uns der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}(z) - f_n(z)}{f_n^{(1)}(z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

e vollständig bestimmte, endliche, stetige nktion vor. Sie ist gleich Null entweder in den vergenzpunkten erster Ordnuug, oder in allen Żórawskischen kten; also jedes Untergebiet enthält nur einen einzigen kt, wo diese Funktion, die wir „die Korkine'sche ungirte Funktion der Funktion f(z)" nennen en. Diese Funktion ist von Lemeray: „Dérivées des ions itératives par rapport a l'indice l'iteration" [1]) eführt. Sie ist unendlich gross in unendlich vielen Punkten, ler Gleichung $f_n^{(1)}(z) = 0$, bei endlichem Werthe von n, gen.

Wir wollen das Integral:

$$\lim_{n=\infty} \int_z^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\, dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

r betrachten, wobei vorausgesetzt werde, dass der Integraweg sich vollständig innerhalb derjenigen Gebiete befindet, er Audruck (A) wirklich einen bestimmten Werth erreicht, ler Integrationsweg darf nie die Peripherie desjenigen Untertes schneiden, wo sich z befindet. Selbstverständlich ie Integration dann nnd nur dann anwendbar, wenn Punkte z und f(z) sich innerhalb eines und desselben ergebietes befinden. Wenn aber der Punkt z einem Unterte, f(z) einem anderen gehört, dann muss der Integrations-

[1]) Bulletin de la société Mathematique de France, Tome XXV. 7 p. 92—95.

weg die Peripherien der beiden Untergebiete durchschnei
und solche Gebiete kreuzen, wo der Ausdruck (A) entwe
stets unendlich gross ist (wenn t sich innerhalb eines r
mischen Convergenzbereiches befindet, wo als $f_{n+1}(t) - f_n(t)$
Null verschieden bleibt und $f_n^{(1)}(t)$ in limite gleich Null ist)
keinen bestimmten Werth hat, oder endlich, wo dieser A
druck eine vollständig verschiedene Funktion darstellt.

In diesem Falle, hat die Funktion, die unter dem Inte
steht, entweder keinen Sinn längs gewisser Theile
Integrationsweges, oder sie ist da unendlich gross, oder end
ist sie durch eine fremde Funktion ersetzt.

Wenn aber beide Punkte z und f(z) innerhalb eines
desselben Gebietes bleiben, dann stellt der Integrations
keine Singularitäten vor. Es giebt nur einen einzigen Pu
wo die Funktion, die unter dem Integral steht, unend
gross ist, nämlich denjenigen Żórawski'schen Punkt, der
innerhalb dieses Untergebietes befindet, oder den Converg
punkt x selbst je nach der Lage des Untergebietes.
können voraussetzen, dass der Integrationsweg weder d
diesen Punkt geht, noch ihn umkreist. In der Gleichung

$$\mathfrak{p}(z) = \lim_{n=\infty} \int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzen wir $z = f(z_1) \ldots (2)$, dann erhalten wir

$$\mathfrak{p}\,f(z_1) = \lim_{n=\infty} \int_{f(z_1)}^{f_2(z_1)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_{z_1}^{f(z_1)} \frac{f_n^{(1)} f(t)\,d f(t)}{f_{n+1} f(t) - f_n f(t)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_{z_1}^{f(z_1)} \frac{f_{n+1}^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)} = \mathfrak{p}(z_1) \ldots\ldots$$

Wir haben also den Satz: W e n n a l l e d r e i Pu
$z, f(z), f_2(z)$ s i c h i n n e r h a l b e i n e s u n d d e s s e l
U n t e r g e b i e t e s b e f i n d e n, d a n n i s t

$$= \lim_{n=\infty} \int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} = \lim_{n=\infty} \int_{f(z)}^{f_2(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)}$$

ɔei beide Integrationswege weder durch den Żórawski-
en Punkt gehen, noch ihn umkreisen (resp. den Convergenz-
kt, wenn er innerhalb des Untergebietes enthalten ist).
: sollen aber zeigen, dass der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)}$$

ıt nur durch die Substitution $[z, f(z)]$ ungeändert bleibt,
lern er von z unabhängig ist.

Es soll sein

$$\lim_{n=\infty} \int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} = \lim_{n=\infty} \int_{z'}^{f(z')} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)}$$

ɔei $z, f(z), z', f(z')$ innerhalb eines und desselben Unter-
ietes enthalten sind und die Integrationswege den be-
nten Bedingungen genügen. Wir haben die Identität:

$$\int_{z}^{f(z)} + \int_{f(z)}^{f(z')} + \int_{f(z')}^{z'} + \int_{z'}^{z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ɪr der Bedingung, dass der Żórawskische- resp. der
vergenspunkt sich ausserhalb dieses geschlossenen Weges
ndet. Wir haben

$$\lim_{n=\infty} \int_{f(z')}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} = \lim_{n=\infty} \int_{z}^{z'} \frac{f_n^{(1)} f(t)\,d\,f(t)}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_{z}^{z'} \frac{f_{n+1}^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)} = \lim_{n=\infty} \int_{z}^{z'} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)} \cdot\cdot \quad (2)$$

Wir sehen also, dass

$$\int_{f(z)}^{f(z')} + \int_{z'}^{z} = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es bleibt also $\int_{z}^{f(z)} + \int_{f(z)}^{z'} = 0$, d. i. $\int_{z}^{f(z)} = \int_{z'}^{f(z')}$ ....

Wenn die beiden Punkte z und z′ mit ihren er Iterationen sich innerhalb eines und desselben Untergebi befinden, sind die Ausdrücke

$$\int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t)\,f(t)} \quad \text{und} \quad \int_{z'}^{f(z')} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)}$$

entweder gleich, oder unterscheiden sie sich um eine w kürliche, ganze Multiplicität desjenigen Periodicitätsmodu der diesem Untergebiete zugeordnet ist.

Fundamentalsatz. Wenn der Punkt z u seine erste Iteration sich innerhalb eines desselben Untergebietes befinden, das d einfachen Convergenzgebiete gehört, dann der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \int_{z}^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t) - f_n(t)}$$

eine constante Grösse, die diesem Untergeb zugeordnet ist, unter der Voraussetzung, d der Integrationsweg vollständig innerh dieses Untergebietes enthalten ist. Es han sich um den Werth dieser constanten Grösse.[1])

§ 46. *Bedeutung der Korkineschen Funkt für die Berechnung der iterirten Funktion* Setzen wir voraus, dass beide Punkte z und f(z) sich in halb eines gewissen Untergebietes befinden, dann ist e Ausdruck (B) eine gewisse constante Grösse, die wir di (C) nennen wollen. Dann convergirt der Ausdruck

[1]) Diese constante Grösse ist gleich $\lg f^{(1)}(x)$.

$$\lim_{\substack{N=\infty \\ n=\infty}} \underset{t+\frac{C}{N}\frac{f_{n+1}(t)-f_n(t)}{f_n^{(1)}(t)}}{\overset{N}{\prod}} (z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

einem bestimmten Werth, der nichts anderes ist als $f(x)$
t. Daraus folgt:

Fundamentalsatz 1. Wenn beide Punkte
d $f(z)$ innerhalb eines und desselben Unter-
ietes enthalten sind, dann besteht identisch

$$\equiv \lim_{\substack{N=\infty \\ n=\infty}} \underset{t+\frac{C}{N}\frac{f_{n+1}-(t)f_n(t)}{f_n^{(1)}(t)}}{\overset{N}{\prod}} (z) \quad ; \; C = \int_z^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t)-f_n(t)}$$

Hier wollen wir eine wichtige Bemerkung machen: der
rationsweg, der uns die Constante

$$\lim_{n=\infty} \int_z^{f(z)} \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{f_{n+1}(t)-f_n(t)}$$

ellt, soll der Iterationskette $z\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{C}{N}\frac{f_{n+1}(z_k)-f_n(z_k)}{f_n^{(1)}(z_k)} \text{ ist.}$$

ch ähnlich sein, dass sein Werth ungeändert bleiben
wenn wir ihn (Integrationsweg) durch die Iterationskette
$z_3 \ldots z_N$ selbst ersetzen. Der Einfluss des Integrations-
s auf die Constante C ist folgender, dass jedem Umkreisen
órawskischen Punktes resp. des Convergenzpunktes, der
halb dieses Ovals enthalten ist, eine Addition des Perio-
itsmoduls mit dem entsprechendem Vorzeichen zu der
ante C entspricht. Dieser Periodicitätsmodul ist durch
ormel

$$\pi . \lim_{n=\infty} \left| \frac{(t-x_\nu)f_n^{(1)}(t)}{f_{n+1}(t)-f_n(t)} \right.^{t=x_\nu} \text{ und ist gleich } \frac{2\pi\sqrt{-1}}{f^{(1)}(x)-1}$$

gstellt, wo x_ν der Żórawskische Punkt oder Convergenz-
l ist, der innerhalb dieses Untergebietes enthalten ist.

Theorem. Diejenige Zweigfunktion der vo laufig unbekannten iterirten Funktion m der Basisfunktion f(z) und dem Exponenten die sich innerhalb desselben Untergebiet von erster Ordnung befindet, als z ist ei periodische Funktion des Exponenten mit de Periodicitätsmodul $\gamma(x)$, wo

$$\gamma(x) = \frac{2\pi i}{f^{(1)}(x) - 1}$$

dann ist

$$f(z) = \lim_{N=\infty} \prod_{n=\infty}^{N} \left(t + \frac{c\lambda.\gamma(x)}{N} \frac{f_{n+1}(t) - f_n(t)}{f^{(1)}_{n+1}(t)} \right)(z)$$

identisch, wo λ eine beliebige ganze Zahl ist.

Theorem. Diejenige Zweigfunktion der vo läufig unbekannten iterirten Funktion mit d Basisfunktion f(z) und dem Exponenten a, sich innerhalb desselben Untergebietes wie z befindet, mit dem Ausdruck

$$\lim_{N=\infty} \prod_{n=\infty}^{N} \left(t + \frac{ac}{N} \frac{f_{n+1}(t) - f_n(t)}{f^{(1)}_{n}(t)} \right)(z)$$

identisch.

Curriculum vitae.

Ego, Lucianus Aemilius Böttcher, Ev. Luth. Conf. Var-
ɩnsis a. D. MDCCCLXXII die mensis Januaris septimo
ts, primum realem scholam a viro docto Joannes Pankie-
directam frequentavi et absolvi a. D. MDCCCXCI
annos post, litteris latinis ac graecis doctus ab externo
ini maturitatis in gymnasio classico Lomsinensis (Lomsa,
t est guberniae Lomsinensis in regno Polonico) susten-
civis academicus Universitatis Caesareae Varsaviensis
factus, ordini mathematicorum adscriptus. Ex quorum
ero anno D. MDCCCXCIV aliis cum multis pro communi
essione academica in honorem memoriae Johannis Kilinski
s seditionis Polonicae anni MDCCXCIV facta, relegatus,
olin se contuli, ubi civis academicus scholae Polytechnicae
areo-Regiae ordinis machinarum construendarum factus
Postquam duos annos in studiae incubui, examen publicum
erste Staatsexamen) fecis, atque, dum philosophiae doctoris
lum consequi volebam, Lipsiam veni, ubi tres iam semestres
ris incumbo.

Viertes Programm

des

[F]. B. PRIVAT-GYMNASIUMS

am

SEMINARIUM VINCENTINUM

[K]naben-Seminar der Diöcese Brixen)

veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres

1879.

Abhandlung:

Mac-Laurin's Summenformel und einige Anwendungen derselben.

Von Prof. Josef Braun.

BRIXEN,

Druck von A. Weger's Hofbuchdruckerei.

Die Summenformel von Mac-Laurin und einige Anwendungen derselben.

Vorbemerkung.

In nachstehender Abhandlung wird versucht, die Herleitung der ihmten Mac-Laurin'schen Summenformel mit Hilfe einer von Darboux ·ührenden Function [Man sehe Liouville's Journ. de Math. (serie 3) e II.] zu geben. Selbstverständlich kann hiebei eine Untersuchung Natur und Haupteigenschaften der Bernoulli'schen Functionen nicht ;angen werden.

In den Anwendungen der Mac-Laurin'schen Formel finden sich einige von Darboux l. cit. niedergelegten Gedanken verwerthet und wird erhin eine strenge Herleitung der Stirling'schen Reihe für den Logamus des Products der x ersten ganzen Zahlen gegeben.

Betrachten wir die folgende Function von t*)

$$) = \varphi^n (t) \,.\, F(x+ht) - h\, \varphi^{n-1} (t) \,.\, F'(x+ht) + h^2\, \varphi^{n-2} (t) \,.$$

$$F''(x+ht) - \ldots\ldots + (-1)^n\, h^n\, \varphi(t) \,.\, F^n(x+ht)$$

·in bezeichne φ (t) ein Polynom vom Grade n und φ', φ'', ... φ^{n-1}, eien die successiven Derivirten der Hauptfunction φ. — Unter F (u) ine reelle Function der gleichfalls als reell gedachten Variablen x und ı verstehen. Nebstdem wird vorausgesetzt, dass die Functionen F (u), ı), ..., F^n (u), F^{n+1} (u) endlich und stetig bleiben, wenn ihr ıment von x bis x+h variirt.

Nun ist

$$\Psi' (t) = (-1)^n\, h^{n+1}\, \varphi (t).\; F^{n+1} (x+ht)$$

---

*) Nach Darboux in Liouville's Journ. de Math. (3. serie) tome II.

und zufolge der Voraussetzung in Betreff der Function F

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) . F^{n+1}(x+ht) d$$

führt man die Werte von $\Psi(1)$, $\Psi(0)$ ein, so kommt

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} &\varphi^n(0)\,[F(x+h) - F(x)] \\ &= h\,[\varphi^{n-1}(1) . F'(x+h) - \varphi^{n-1}(0) . F'(x)] \\ &- h^2\,[\varphi^{n-2}(1) . F''(x+h) - \varphi^{n-2}(0) . F''(x)] \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ (-1)^{n-1} h^n\,[\varphi(1) . F^n(x+h) - \varphi(0) . F^n(x)] \end{aligned}$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) . F^{n+1}(x+ht)\,dt \text{ ist.}$$

Diese Formel erweist sich als sehr fruchtbar. Indem man bezügl Polynomes $\varphi(t)$ verschiedene Annahmen macht, resultiren aus de theils schon bekannte, theils neue Reihen, die wegen ihrer Res mehrfach brauchbar sind.

Nimmt man beispielsweise $\varphi(t) = (t-1)^n$, so erhält man d lor'sche Reihe in ihrer gewöhnlichen Form:

$$\text{II. a)} \quad F(x+h) - F(x) = \sum_1^{n)} F^n(x) . \frac{h^n}{n!} + F^{n+1}(x+\theta h).$$

Setzt man 2n für n und nimmt $\varphi(t) = t^n (t-1)^n = (t^2-t)^n$, so

$$\text{b)} \left\{ \begin{aligned} &F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \\ &\qquad [F''(x+h) - F''(x)] \\ &+ \ldots\ldots + (-1)^{k-1} . \frac{n(n-1) \ldots\ldots\ldots (n-k+1)}{2n(2n-1) \ldots\ldots\ldots (2n-k+1)} \\ &\qquad [F^k(x+h) + (-1)^k F^k(x)] \\ &+ \ldots\ldots + (-1)^{n-1} . \frac{h^n}{2n(2n-1) \ldots\ldots\ldots (n+1)} . \\ &\qquad [F^n(x+h) + (-1)^{n-1} F^n(x)] + R_{2n} \end{aligned} \right.$$

ler Rest gegeben ist durch die Gleichung

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \,.\, F^{2n+1} (x+ht)\, dt$$

Nun ist $\int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{n+1}\, dt$

durch n—malige Anwendung

$$\int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\ldots\,n}{(n+1)\,\ldots\,(2n+1)}$$

'olglich $R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{F^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1)\,\ldots\ldots\,2n]^2}$

Die Formel II b) erscheint deshalb bemerkenswert, weil man durch
be, wenn man nur n Derivirte zählt, eine Approximation von der
ung h^{2n+1} erreichen kann.

Setzt man in derselben successive $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man

$$F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2} [F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12} \,.\, F'''(x+\theta h)$$

$$F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2} [F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12} [F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^5}{720} \,.\, F^{V}(x+\theta h)$$

$$F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2} [F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{8} [F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^3}{120} [F'''(x+h) - F'''(x)] - \frac{h^7 \,.\, F^{VII}(x+\theta h)}{100800}$$

Man kann noch bemerken, dass das Restglied hier mit einem nu-
chen Coefficienten behaftet ist, der viel kleiner ist als der entspre-
e Coefficient im Restgliede der Taylor'schen Reihe.

Die Coefficienten, welche in der Formel I. erscheinen, sind die Deri-
von $\varphi(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$. Man kann nun fragen, ob es nicht
ch wäre, mehrere jener Coefficienten einander gleich zu machen und
'ormel herzustellen, in welche nur die Differenzen $F^{(k)}(x+h)$ —
) eingehen.

Die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen des Polynoms $\varphi(t)$
$= 0$ und $t = 1$ denselben Wert annehmen sollen, ist unerfüllbar;
da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi^{1}(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n}{n!}$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(1) + \frac{t}{1}\varphi^{1}(1) + \ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(1) + \frac{t^n}{n!}\,.$$

ist, so müsste $\varphi(t+1) = \varphi(t)$ sein, was auch t wäre — ein Ab da kein Polynom periodisch ist.

Stellt man die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen de noms φ (t) mit Ausnahme der vorletzten für die besagten Wert einzeln einander gleich werden sollen, so ist hiezu, wie man aus

$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = [\varphi^{n-1}(1) - \varphi^{n-1}(0)] \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

ersieht, notwendig aber auch hinreichend, dass die Differenz φ (t φ(t) nur den Term mit t^{n-1} enthalte; das gesuchte Polynom mu der Functionalgleichung

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = C\,.\,x^{n-1}$$

genügen, und da man sich dieselbe mit einer passend gewählt stante multiplicirt denken kann, so kann man die obige Bedingu drücken durch $\varphi(x+1) - \varphi(x) = nx^{n-1}$

Wenn nun x eine ganze Zahl ist, so resultirt hieraus weiterhin

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x-1) &= n(x-1)^{n-1} \\ \varphi(x-1) - \varphi(x-2) &= n(x-2)^{n-1} \\ \ldots &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(2) - \varphi(1) &= n\,.\,1^{n-1} \\ \varphi(1) - \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

und wenn $\varphi(0) = 0$ genommen wird, so hat man für ganze x

$$\varphi(x) = n\,[x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 1^{n-1}]$$

Setzt man noch $x = p-1$, so hat man

$$\varphi(p) = n\,[(p-1)^{n-1} + (p-2)^{n-1} + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 1^{n-}$$

Natur und Eigenschaften der Function φ.

Um die Function φ zu finden, muss das Problem, „die Sum gleichen Potenzen der natürlichen Zahlen auszuwerthen" in An nommen werden.

Die Aufgabe sei nun: Eine endliche Reihe von der Form

$$1^m + 2^m + \ldots\ldots + (p-2)^m + (p-1)^m$$

zu summiren, wo p und m als positive ganze Zahlen gedacht we

Lässt sich auch die Summation durch recurrente Berechn führen, so ist doch ein independentes Gesetz nur durch Dif rechnung zu gewinnen.

Bemerkt man zunächst, dass

$$a^m = D_x^m (e^{ax})_{(x=0)}$$

; man

$$+ 2^m + \cdots\cdots + (p-2)^m + (p-1)^m = D_x^m [e^x + e^{2x} + \cdots\cdots + e^{(p-2)x} + e^{(p-1)x}]_{(0)}$$

$$= D_x^m \left\{ \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} \right\}_{(0)} = D_x^m \left\{ 1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} \right\}_{(0)}$$

Da nun

$$1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1},$$

ıdelt es sich um die Entwicklung der Factoren des letzteren Productes.

Es ist

$$\frac{-1}{} = p + \frac{p^2}{2!} x + \frac{p^3}{3!} x^2 + \cdots\cdots + \frac{p^{m+1}}{(m+1)!} x^m + \cdots$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

e A noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen.

Man hat nun

$$+ (A_1 + \tfrac{1}{2}) x + (A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!}) x^2 + (A_3 + \tfrac{A_2}{2!} + \tfrac{A_1}{3!} + \tfrac{1}{4!}) x^3 + \cdots$$

e Gleichung nur bestehen kann, wenn die Coefficienten von x, x^2, . . . sämmtlich = 0 sind.

Hieraus ergeben sich Bestimmungsgleichungen für A_1, A_2, ...

$$A_1 + \tfrac{1}{2!} = 0 \qquad\qquad A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!} = 0 \qquad\qquad A_2 = +\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2!}$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

man $-x$ statt x, so kommt einerseits

$$\frac{-x}{e^{-x}-1} = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

erseits ist

$$\frac{-x}{e^{-x}-1} = \frac{-xe^x}{1-e^x} = x - \frac{x}{1-e^x} = 1 + (A_1 + 1) x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

folglich $1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots\ldots = 1 + (A_1$
$+ A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$

d. h.

$$\begin{aligned} -A_1 &= (A_1 + 1), &\quad \text{daraus } A_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ A_2 &= A_2 && \\ -A_3 &= A_3 & \text{„} \quad A_3 &= 0 \\ A_4 &= A_4 && \\ -A_5 &= A_5 & \text{„} \quad A_5 &= 0 \\ &\ldots && \end{aligned}$$

Daraus scheint hervorzugehen, dass die mit ungeraden Indices beh A, von A_3 angefangen, sämmtlich $= 0$ sind.

Dividirt man 1) durch x, so kommt

$$2) \quad \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots\ldots, \text{ wo } A_1 =$$

Setzt man hierin $-x$ statt x und bemerkt, dass

$$\frac{1}{e^{-x}-1} = \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{-e^x}{e^x - 1} \text{ wird, so hat man}$$

$$3) \quad \frac{-e^x}{e^x - 1} = -\frac{1}{x} + A_1 - A_2 x + A_3 x^2 - A_4 x^3 + \ldots$$

Durch Addition der Gleichungen 2) und 3) ergibt sich in Betrach $2 A_1 = -1$ ist

$$0 = 2 A_3 x^2 + 2 A_5 x^4 + 2 A_7 x^6 + \ldots\ldots$$

woraus unzweifelhaft folgt, dass $A_3 = A_5 = A_7 = \ldots\ldots = 0$

In Betracht, dass $A_1 = -\frac{1}{2}$ ist, kann die Gleichung 2) fol massen geschrieben werden.

$$x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}\right) = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} A$$

wo $A_0 = 1$ ist, während $A_2, A_4, \ldots$ noch zu bestimmen sind.

Weil aber

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(r)} \cdot \frac{x^{r+1}}{(r+1)!}$$

so folgt, wenn obige Gleichung damit multiplicirt wird

$$x + \tfrac{1}{2} \sum_{0}{}_{(r)} \frac{x^{r+2}}{(r+1)!} = \sum{}_{(k,r)} A_{2k} \frac{x^{2k+r+1}}{(r+1)!}$$

wo rechts die Summation simultan auf die Variablen k, r zu erstrec

immt man hier rechts und links den Coefficienten von x^{m+1}, wo positive ganze Zahl vorstellt, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m!} = \sum_{[r+2k=m]} \frac{A_{2k}}{(r+1)!} = \sum_{[r+2k=m]} \frac{A_{2k}}{(m+1-2k)!} \quad {}^{*)}$$

t man von der Reihe rechts das Glied für $k=o$ ab, (indem man nd dann $k+1$ statt k schreibt), multiplicirt beiderseits mit $m!$ ducirt die Gleichung auf Null, so kommt

$$\sum_{[r+2k=m-2]} \frac{m!}{(m-1-2k)!} A_{2k+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m+1} = 0$$

lcher Gleichung, wenn man statt m successive 2, 4, 6, ... (oder 5, 7, ...) setzt, die Coefficienten A_2, A_4, ... bestimmbar sind. ubtrahirt man Gleichung 3) von 2), so ergibt sich weiter, wenn it $\frac{1}{2}x$ multiplicirt wird,

$$\cdot \frac{e^x+1}{e^x-1} = 1+A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} A_{2k}\, x^{2k},$$

$= 1.$

ese Gleichung liefert, wenn man statt e^x die Reihe $\sum_0^\infty{}_{(r)} \frac{x^r}{r!}$ setzt, die Brüche t und vergleicht, die obigen Bestimmungsgleichungen für die A nochmals.

achtet man, dass

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}} = -\frac{e^{\frac{1}{2}xi.i}+e^{-\frac{1}{2}xi.i}}{e^{\frac{1}{2}xi.i}-e^{-\frac{1}{2}xi.i}} =$$

$$i \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}xi}{\sin \frac{1}{2}xi}, = i \cdot \cot. \tfrac{1}{2}xi,$$ so folgt, wenn

4) $-xi$ statt x einführt

$$x \cdot \frac{e^{-xi}+1}{e^{-xi}-1} = \tfrac{1}{2}x \cot \tfrac{1}{2}x = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - \ldots\ldots$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} (-1)^k A_{2k} \cdot x^{2k}$$

em weiss man, dass

$$\tfrac{1}{2}x \cdot \cot \tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_3}{4!}x^4 - \frac{B_5}{6!}x^6 - \ldots\ldots$$

---

*) Die Gleichungen unter dem Σ bestimmen die Amplitude der Summation. öder. Lehrb. d. Arith. u. Alg. I. Bd.)

$$= -\sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, \text{ für } -2\pi < x < 2\pi$$

wenn man unter B_{-1} die negative Einheit versteht.

Die nunmehr sich ergebende Gleichung

$$\sum_{0}^{n}{}_{(k)} (-1)^k A_{2k} \cdot x^{2k} = -\sum_{0}^{n}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

liefert schliesslich

$$A_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

Nota I) Die hier auftretenden Coefficienten B sind die (von Euler so gena[nnten Ber]noulli'schen Zahlen.

Die n^{te} Bernoulli'sche Zahl ist nach Prof. Glaisher in Cambrid[ge] durch die folgende Determinante n^{ten} Grades:

$$\frac{B_{2n-1}}{2^n (2n)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{2n!} & \frac{1}{2n-2!} & \frac{1}{2n-4!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Nota II) Aus Gleichung 2) resultirt die Cauchy'sche Gleichung

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_3}{4!} x^2 + \dots$$

Der gesuchte Factor ist also

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \tfrac{1}{2} x + \sum_{0}{}_{(k)} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

und folglich

$$\frac{e^{px} - 1}{e^x - 1} = p + \left(\frac{p^2}{3!} - \frac{p}{2}\right) x + \left(\frac{p^3}{3!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{2!} + \frac{p}{2!} B_1\right)$$

$$+ \left(\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^m}{m!} + \frac{B_1}{2!} \cdot \frac{p^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{B_3}{4!} \cdot \frac{p^{m-3}}{(m-3)!} + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot \frac{p^{m-\overline{2k-1}}}{(m-\overline{2k-1})!}\right) x$$

e Summe

$^{1} + 2^m + \dots\dots + (p-2)^m + (p-1)^m =$

$$\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^m}{m!} + \dots\dots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}\cdot\frac{p^{m-(2k-1)}}{(m-2k-1)!}\Big)x^m\Big]_{(0)}$$

$$\frac{{}^{+1}}{+1} - \frac{1}{2}p^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1}B_1\,p^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3}B_3\,p^{m-3} + \dots\dots$$

$$+ (-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{m}{2k-1}B_{2k-1}\,p^{m-(2k-1)} + \dots$$

$$\frac{}{1}\Big[p^{m+1} - \frac{m+1}{2}\cdot p^m + \binom{m+1}{2}B_1\,p^{m-1} - \binom{m+1}{4}B_3\,p^{m-3} + \dots$$

$$+ (-1)^{k-1}\binom{m+1}{2k}B_{2k-1}\,p^{m-(2k-1)}\Big]$$

$$\frac{}{1}\cdot\varphi_{m+1}(p)$$

rechts stehende Reihe für $\varphi_{m+1}(p)$ schliesst bei geraden m mit liede $\pm\frac{1}{m}\cdot\binom{m}{m-1}B_{m-1}\,p$, bei ungeraden m mit dem Gliede $\pm$ $\cdot\binom{m}{m-2}B_{m-2}\,p^2$, folglich hat φ (p) keinen von p freien Term.

etzt man noch $m = n-1$, so kommt

$$= p^n - \frac{n}{2}p^{n-1} + \binom{n}{2}B_1\,p^{n-2} - \binom{n}{4}B_3\,p^{n-4} + \binom{n}{6}B_5\,p^{n-6} - \dots$$

gesuchte Function. Dieselbe enthält keinen von p freien Term; $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{4}$, ... sind die Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz, unter , ... die Bernoulli'schen Zahlen zu verstehen.

Während der Ableitung zufolge p eine positive ganze Zahl > 1 be- kann im Polynom φ statt p eine beliebige Variable t gesetzt und man erhält dann einen Ausdruck, welcher eine ganze ra-le Function von t darstellt. Sohin ist die Function φ_n (t) durch eichung

$$\varphi_n(t) = t^n - \frac{n}{2}t^{n-1} + \sum_{k=1}^{k\leq\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{k-1}\binom{n}{2k}B_{2k-1}\,t^{n-2k}$$

t und heisst die Bernoulli'sche Function n^{ter} Ordnung.

Da nun $D_x^m\left\{\frac{e^{tx}-e^x}{e^x-1}\right\}_{(x=0)} = \frac{1}{m+1}\cdot\varphi_{m+1}(t)$ so ergibt sich, ie Functionen φ Differenzial-Quotienten sind.

Eigenschaften der Bernoulli'schen Functionen.

I.) $\varphi_n(0) = 0$

II.) $\varphi_n(t+1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$

Denn es ist

$$\varphi_n(t+1) - \varphi(t) = n\left[D_x^{n-1}\left(\frac{e^{(1+t)x} - e^x}{e^x - 1}\right)_{(0)} - D_x^{n-1}\left(\frac{e^{tx} - e}{e^x -}\right.\right.$$

$$= n\, D_x^{n-1}\left(e^{tx}\right)_{(0)} = n\, t^{n-1}$$

III.) Die Functionen φ sind bezüglich der Argumente t un symmetrisch oder alternirend, je nachdem sie von gerader oder ung Ordnung sind, d. h. es ist

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Denn es ist

$$D_x^m \left\{\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = \frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(t)$$

Ferner ist identisch

$$\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1} = 1 - \frac{e^{-tx} - 1}{e^{-x} - 1} = 1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}, \text{ wenn } -x = z \text{ gesetz}$$

somit

$$D_x^m \left\{\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = D_x^m \left\{1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}\right\}_{(0)} = - D_x^m \left\{\frac{e^{tz} -}{e^z -}\right.$$

und $$\frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(1-t) = \frac{1}{m+1} \cdot (-1)^{m+1} \varphi_{m+1}(t)$$

Hieraus folgt, wenn noch m—1 statt m gesetzt wird

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Die Function φ nimmt also von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ in umgekehrter dieselben absoluten Werte an, welche sie von $t = 0$ bis $t = 1/2$ hat zwar mit dem gleichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je dem die Function von gerader oder ungerader Ordnung ist.

Die Untersuchung der Function φ kann daher auf das Interv $t = 0$ bis $t = 1/2$ beschränkt werden.

Für $t = 1/2$ und ein ungerades $m = 2n-1$ gibt die obige Gl

$$\varphi_{2n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

ferner da $\varphi_m(0) = (-1)^m \cdot \varphi_m(1)$ und

$\varphi_m(0) = 0$ ist,

$\varphi_m(1) = 0$ wenn nur $m > 1$ ist.

$$\text{V.)}\qquad \varphi_{2n}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot B^{2n-1}$$

$$\frac{\varphi_m\left(\frac{1}{2}\right)}{m} = D_x^{m-1}\left\{\frac{e^{x/2}-1}{e^x-1}\right\}_{(0)} = D_x^{m-1}\left\{\frac{e^{x/2}+1}{e^x-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$

$$= D_x^{m-1}\left\{\frac{1}{e^{x/2}-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$

ach Gleichung 2) ist

$$\frac{\ }{1} = \frac{2}{x} + 2A_1 + 2A_2 x + 2A_3 x^2 + \ldots\ldots + 2A_m x^{m-1}$$

$$\frac{1}{e^{x/2}-1} = \frac{2}{x} + A_1 + A_2 \cdot \frac{x}{2} + A_3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + A_m\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}$$

zieht man

$$- \frac{2}{e^x-1} = -A_1 + A_2\left(\frac{1}{2}-2\right)x + A_3\left(\frac{1}{2^2}-2\right)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + A_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-2\right)x^{m-1} + \ldots$$

$$\frac{1}{m} \cdot \varphi_m\left(\tfrac{1}{2}\right) = -(m-1)!\ A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$

$$\varphi_m\left(\tfrac{1}{2}\right) = -m!\ A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$

nun $m = 2n-1$, so ist $A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n-1} = 0$

$= 2n$, so ist $A_{2n} = (-1)^{n-1}\dfrac{B^{2n-1}}{(2n)!}$

$$\varphi_{2n}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot B_{2n-1} \quad \text{q. e. d.}$$

) Um die Eigenschaften der Differenzialquotienten von $\varphi_m(t)$ zu n, kann man (nach Schloem. Comp. d. h. An. II. Bd.) die Function (m—1)-mal in Beziehung auf x und 1-mal in Beziehung auf t iren unter Anwendung des Satzes, dass die Reihenfolge dieser nen willkürlich ist. Es kommt

$$D_x^{m-1}\left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1}\, D_t\left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1}\left(\frac{xe^{tx}}{e^x-1}\right)$$

$$= D_x^{m-1}\left\{x\frac{e^{tx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

folglich für $x=0$

$$D_t \left\{\frac{1}{m} \cdot \varphi_m(t)\right\} = (m-1)\, D_x^{m-2} \left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right)_{(0)} + (m-1)!\, A$$

$$= \varphi_{m-1}(t) + (m-1)!\, A_{m-1}$$

worin noch die Resultate für gerade und ungerade m zu sondern

Es ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{2n}(t) &= 2n \cdot \varphi_{2n-1}(t) \qquad n > 1 \\ \varphi'_{2n+1}(t) &= (2n+1)\,[\varphi_{2n}(t) + (-1)^{n-1} B_{2n-1}] \end{aligned}\right\}$$

Durch Umkehrung gewinnt man hieraus noch

$$\int_0^t \varphi_{2n}(t)\, dt = \frac{1}{2n+1} \cdot \varphi_{2n+1}(t) + (-1)^n B_{2n-1} \cdot t$$

und als speciellen Fall

$$\int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^n \tfrac{1}{2} B_{2n-1}$$

Da $\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$, so ist immer

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = 2 \int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt$$

VI.) Um den Gang der Bernoulli'schen Functionen innerhalb d valles $t=o$ bis $t={}^1/_2$ zu übersehen, betrachten wir vorerst die nen gerader Ordnung. Irgend zwei unmittelbar auf einander folgen tionen gerader Ordnung können mit $\varphi_{2\mu}(t)$, $\varphi_{2\mu+2}(t)$ bezeichnet

Setzt man noch $t = \frac{v}{h}$, so ist

$$\varphi_{2n}\left(\frac{v}{h}\right) = \varphi_{2n}\left(\frac{h-v}{h}\right) = \frac{(2n)!}{h^{2n}} \left\{ \frac{(h-v)^{2n}}{2n!} + A_1 h \frac{(h-v)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right.$$

$$+ A_2 h^2 \frac{(h-v)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + A_{2n-2} h^{2n-2} \frac{(h-v)^2}{2!} + A_{2n-1} h^{2n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \sum_{0\,(k)}^{2n-1} A_k \frac{h^k (h-v)^{2n-k}}{(2n-k)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \psi_{2n}(h-v) \quad *)$$

*) Vgl. M. Ohm, System der Mathematik. 8. Thl.

)efficienten A sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{2k-1} &= 0 \quad , \quad A_1 = -\tfrac{1}{2} \\ A_{2k} &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \end{aligned}\right\}$$

i: jetzt die Function ψ im Intervalle $v = o$ bis $v = \frac{1}{2}h$ zu betrach-
Man kann folgenden Satz aussprechen:

Hat die Ableitung $D_v\, \psi_{2\mu}(v) = \psi'_{2\mu}(v)$ für irgend einen be-
imten positiv-ganzen Wert von v im Intervalle von $v = o$ bis $v = \frac{1}{2}h$
r bestimmtes Vorzeichen, so ist dasselbe der Fall mit der Ab-
ing $\psi'_{2\mu+2}(v)$, die aber dann innerhalb desselben Intervalles stets
ı entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Es ist $\psi'_{2\mu}(v) = \sum\limits_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu-1-k}}{(2\mu-1-k)!}$

licirt man die Gleichung mit $h^{-2\mu-2}$ und integrirt zwischen den
en $h = h$ und $h = +\infty$, so kommt

$$\int_h^{+\infty} \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh = \sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{v^{2\mu-1-k}}{(2\mu+1-k)\;(2\mu-1-k)!} \cdot \frac{1}{h^{2\mu+1-k}}$$

enbar das links stehende Integral mit ψ' stets einerlei Vorzeichen
) hat auch das rechts stehende Aggregat so lange einerlei Vor-
n, als ψ' einerlei Vorzeichen hat d. h. zufolge der Voraus-
ıng für alle Werte von v die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ h liegen.

Integrirt man noch nach v zwischen den Grenzen $v = v$ und $v = \frac{1}{2}h$
nmt

$$\iint \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh.\, dv = \frac{1}{h}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!} - \frac{1}{h^{2\mu+1}}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!}$$

s muss, weil die Summe von Summanden, die einerlei Vorzeichen
, dasselbe Vorzeichen annimmt, auch dieser Ausdruck zur Rechten
$= o$ bis $v = \frac{1}{2}h$ mit $\psi'_{2\mu}(v)$ ein und dasselbe Vorzeichen behalten.
st der Minuend der rechts stehenden Differenz

$$= \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \varphi_{2\mu+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{h} A_{2\mu}$$

ıach III.

$$= -\frac{1}{h} \cdot A_{2\mu} = (-1)^{\mu} \frac{B_{2\mu-1}}{(2\mu)!} \cdot \frac{1}{h} \;;$$

der Subtrahend kann auch so dargestellt werden

$$\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}\left[\sum_{0}^{2\mu}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\ v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} - A_{2\mu}\, h^{2\mu} \frac{v}{1!}\right]$$

Wird die Subtraction ausgeführt, so tilgen sich der Minuend zweite Glied des Subtrahends und es bleibt

$$-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \sum_{0}^{2\mu}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\ v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} = -\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+}$$

d. h. $-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+2}(v)$ hat mit $\psi'_{2\mu}(v)$ im Intervalle von bis $v = \frac{1}{2}h$ stets dasselbe und einerlei Vorzeichen.

Da nun $\psi'_2(v) = v - \frac{1}{2}h$ im Intervalle $v = 0 \ldots . \frac{1}{2}h$ beständ gativ ist, so ist $\psi'_4(v)$ beständig positiv, $\psi'_6(v)$ beständig negati beständig positiv, d. h. $\psi'_{2\mu}(v)$ im besagten Intervall beständig $\left\{\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}\right.$ je nachdem $\mu = \left\{\begin{matrix} 2\nu-1 \\ 2\nu \end{matrix}\right\}$ ist. Weil aber $\psi_{2\mu}(v)$ beständig $\left\{\begin{matrix} \text{steigen} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right.$ je nachdem die Ableitung $\psi'_{2\mu}(v)$ stets $\left\{\begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}\right\}$, so ist die Function ψ für $v = 0$ verschwindet, innerhalb des Intervalles von $v = 0$ bis v $\left\{\begin{matrix} \text{beständig negativ} \\ \text{beständig positiv} \end{matrix}\right\}$, so oft $\mu = \left\{\begin{matrix} 2\nu-1 \\ 2\nu \end{matrix}\right\}$ ist.

Wenn aber die Function ψ von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ beständig lei Vorzeichen hat, dann hat sie auch beständig dasselbe Vorzeich $v = \frac{1}{2}h$ bis $v = h$ hin, da $\psi(h - v) = \psi(v)$.

Folglich ist im Intervalle $v = 0$ bis $v = h$ der Wert von ψ_{2} ständig negativ, wenn $\mu = 2\nu - 1$ und beständig positiv, wenn $\mu =$ dacht wird. Mit diesem Verhalten von $\psi_{2\mu}(v)$ im Intervalle $v = 0$ bis stimmt, wie ersichtlich, das Verhalten von $\varphi_{2\mu}(t)$ im Intervalle $t =$ $t = 1$ überein.

Gang der Functionen $\varphi_m(t)$ für $m = 4\nu \mp 1$

Da $\varphi_2(t)$ im Intervalle von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ von Null an st gativ bleibt, so ist der Wert von $\frac{1}{3} \cdot \varphi_3'(t) = \varphi_2(t) + B_1$ für positiv, nimmt dann stetig ab und wird für $t = \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{4} + B_1 = -\frac{1}{12}$$

woraus folgt, dass es zwischen $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$ einen aber nur Wert gibt, für welchen $\varphi_3'(t)$ verschwindet.

Somit wächst $\varphi_3(t)$ von Null an, hat bei $t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ei

ıd nimmt dann bis $t = \frac{1}{2}$ ab, wo $\varphi_3(t) = 0$ ist; mithin bleibt
0 von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$.

n $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ bleibt $\varphi_3(t) < 0$ und hat bei $t = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$
imum.

$\frac{1}{5} \cdot \varphi_5'(t) = \varphi_4(t) - B_3$ ist die rechte Seite für $t = 0$ negativ
r, da $\varphi_4(t)$ im Intervall von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ von Null an beständig
nd ist, immer grösser und erreicht für $t = \frac{1}{2}$ den grössten Wert

$$= \left[\frac{2^4-1}{2^3} - 1\right] B_3 = \left[1 - \frac{1}{2^3}\right] B_3 > 0$$

folgt, dass $\varphi_5(t)$ erst von Null an abnimmt, negativ bleibt von
is $t = \frac{1}{2}$, zwischen $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$ für $t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
imum hat und für $t = \frac{1}{2}$ wieder Null ist.

Schlussweise für die folgenden Functionen ungerader Ordnung
eselbe.

s Gesammtergebniss dieser Schlüsse kann graphisch zur Ansicht
werden, wenn man t als Abscisse und $\varphi_m(t)$ als zugehörige senk-
f t stehende Ordinate construirt. (Man sehe Schloem. Comp. d.
l. II. Bd.)

zt man nun die Werte der Derivirten von $\varphi_{2n}(t)$ in die Funda-
rmel I) ein, so kommt, wenn 2n für n gesetzt wird

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{B_1 h^2}{2!}[F''(x+h) - F''(x)] \\ + \frac{B_3 h^4}{4!}[F^{IV}(x+h) - F^{IV}(x)] - \ldots - \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!}[F^{2n-2}(x+h) - F^{2n-2}(x)] - R_{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h F'(x) = \varDelta F(x) - \frac{h}{2} \varDelta F'(x) + \frac{B_1 h^2}{2!} \varDelta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{4!} \varDelta F^{IV}(x) \\ + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!} \varDelta F^{2n-2}(x) + R_{2n} \end{aligned}$$

$$\text{wo } R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, F^{2n+1}(x+ht)\, dt \text{ ist } -$$

ıit ist die Formel von Mac-Laurin gefunden.

$\varphi_{2n}(t)$ zwischen 0 und 1 von beständigem Vorzeichen ist, so ist

$$= \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h) \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h)$$

In der allgemeinen Gleichung III. a) nehme x successive d
$a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ldots, a+\overline{q-1}h$ an; durch Addition de
stehenden Gleichungen resultirt, wenn noch $a+qh=b$ und F'(
gesetzt wird

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}h)]$$

$$+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_3h^4}{4!}\ [f'''(b)-f'''$$

$$-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\ \frac{B_{2n-3}\ h^{2n-2}}{(2n-2)!}[f^{2n-3}(b)-f^{2n}$$

$$+\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\ H_{2}$$

oder

$$h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=\int_a^{b=a+qh} f(u)\ du-\frac{h}{2}\ [f(b)-f(a)]+\sum_1^{n-1}{}_{(k)}(-1)^{k-1}\ \frac{B_{2k-}}{(2k}$$

$$[f^{2k-1}(b)-f^{2k-1}(a)]+S_2$$

wo

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\ [f^{2n}(a+ht)+f^{2n}(a+h+ht)+f^{2n}(a+$$

$$+f^{2n}(a+\overline{q-1}h+ht)]\ dt,$$

woraus auch die Bedeutung von $H_{2n}(t)$ zu ersehen ist.

Unter der Voraussetzung, dass $f^{2n}(u)$ von beständigem
ist für alle u von a bis b, lässt sich S_{2n} vereinfachen.

Unter dieser wesentlichen Voraussetzung ist

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(1-t)\,.\,H_{2n}(t)\,dt=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\,\varphi_{2n}(1-T)\ \int_0^1 H_{2n}$$

$$0<T<1$$

ferner

$$\int_0^1 H_{2n}(t)\ dt=\frac{1}{h}\ [f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$$

Da die Function $\varphi_{2n}(1-t)=\varphi_{2n}(t)$ von $t=0$ bis $t=\frac{1}{2}$
an continuirlich $\left\{\begin{matrix}\text{wächst}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\}$, je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, so is

ti oder negativ, aber an sich der grösste Wert von $\varphi_{2n}(t)$ im be- e Intervalle; also kann man $\lambda \cdot \varphi_{2n}(\tfrac{1}{2})$ statt $\varphi_{2n}(1-T)$ setzen, wenn ch λ zwar unbekannt aber zwischen 0 und 1 denkt.

emnach ist $\varphi_{2n}(1-T) = (-1)^n \lambda \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} B_{2n-1}$

uh man erhält

$$S_{2n} = (-1)^{n+1} \lambda \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$$

fer $\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{2n-1}} < 2$ ist, so liegt jedenfalls $\lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ sc n 0 und 2, folglich $\rho = -1 + \lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ jedenfalls zwischen -1 1 und man hat $\lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 1 + \rho$, wo $-1 < \rho < +1$.

s ist noch zu entscheiden, in welchen Fällen ρ positiv und in n es negativ ist.

) Es ist, wenn $F^{2n+1}(u)$ zwischen $u = x$ und $u = x + h$ sein zhen nicht wechselt,

$$R_{2n} = -\frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \varphi_{2n}(1-T) \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

$$= (-1)^{n+1} (1+\rho) \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} h^{2n} [F^{2n}(x+ht)]_0^1$$

r man die Reihe III. b) um ein Glied weiter, so kommt

$$R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) + R_{2n+2}$$

iden Gleichungen folgt

$$R_{2n+2} = (-1)^{n+1} \cdot \rho \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) \quad -1 < \rho < +1$$

, venn R_{2n+2} direct entwickelt wird

$$-1)^n \frac{B_{2n+1}\, h^{2n+3}}{(2n+2)!} \cdot F^{2n+3}(x+h\theta) = (-1)^{n+1} \rho \frac{B_{2n-1}\, h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

r infacher, da $F^{2n+1}(u) = f^{2n}(u)$,

$$\frac{B_{2n+1}\, h^2}{n+1)(2n+2)} \cdot f^{2n+2}(x+h\theta) = -\rho\, B_{2n-1} \int_0^1 f^{2n}(x+ht)\, dt$$

*) Nach Schloemilch, Comp. d. hoch. Anal. II. Bd.

Der Voraussetzung zufolge ist $F^{2n+1}(u)$, d. h. jede Derivi gerader Ordnung von beständigem Vorzeichen, wenn u von x bi variirt; dasselbe gilt von $F^{2n+3}(x+h\theta)$. — Besitzen nun $f^{2n+2}($ $f^{2n}(u)$ gleiche Vorzeichen, so kommt dieses Vorzeichen auch den stehenden Integrale zu und dann muss ρ negativ sein; haben $f^{2n+2}(u)$ und $f^{2n}(u)$ ungleiche Vorzeichen, so muss aus de Gründen ρ positiv sein.

Demzufolge ist, da $f^{2n}(u)$ von $x=a$ bis $x=b$ dasselbe behält,

$$S_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}\,h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}\,h^{2n}}{(2n)!}\left\{\begin{array}{l}\rho_1\,[f^{2n-1}(a+h)-f^{2n-1}(a)]\\ +\rho_2\,[f^{2n-1}(a+2h)-f^{2n-1}(a+\\ +\ldots\ldots\ldots\\ +\rho_q\,[f^{2n-1}(a+qh)-f^{2n-1}(a+\overline{q-}\end{array}\right.$$

Im Falle, dass alle ρ positiv sind und $f^{2n-1}(u)\left\{\begin{array}{l}\text{wächst}\\ \text{abnimmt}\end{array}\right.$ man für den Klammerinhalt T die Grenzen

$$0\lessgtr T\lessgtr f^{2n-1}(a+qh)-f^{2n-1}(a);$$

es kann folglich

$T=\rho\,[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$ gesetzt werden, wo $0<\rho<+$

Bei negativen $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_q$ gelten für $-T$ die nämlichen S wie für T bei positiven $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_q$; somit ist allgemein die E ung $S_{2n+2}=(-1)^{n+1}\rho\,\dfrac{B_{2n-1}\,h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$ d. h. ein Bruchtheil des Gliedes, bei welchem man stehen bleibt.

Das Verfahren bei der Mac-Laurin'schen Formel kann ve meinert werden, wie folgt:

Versteht man unter q eine ganze positive Zahl und setzt

$S\,f(x)\equiv f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+\overline{q-1}h=$

$S\,f'(x)\equiv f'(x)+f'(x+h)+f'(x+2h)+\ldots+f'(x+\overline{q-1}h)=$

so ist 1) $\qquad\varphi(q+1)-\varphi(q)=f(x+qh)$

und 2) $\qquad\psi(q+1)-\psi(q)=f'(x+qh)$

Die Function φ muss der Gleichung 1) genügen für ganze q. Die dingung ist aber a fortiori erfüllt, wenn man die Function φ dera stimmen kann, dass sie für alle Werte von q der Gleichung 1) g Dann ist aber Gleichung 1) eine Identität und man kann die Ableit beider Seiten nehmen in Beziehung auf q.

o mt $\varphi'(q+1) - \varphi'(q) = h \,.\, f'(x+qh)$ und verglichen mit 2)

$$= h\,[\psi(q+1) - \psi(q)]$$

an statt q successive $q+1,\ q+2, \ldots,\ q+k$, so kommt durch ti und Transposition

$$\varphi'(q) - h\,\psi(q) = \varphi'(q+k) - h\,\psi(q+k)$$

in die linke Seite von k unabhängig ist, so muss dasselbe gelten li rechte Seite; da aber letztere eine Function von $q+k$ ist, so e nicht von k unabhängig sein, ohne es zugleich von q zu sein. mit muss $\varphi'(q) - h\,\psi(q) = c$ sein, wo c eine von q unabhän- nstante bezeichnet, oder

$$\frac{d\ S\ f(x)}{dq} = h\,S\,f'(x) + c, \text{ und durch Integration}$$

$$S\ f(x) = h\int S\,f'(x)\,dq + cq$$

rmel, welche die Summation der Function $f(x)$ von der Summa- ier Derivirten abhängig macht. Die Beifügung einer neuen Con- e nterbleibt, da $S\,f(x) = 0$ sein muss für $q = 0$. — Die c wird ich jeder Integration dadurch bestimmen, dass man $q = 1$ setzt.

* * *

s Mac-Laurin's Formel kann eine Reihenentwicklung für jede ade Function erhalten werden, d. h. für jede Function, welcher nschaft $F(-x) = -F(x)$ zukommt. Mac-Laurin's Formel ist ide genommen eine Formel zur Entwicklung für jede ungerade ti Einer Variablen.

tzt man $-x$ statt x und 2x für h, so nimmt die genannte For- Gestalt an*)

$$- F(-x) = x\,[F'(x) - F'(-x)] - \frac{B_1}{2!}(2x)^2\,[F''(x) - F''(-x)]$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\,[F^{2n-2}(x) - F^{2n-2}(-x)]$$

$$- R_{2n}$$

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\,dt$$

a cht man in R_{2n} t mit $1-t$, so erhält man in Betracht, dass

$$\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$$

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(x-2xt)\,dt.$$

*) Darboux l. c.

Bildet man noch die Halbsumme beider Restwerte, so wird auch

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,[F^{2n+1}(x-2xt) + F^{2n+1}(-x+2\ldots$$

Diese Formeln enthalten nur die Function $F(x) - F(-x)$ und dere… ungen. — Setzt man $2\,F(x)$ anstatt $F(x) - F(-x)$, so entsteht d…

$$F(x) = x\,.\,F'(x) - \frac{B_1}{2!}(2x)^2\,.\,F''(x) + \frac{B_3}{4!}(2x)^4\,.\,F^{IV}(x) - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\,.\,F^{2n-2}(x) - R_{2n}$$

wo unter $F(x)$ eine ungerade Function zu verstehen…

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\;dt$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(-x+2x\vartheta) \qquad 0 <$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(\theta x) \qquad -1$$

Nimmt man z. B. $F(x) = \operatorname{artan} x$, so erhält man in Rücksic…

$$D^m \operatorname{artan} x = D^{m-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

und für gerade m

$$D^m \operatorname{artan} x = (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(m-1)!}{(1+x^2)^m}\sum_{0}^{\frac{1}{2}(m-2)}{}_{(k)}(-1)^k\binom{m}{2k+1}x^{2k+1}\ ^{*)}$$

ist, nach gehöriger Zusammenziehung der Glieder, die Reihe

$$\operatorname{artan} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\ldots\right.$$

Nimmt man ferner $F(x) = \sin x$, so hat man, da $D^m \sin x$

$$= \sin\left(\frac{m\pi}{2} + x\right) = \mp \sin x \text{ für } m = \begin{Bmatrix}4n+2\\4n\end{Bmatrix} \text{ ist,}$$

$$\sin x = x\,.\,\cos x + \frac{B_1}{2!}(2x)^2 \sin x + \frac{B_3}{4!}(2x)^4 \sin x + \ldots.$$

$$+ \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\sin x + \frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,\cos\theta x$$

oder nach Division durch $\sin x$ und Transposition, die bekannte e…

*) Sohnke's Aufg. aus d. Differenzialrechnung. 3. Aufl.

$$= 1 - \frac{B_1}{2!}(2x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2x)^4 - \ldots - \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$$

$$- \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!} x^{2n+1} \cdot \frac{\cos \theta x}{\sin x}$$

reel und absolut $< \pi$ sein muss, damit die Reihe — beliebig tgesetzt — convergent sei.

mmt man $F(x) = e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$, so erhält man die Reihe

$$\frac{+e^{-\alpha x}}{-e^{-\alpha x}} = 1 + \frac{B_1}{2!}(2\alpha x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2\alpha x)^4 + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2\alpha x)^{2n-2}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!}(\alpha x)^{2n+1} \cdot \frac{e^{\alpha\theta x} + e^{-\alpha\theta x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}$$

für $\alpha = i$ in die Reihe für x cot x übergeht. —

ac-Laurin's Summenformel drückt den Zusammenhang zwischen der einer endlichen Reihe und einem bestimmten Integrale aus; die- kann daher zur Auswertung des einen dieser Ausdrücke benutzt , wenn man den jedesmaligen andern als bekannt voraussetzt. ers vortheilhaft erscheint ihre Anwendung zur Summirung einer en Reihe, wenn man das Integral geschlossen geben kann.

i gegeben $f(u) = l\, u$

$= 1$, $h = 1$ entsteht das Problem $l\,1 + l\,2 + \ldots + l\,(q-1)$ $= l\,(q!)$ zu berechnen.

er gesuchte $l\,(q!)$ wird durch die Stirling'sche Reihe ausge- Die Summenformel gibt

$$= \int_1^{q+1} l\,u \cdot du - \tfrac{1}{2}\, l\,(q+1) + \frac{B_1}{1.2}\left[\frac{1}{q+1} - 1\right] - \frac{B_3}{3.4}\left[\frac{1}{(q+1)^3} - 1\right] + \ldots$$

nan $q = k-1$ und addirt beiderseits $l\,k$, so ist, da

$$\int l\,u \cdot du = u(l\,u - 1),$$

$$) = (k + {}^1\!/_2)\, l\,k - k + 1 + \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r}\left[\frac{1}{k^{2r-1}} - 1\right] + S_{2n}$$

$$(k + {}^1\!/_2)\, l\,k - k + \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} + A_n + S_{2n}$$

den Verein der von k unabhängigen Summanden bedeutet.

)er Rest der Reihe S_{2n} soll nun in der ursprünglichen Form be- t werden. Da in unserem Falle

$$f^{2n}(u) = D_u^{2n}\, l\,u = -\frac{(2n-1)!}{u^{2n}},$$

so ist

$$S_{2n} = \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{1}{(r+t)^{2n}}\, dt$$

Lässt man nun in der Gleichung

$$2)\quad l(k!) - (k+\tfrac{1}{2})\, l\, k + k - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} =$$

k ins Unendliche wachsen, so kann es sein, dass der linke Th einer bestimmten endlichen Grenze C nähert, so dass man hätte

$$3)\qquad C = A_n + \lim_{(k=\infty)} S_{2n} = A_n + \lim_{(k=\infty)} \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{dt}{(r+t)}$$

Um über die Existenz von C entscheiden zu können, muss man die Vorfrage erledigen, ob

$$\lim_{k=+\infty} \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{dt}{(r+t)^{2n}} = \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\left(\lim_{k=\infty}\sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{1}{(r+}\right.$$

gesetzt werden dürfe.

Die in Betracht kommende Reihe ist von der Form

$$\rho_1(t) + \rho_2(t) + \ldots\ldots + \rho_N(t) + \rho_{N+1}(t) + \ldots$$

Zur Convergenz dieser Reihe ist notwendig und hinreichend, dass für stets v Werte von N das Aggregat

$$\rho_{N+1} + \rho_{N+2} + \ldots\ldots + \rho_{N+x} = U_{N,t}$$

kleiner werde als jede noch so kleine vorgegebene Zahl σ, welchen Wert auch mag; darin ist involvirt, dass ρ_N die Null zur Grenze haben muss.

Es ist nun jedenfalls $U_{N,t}$ ein positiver Wert; auch ist

$$U_{N,t} < \rho_{N+1}(0) + \rho_{N+2}(0) + \ldots\ldots \text{ in inf } = U_{N,0}$$

da überall anstatt t sein kleinster Wert, nämlich Null gesetzt wurde. Die R ist aber eine convergente harmonische Reihe.

Denn $\rho_z(0)$ ist eine für positive und wachsende Werte von z beständi Unendliche abnehmende und positiv bleibende Function und

$$\int_z^\infty \rho_z(0)\, dz = \int_z^\infty \frac{dz}{z^{2n}} = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}} = \psi(\infty) - \psi(z)$$

ein bestimmter endlicher Wert.

Nun hat man nach dem Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatze, weil $\psi'(z) =$

$$\psi(z+h) - \psi(z) = h \cdot \rho_{z+\xi h}(0) \qquad 0 < \xi < 1$$

und wenn hierin successive $z = N, N+1, N+2, \ldots\ldots$ und $h = 1$ gesetzt w

$$\psi(N+1) - \psi(N) = \rho_{N+\xi}(0) \quad \text{d. h.} \quad < \rho_N \text{ und } > \rho_{N+}$$

$+2) - \psi(N+1) = \rho_{N+1+\xi}(0)$ d. h $< \rho_{N+1}$ und $> \rho_{N+2}$

. . . .

ch Addition dieser unendlich vielen Ungleichungen

$$-\rho_{N+2} + \ldots\ldots < \psi(\infty) - \psi(N) < \rho_N + \rho_{N+1} + \ldots.$$

$$\psi(\infty) - \psi(N) - \rho_N < U_{N,0} < \psi(\infty) - \psi(N)$$

; man nun die Bedingung, dass $U_{N,t} < \sigma$ sei, so genügt es $U_{N,0} < \sigma$ zu es wird erreicht, indem

$$N > \left[\frac{1}{(2n-1)\sigma}\right]^{\frac{1}{2n-1}} \text{ genommen wird.}$$

unendliche Reihe ist also convergent — ihre Summe sei f(t); ausserdem ist tige Function innerhalb und an den Grenzen, was auch von $\varphi_{2n}(t)$ gilt. Da nun $\rho_2 + \ldots\ldots$ im ganzen Integrationsintervalle ist und da sich eine Zahl N sst, so dass dem absoluten Betrage nach

$$f - \rho_1 - \rho_2 - \ldots\ldots < \sigma$$

in auch σ vorgegeben sei und welche Werte des Integrationsintervalles t men mag, so ist in der That absolut genommen

$$- \int \varphi \cdot \rho_1 \, dt - \int \varphi \cdot \rho_2 \, dt - \ldots - \int \varphi \cdot \rho_N \, dt < \sigma \int \varphi \, dt$$

ser Ausdruck beliebig klein gemacht werden kann,

$$\int \varphi \cdot f \, dt = \int \varphi \cdot \rho_1 \, dt + \int \varphi \cdot \rho_2 \, dt + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

von der angegebenen Eigenschaft nennt man „gleichmässig convergent" at mit Einführung dieses Wortes den Satz: Das Integral einer unendlichen he im Integrationsintervalle gleichmässig convergent ist, wird durch Inte- Glieder erhalten.

nit ist die Vorfrage in bejahendem Sinne entschieden. — Durch n der Gleichung 3) von 2) kommt

$$-(k+\tfrac{1}{2})\, l\,k + k - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} - C$$

$$= S_{2n} - \operatorname{Lim} S_{2n}$$

$$= -\frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots\ldots\right] dt$$

$$= -\frac{1}{2n}\, \varphi_{2n}(1-T) \int_0^1 \left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots\right] dt,$$

Reihe von beständigem Vorzeichen ist.

ch unbestimmte Integration und Einführung der Grenzen kommt

$$\operatorname{Lim} S_{2n} = -\frac{1}{(2n-1)\,2n}\, \varphi_{2n}(1-T) \cdot \frac{1}{k^{2n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1+\rho}{k^{2n-1}}$$

Somit ist

$$l(k!) = C + (k+\tfrac{1}{2})\, l\, k - k + \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}}$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n}$$

Da nun $f^{2n}(u)$ und $f^{2n+2}(u)$ das negative Vorzeichen haben, so negativer echter Bruch, somit $1+\rho = \varepsilon$ ein positiver echter B

Das Resultat der bisherigen Untersuchung ist also gegeb

$l(k!) = C + (k+\frac{1}{2})\, l\, k - k + G(\frac{1}{k})$, wo

$$G\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{B_3}{3.4} \cdot \frac{1}{k^3} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n} \cdot \frac{1}{k^{2n-1}},$$

$G(\frac{1}{k})$ ist anzusehen als eine endliche Reihe, zu welcher, wo man si brechen lässt, jedesmal ein Ergänzungsglied hinzukommt, welches ein echt theil des Gliedes ist, mit welchem man die Reihe geschlossen hat.

Es handelt sich nun um die Bestimmung von C.

Es ist $C = \operatorname*{Lim}_{k=+\infty} \left\{ l(k!) - k\, l\, k + k - \frac{1}{2}\, l\, k \right\} = \operatorname*{Lim}_{(k=\infty)} \left\{ l \left[\frac{k!}{k^k} \cdot\right.\right.$

$$= \operatorname*{Lim}_{(k=\infty)} \left\{ l\, \chi(k) \right\}$$

da $G(\frac{1}{k}) = 0$ für $k = \infty$

Die Hauptfrage ist zunächst ob C existirt.

Zur Entscheidung der Frage um die Existenz des Grenzwe das Gauss'sche Criterium dienen: „Wenn es gelingt den Q $\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)}$ auf die Form $1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha'}{k^2} + \frac{\alpha''}{k^3} + \ldots$ zu bringen, d entschieden werden, was aus $\chi(k)$ wird für $k=\infty$: Ist $\alpha > 0$, der Ausdruck über alle Grenzen d. h. Lim. $\chi(k) = \infty$; ist α ist Lim $\chi(k) = 0$; ist $\alpha = 0$, so hat $\chi(k)$ einen endlichen von schiedenen Grenzwert." *)

Es ist $$\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = \frac{(k+1)!}{k!} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot e \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$$

$$= e \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k \sqrt{1+\frac{1}{k}}} \quad \text{oder } \frac{1}{k} = \nu \text{ gesetzt}$$

$$= e^{1 - \frac{l(1+\nu)}{\nu}} \cdot (1+\nu)^{-\frac{1}{2}},$$

*) Scheibner, Ueber unendliche Reihen, 25. 26.

nit Anwendung der logarithmischen, der Exponential- und Bino-
e und nach Restitution von $\frac{1}{k}$ statt ν

$$\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^3} - \ldots .$$

hat ist $\alpha = 0$ und somit existirt für $\chi(k)$, also auch für $l\,\chi(k)$ cher Grenzwert.

handelt sich noch um die Herstellung des Grenzwertes

$$\operatorname{Lim} \left\{ l \left[\frac{k!}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{k}} \right] \right\} = \operatorname{Lim} \, \omega(k)$$

$$\omega(2k) = l(\overline{2k}!) - 2k\,l\,(2k) + 2k - \tfrac{1}{2}\,l\,(2k)$$

$$k! = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{2^k} = \frac{1}{1.3.5 \ldots\ldots 2k-1} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^k}$$

$$(k!)^2 = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^{2k}}$$

$$\overline{2k}! = 2^{2k} (k!)^2 \cdot \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2k};$$

$$= 2\,l\,(k!) - l\,\frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - 2k\,l\,k + 2k - \tfrac{1}{2}\,l\,(2k)$$

ist

$$\omega(k) - \omega(2k) = l\,\frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - \tfrac{1}{2}\,l\,k + \tfrac{1}{2}\,l\,2$$

iält man aus der Gleichung

$\prod\limits_{0}^{\infty}{}_{(k)} \left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2} \right]$ *), welche auch so geschrieben werden kann

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots\ldots ,$$

ıan $x = \frac{\pi}{2}$ macht:

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \left(1 - \frac{1}{49}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right) \qquad k = \infty$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \ldots\ldots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \qquad k = \infty$$

Formel von Wallis.

*) cos x ist definirt durch die stets convergente Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

4

Man hat nun

$$2 \,.\, \omega(k) - \omega(2k) = \tfrac{1}{2}\, l \left\{ \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots (2k-2)\ (2k-2)}{1.3.3.5.5.7 \ldots\ldots (2k-3)\ (2k-1)\ (2k} \right.$$

$$- \tfrac{1}{2}\, l\, k + \tfrac{1}{2}\, l\, 2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, l\, \tfrac{\pi}{2} + l\, 2$$

Da nun

$(k = \infty) \begin{cases} \mathrm{Lim}\ \omega(k) = C \\ \mathrm{Lim}\ \omega(2k) = C, \end{cases}$ so hat man schliesslich

$$C = \tfrac{1}{2}\, l\, (2\pi) = l \sqrt{2\pi}$$

und $$l\,(k!) = l \sqrt{2\pi} + (k + \tfrac{1}{2})\, l\, k - k + G\left(\tfrac{1}{k}\right)$$

Um Brigg'sche Logarithmen zu erhalten, hat man die n Logarithmen mit dem Modul $M = \frac{1}{l\,10}$ zu multipliciren, so dass

$$\log(k!) = \log \sqrt{2\pi} + (k + \tfrac{1}{2}) \log k + \{- k + G(\tfrac{1}{k}$$

Nota I. Geht man von den natürlichen Logarithmen zu den Zahlen

$$1.2.3 \ldots\ldots k > \sqrt{2\pi}\,.\, e^{-k}\ k^{k+\frac{1}{2}}$$

$$1.2.3 \ldots\ldots k < \sqrt{2\pi}\,.\, e^{-k+\frac{1}{12k}}\,.\, k^{k+\frac{1}{2}}$$

so dass $$k! = (2\pi k)^{1/2} \left(\frac{k}{e}\right)^k .\ s,$$ während $l\,s$ zwischen

$$\frac{1}{12k} - \frac{1}{360k^3} \text{ und } \frac{1}{12k} \text{ liegt.}$$

Es ist daher $l\,s$ stets positiv, also s stets >1; aber es rückt $l\,s$ der Null Factor s selbst der Einheit desto näher, je grösser k ist, so dass $s = 1$ wird f

Nota II. Da der Binomial-Coefficient $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ ist, so kan dieser Näherungsformel auch bedienen, wenn bei einem sehr grossen (zunäc und) positiven Werte von m der n^{te} B. C. für grosse n berechnet werden soll

Weitere Anwendungen der Summenformel von Mac-Laurin Function $f(u) = u^{-\mu}$ in den Fällen

$$-1 < \mu < 0$$
$$0 < \mu \leqq 1$$
$$\mu > 1$$

mögen in einem spätern Jahrgange folgen.

Errata:

Seite 2 Zeile 3 v. u. l. $(-1)^{k-1}$
„ 3 „ 11 v. o. l. $\frac{h^3}{12}$
„ 3 „ 14 v. o. l. $\frac{h^2}{10}$
„ 3 „ 15 v. o. l. $F'''(x+h) + F'''(x)$

Seite 7 Zeile 4 v. u. l. $- \frac{1}{2} xi \frac{e^{-}}{e^{-}}$
„ 7 „ 3 v. u. l. $\sum_{0}^{\infty}{}'_{(k)} \cdots$
„ 8 „ 5 v. u. l. $\sum_{1}^{n}{}_{(k)} \cdots$

Mathematische Miscellen

von Professor J. Braun.

I.

Notiz, die Formel von Boole betreffend.

:s sei die Function $\Psi(t)$ definiert durch die Gleichung

$$\Psi(t) = \sum_{o}^{n} s\ (-1)^s\ h^s\ \varphi^{n-s}(t)\ F^s(x+ht).$$

ser Reihe bezeichne $\varphi(t)$ eine ganze rationale Function von $\varphi', \varphi'', \ldots \varphi^n$ ihre successiven Ableitungen; unter $F(u)$: reelle Function der gleichfalls als reell gedachten Variablen h zu verstehen. Nebstdem wird vorausgesetzt, dass $F(u)$, im Intervall von x bis $x+h$ $(t = o \ldots 1)$ stetig verlaufen, :nendlich zu werden.

)ann ist

$$\Psi'(t) = (-1)^n\ h^{n+1}\ \varphi\ (t)\ \ F^{n+1}(x+ht)$$

$$'(1) - \Psi(0) = (-1)^n\ h^{n+1} \int_0^1 \varphi\ (t).\ F^{n+1}(x+ht)\ dt$$

ırch Substitution der betreffenden Werte

$$\begin{aligned}(0).\ \Delta F\ (x) = h\ &[\varphi^{n-1}(1).\ F'(x+h) - \varphi^{n-1}(0).\ F'(x)] \\ &- h^2 [\varphi^{n-2}(1).\ F''(x+h) - \varphi^{n-2}(0).\ F''(x)] \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\ h^n\ [\varphi\ (1)\ F^n(x+h) - \varphi\ (0).\ F^n(x)] \\ &+ R_n\end{aligned}$$

$$R_n = (-1)^n\, h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t).\ F^{n+1}(x+ht)\ dt.$$

Anstatt der Function φ soll nun eine andere ψ eing
werden, welche so beschaffen sei, dass in (I) $F^s(x)$ und F^s
denselben Coefficienten erhalten, so dass in die einzelnen (
die *Summen* gleich hoher Ableitungen $F^s(x) + F^s(x+h$
gehen; es soll also $\psi(0) + \psi(1) = 0$ *und* $\psi^s(0) + \psi^s(1$
sein. Wie sofort ersichtlich, genügt *beiden* Bedingunge
Functionalgleichung

$$\psi(t) + \psi(t+1) = kt^n.$$

Es handelt sich also um eine ganze Function, welche die
gebene algebraische Gleichung erfüllt. Mit Rücksicht auf die
schaft der *Bernoulli'schen* Function, dass

$$\varphi_m(z+1) - \varphi_m(z) = mz^{m-1}$$

ist, setze man

$$\psi(t) = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left[\varphi_{n+1}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right],$$

so hat man eine ganze Function n^{ten} Grades, welche in de
der obigen Functionalgleichung genügt. Es ist nämlich

$$\psi_n(t) \equiv \psi(t+1) + \psi(t) = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left[\varphi_{n+1}\left(1+\frac{t}{2}\right) - \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right] =$$

wie angenommen wurde. (k=2.)

Setzt man für die Functionen φ die erzeugenden Diffe
quotienten $\quad \varphi_{n+1}(t) = D_x^{n+1}\left(x\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right)_{(0)},$

$$\varphi_{n+1}\left(1+\frac{t}{2}\right) - \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right) = D_x^{n+1}\left(\frac{xe^{1/2 tx}}{e^{1/2 x}+1}\right)_{(0)}$$

$$= \frac{1}{2^n} D_x^{n+1}\left(\frac{xe^{tx}}{e^x+1}\right)_{(0)},$$

wodurch (II) $\quad \psi_n(t) = \dfrac{2}{n+1} D_x^{n+1}\left(\dfrac{xe^{tx}}{e^x+1}\right)_{(0)}$ erh

Um die Function ψ_n in expliciter Darstellung zu (ha
kann man ausgehen von der Formel*)

---

*) S. Stolz: Allg. Arithm., II. B., VII. Abschn., 8.

$$\sum_1^\infty {}_r \frac{2z}{r^2-z^2} = \frac{1}{z} - \pi \cot \pi z \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

cot πz durch die Reihen für $e^{\pm i\pi z}$ auszudrücken ist.

Setzt man $z = \frac{ix}{2\pi}$, so folgt

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_1^\infty {}_r \frac{1}{4r^2\pi^2+x^2} \tag{2}$$

lurch Division

$$\frac{\quad}{+x^2} = \frac{1}{(2r\pi)^2} - \frac{x^2}{(2r\pi)^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2r\pi)^{2n}}$$
$$+ (-1)^n \theta_r \frac{x^{2n}}{(2r\pi)^{2n+2}},$$

$$\text{wo } \theta_r = \frac{4r^2\pi^2}{4r^2\pi^2+x^2}, \text{ so dass } 0 < \theta_r < +1.$$

Gibt man r die Werte 1, 2, 3 . . . ., addiert alle Gleichungen
›emerkt, dass, wenn

$$\sum_1^\infty {}_r \theta_r \frac{1}{(2r\pi)^{2n+2}} = \theta \sum_1^\infty {}_r \frac{1}{(2r\pi)^{2n+2}}$$

t wird, auch $0 < \theta < 1$ ist, so folgt nach (2)

$$\frac{1}{-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\Big) = 2\sum_1^\infty {}_r \frac{1}{(2r\pi)^2} - 2x^2\sum_1^\infty {}_r \frac{1}{(2r\pi)^4} + \ldots$$

$$(-1)^{n-1} x^{2n-2}\sum_1^\infty {}_r \frac{1}{(2r\pi)^{2n}} + (-1)^n \theta x^{2n} \sum_1^\infty {}_r \frac{1}{(2r\pi)^{2n+2}}$$

nit Rücksicht auf die Definition der *Bernoulli'schen* Zahlen

$$\frac{-1}{)\,!} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}} S_{2n}, \qquad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

$$\frac{1}{-e^{-x}} \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\Big) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_3}{4!}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n-2}$$
$$+ (-1)^n \theta \frac{B_{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n} \tag{3}$$

Gleichung von *Cauchy*.

Die links stehende Function dieser Gleichung wird mit
Ableitung unendlich und unstetig für $x = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2$
folglich lässt sich dieselbe in eine convergente Potenzreihe
wickeln für alle reellen und complexen Werte $|x| < 2\pi$, so
für *diese* Werte die Gleichung besteht

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{B_1}{2!} - \frac{B_3}{4!}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n-2} + \ldots$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{B_1 x}{2!} - \frac{B_3 x^3}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1} x^{2\ldots}}{(2n)!}$$

Nun ist identisch:

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1}.$$

Ersetzt man die Quotienten der rechten Seite durch ihre Ei
indem man obige Entwicklung auch für $\frac{1}{e^{2x}-1}$ bildet, so f

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{2} - (2^2-1)\frac{B_1}{2!}x^2 + (2^4-1)\frac{B_3}{4!}x^4 - \ldots$$

$$+ (-1)^n (2^{2n}-1)\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Diese Reihe ist convergent für alle Werte von x, wenn $|x| < \pi$, so
nach der Mac Laurin'schen Formel

$$(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_{2n-1} = D_x^{2n-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)_{(0)}.$$

Man hat noch mit $e^{tx} = \sum_0^\infty {}_s \frac{(tx)^s}{s!}$ zu multiplicieren
die $n+1^{te}$ Ableitung zu bilden.

Diese ist der Coefficient von x^{n+1} mal $(n+1)!$,

$$\frac{n+1}{2}t^n - \frac{(n+1)n}{2!}(2^2-1)B_1 t^{n-1}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}(2^4-1)B_3 t^{n-3} - \ldots$$

$$+ (-1)^r \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2r-2)}{(2r)!}(2^{2r}-1)B_{2r-1} t^{n-2r}$$

schließlich nach (II)

$$\psi_n(t) = t^n - \frac{2B_1}{2!}(2^2-1)\,nt^{n-1}$$
$$+ \frac{2B_3}{4!}(2^4-1)\,n(n-1)(n-2)\,t^{n-3} - \ldots.$$
$$(-1)^r \frac{2B_{2r-1}}{2r!}(2^{2r}-1)\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{2r-2})\,t^{n-\overline{2r-1}},$$

kein von t freier Term vorkommt.

Hieraus erhält man sofort die Ableitungen von $\psi_n(t)$ $= 0$.

$$= n!,\quad \psi_n^{n-1}(0) = n!\,\frac{2B_1}{2}(2^2-1),\quad \psi_n^{n-2}(0) = 0.\ \ldots$$

urch Substitution in der Hauptformel (I), indem noch 2n statt etzt wird:

$$\Delta F(x) = \frac{2B_1(2^2-1)}{2!}\,h\,[F'(x+h)+F'(x)]$$
$$- \frac{2B_3(2^4-1)}{4!}\,h^3\,[F'''(x+h)+F'''(x)]$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}\,2B_{2n-1}(2^{2n}-1)}{(2n)!}\,h^{2n-1}\,[F^{2n-1}(x+h)+F^{2n-1}(x)]$$
$$+ R_{2n},$$

$$= \frac{(2h)^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 \left[\varphi_{2n+1}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right] F^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

R_{2n} wird durch „Aenderung der Variablen" umgeformt, $t = 2u$ gesetzt und beachtet wird, dass

$$\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}+u\right) = -\,\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}-u\right)$$

odurch obiges Integral übergeht in

$$- 2\int_0^{1/2} \varphi_{2n+1}(t)\,[F^{2n+1}(x+2ht) + F^{2n+1}(x+h-2ht]\,dt,$$

h $R_{2n} =$

$$\frac{(2h)^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{1/2} \varphi_{2n+1}(t)\,[F^{2n+1}(x+2ht)+F^{2n+1}(x+h-2ht)]\,dt.$$

Die Function φ ist innerhalb des Intervalles $t = 0$. von *beständigem* Zeichen, und es ist*)

$$\int_0^{1/2} \varphi_{2n+1}(t)\, dt = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n+2}-1}{(n+1)\, 2^{2n+2}} B_{2n+1},$$

somit $R_{2n} =$

$$(-1)^n \frac{2B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!} h^{2n+1}[F^{2n+1}(x+h\theta) + F^{2n+1}(x+h-$$

$$0 < \theta < \tfrac{1}{2}.$$

Hiemit ist die *Formel von Boole* gefunden.

Wie die Summenformel von Mac Laurin lässt sich auch derart umformen, dass sie nur eine „*ungerade*“ Function enthält. Man setze $-2x$ für h, h für 2x, $F(x)-F(-x)$ für 2F(entsteht

$$F(x)-F(-x) = 2x \frac{2B_1(2^2-1)}{2!} [F'(x)+F'(-x)] - \ldots$$

oder

$$F(x) = \frac{2B_1(2^2-1)}{2!} 2x\, F'(x) - \frac{2B_3(2^4-1)}{4!} (2x)^3 F'''(x) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)}{(2n)!} (2x)^{2n-1} F^{2n-1}(x) + R_{2}$$

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!} (2x)^{2n-1} \Big[F^{2n+1} [-x(2\theta$$

$$+ F^{2n+1} [x(2\theta-1)$$

oder

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!} (2x)^{2n+1} \Big[F^{2n+1}(\theta' x)$$

$$+ F^{2n+1}(-\theta$$

wo $$-1 < \theta' = 2\theta - 1 < 0$$

und endlich, weil $F^{2n+1}(x)$ eine *gerade* Function darstellt,

$$R_{2n} = (-1)^n . \frac{2B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!} (2x)^{2n+1} F^{2n+1}(\theta' x); \quad -1 < \theta'$$

---

*) Schlömilch: Höh. Anal., II.

Sei F (x) = sin x, so wird nach Division durch cos x

$$\mathrm{tan}\ x = \frac{2^2 B_1 (2^2-1)}{2!} x + \frac{2^4 B_3 (2^4-1)}{4!} x^3 + \dots$$
$$+ \frac{2^{2n} B_{2n-1} (2^{2n}-1)}{(2n)!} x^{2n-1} + R_{2n},$$

$$R_{2n} = \frac{2B_{2n+1} (2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!} (2x)^{2n+1} \frac{\cos\theta x}{\cos\theta},\ 0 < \theta < 1$$

compendiöser als *unendliche* Reihe

$$x \tan x = \sum_1^\infty{}_r \frac{(2^{2r}-1)\ B_{2r-1}}{(2r)!} (2x)^{2r},\ \text{wenn } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Nimmt man allgemeiner F (x) = sin μx, wo μ irgendeine Bruchzahl ...me, so wird

$$\tan \mu x = \sum_1^n \frac{2^{2r}\ B_{2r-1} (2^{2r}-1)}{(2r)!} (\mu\ x)^{2r-1} + R_{2n}.$$

Hieran schließt sich folgende Bemerkung:

Entwickelt man tan x in der durch die Bedingung $|x| < \frac{\pi}{2}$ ...erten Umgebung der Stelle x = 0 mittels der Methode der ...timmten Coefficienten in eine Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_s\ a_s x^s$, so ... man aus der Gleichung

$$\sum_0^\infty{}_r \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} x^{2r+1} : \sum_0^\infty{}_r \frac{(-1)^r}{(2r)!} x^{2r} = \sum_0^\infty{}_s\ a_s x^s,$$

...lle Coefficienten mit geradem Index verschwinden und die ...ngeradem Index der Recursionsformel genügen:

$$= -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \left[\frac{a_{2n-1}}{2!} - \frac{a_{2n-3}}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(2n)!}\right],$$

...e durch die Substitution

$$s!\ a_s = c_s$$

folgende übergeht — n—1 statt n gesetzt —

$$c_{2n-1} - \binom{2n-1}{2} c_{2n-3} + \binom{2n-1}{4} c_{2n-5} + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{2n-2} c_1 = (-1)^{n-1},$$

...orin $c_1 = 1,\ c_3 = 2,\ c_5 = 16,\ c_7 = 272 \dots$ *),

*) Vgl. O. Stolz: Allg. Arithm., II. B., VII., 10.

so dass die Potenzreihe für tan x lautet:

$$\sum_{1}^{\infty} {}_s \frac{c_{2s-1}}{(2s-1)!} x^{2s-1}.$$

Demnach folgen die Bernoulli'schen Zahlen successive aus
Gleichungen:

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} - \binom{2n-1}{2} \frac{2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)}{2n-2} B_{2n-3} +$$

$$+ (-1)^{n-2} \binom{2n-1}{2n-4} \frac{2^4 (2^4-1)}{4} B_3 + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{2n-2} \frac{2^2 (2^2 -}{2}$$

$$= (-1)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots$$

II.

Zur Auswertung von $\int\limits_0^\infty e^{-hx^2} \cos kx \, dx$.

Lässt sich ein Integral nicht auf eine der allgemeinen Reduc
formeln zurückführen, so versucht man das Integral in ein
endliche Reihe zu verwandeln. Es ist jedoch die Gleichung

$$\int \Sigma\, u .\, dx = \Sigma \int u\, d\, x, \quad \text{wo} \quad \Sigma u = u_0 + u_1 + \ldots + u$$

nicht unbedingt statthaft, wenn die Reihe ins *unendliche* g
Dießfalls muss gezeigt werden, dass bei hinreichend großem *n*
hinzukommende Glieder den Wert des Integrals nicht mel
gebbar ändern können, wie auch die Grenzen beschaffen sein
Das Folgende mag zeigen, wie dabei zu verfahren ist, und d
besondere Aufmerksamkeit nöthig ist, wenn die Grenze
Integrals unendlich werden, so wird ein Beispiel gewählt, b
eine Grenze unendlich ist.

Sei also obiges Integral auf die Form gebracht

$$\int e^{-hx^2} \sum_{0}^{\infty} {}_r (-1)^r \frac{(kx)^{2r}}{(2r)!} dx.$$

Die Glieder der in Betracht kommenden Potenzreihe, we
unbedingt convergiert für alle *endlichen* x, sind stetige Fun
von x, folglich die Reihe selbst stetig. Sind nun die Fun

für jeden Wert von x in einem beliebigen Bereiche definiert
t die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ convergent,
auch die Reihe $r_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, so erklärt
): „Die unendliche Reihe $\sum\limits_0^\infty u_n$ convergiert *gleichmäßig für*
Verte von x im gegebenen Bereiche, wenn jeder Zahl $\varepsilon > 0$
Zahl $\mu > 0$ so zugeordnet werden kann, dass für alle Werte
$|r_n(x)| < \varepsilon$ ist, *welchen der genannten Werte x auch an-*
m mag."

Ist nun die Reihe Σu_n zwischen endlichen Grenzen a, b
näßig convergent, so ist

$$\int_a^b r_n\, dx = \rho_n\,(b-a),$$

ρ_n einen Wert bezeichnet, der zwischen dem größten und
en Wert von r_n liegt, während x von a bis b variiert.

Nimmt man n so groß, dass im ganzen Intervalle

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}, \qquad \text{so wird } \left|\int_a^b r_n\, dx\right| < \varepsilon$$

ie Differenz

$$\int_a^b \sum_0^n u_n\, dx - \sum_0^n \int_a^b u_n\, dx$$

ig klein.

Zunächst werde h = 1 und k *reell* angenommen. Da die
für cos kx nur für endliche x convergiert, so geht es nicht
ofort bis $x = \infty$ zu integrieren, sondern zunächst nur bis
w ein solcher sehr großer Wert ist, dass die Reihe, wenn
Glieder nimmt, *noch gleichmäßig* convergiert. Wie dieses
w zu wählen ist, wird sich in der Folge zeigen. — Entwickelt
nter den gemachten Annahmen, so ist

$$e^{-x^2} \cos kx\, dx = \sum_0^{n-1} n \; (-1)^n \frac{k^{2n}}{2n!} \int_0^w e^{-x^2} x^{2n}\, dx$$

$$+ (-1)^n \frac{k^{2n}}{2n!} \int_0^w e^{-x^2} (\theta x)^{2n}\, dx.$$

*) S. Stolz: Allgem. Arithm., II. B., II., 6.

Das Restglied R_n wird sicher vergrößert, wenn darin
genommen und bis $x = \infty$ integriert wird, also

$$|R_n| < \frac{k^{2n}}{2n!} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx.$$

Durch die Substitution $x^2 = z$ folgt

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z} z^{n-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right.$$

somit durch Anwendung des Legendre'schen Symbols:

$$|R_n| < \frac{k^{2n}}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} < \frac{k^{2n}}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)},$$

d. h.

$$|R_n| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} \frac{k^{2n}}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{k^2}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

also beliebig klein, wenn $\sqrt{n} \geqq k^2$.

Daher hat man für eine sehr große obere Grenze w:

$$\int_0^w e^{-x^2} \cos kx\, dx = \sum_0^n (-1)^n \frac{k^{2n}}{2n!} \int_0^w e^{-x^2} x^{2n}\, dx,$$

welche Gleichung richtig bleibt, solange man zwischen *e*
Grenzen integriert. Es muss noch gezeigt werden, dass s
bleibt, wenn eine Grenze *unendlich* wird. Dies geschieh

den Nachweis, dass $\int_w^u f(x)\, dx < \sigma$ wird, wenn w hinreiche

und $u > w$ genommen wird — nothwendige und hinreiche
dingung.

Integriert man bis ∞, so ist das auf der *linken* Seit
kommende

$$\Delta J = \int_w^\infty e^{-x^2} \cos kx\, dx,$$

und es ist sicher

$$\Delta J < \int_w^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

die Bedingungen des „ersten Mittelwertsatzes“ erfüllt sind,

$$\Delta J < \overset{\infty}{\underset{w}{M}} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \int\limits_w^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

nsomehr

$$\Delta J < e^{-\frac{1}{2}w^2} \int\limits_w^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

n ist das Integral $\int\limits_w^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ endlich, denn es ist auch

dx $= \sqrt{2} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$ endlich; letzteres wird folgendermaßen

Ist n eine beliebig große Zahl, so convergiert der Betrag ductes $x^n e^{-x^2}$ nach Null, wenn $x = \pm \infty$ wird. Man so einen Wert α für x so fixieren, dass von $x = +\alpha$ bis ∞ (oder von $x = -\alpha$ bis $x = -\infty$) der Betrag des es kleiner als K wird; hieraus folgt obige Behauptung. vird der andere Factor $e^{-\frac{1}{2}w^2}$ beliebig klein mit wachsendem heißt, man kann w so groß wählen, dass

$$\Delta J < \frac{\sigma}{10}$$

d kleiner bleibt, wenn man w noch größer nimmt.

zeichnet $\Delta J'$ das auf der *rechten* Seite Hinzukommende,

$$\Delta J' < \sum_0^\infty (-1)^n \frac{k^{2n}}{2n!} \int\limits_w^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx.$$

der dieser Summe haben alternierende Vorzeichen, folglich r

$$\Delta J' = \sum_0^\infty \left| \frac{k^{2n}}{2n!} \int\limits_w^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx \right|.$$

ird hierauf wieder der „erste Mittelwertsatz“ angewendet, edenfalls

$$\Delta J' < \sum_0^\infty \frac{k^{2n}}{2n!} e^{-\frac{1}{2}w^2} \int\limits_w^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n} dx$$

und umsomehr

$$\Delta\ J' < \sum_0^\infty \frac{k^{2n}}{2n\,!}\ e^{-\frac{1}{2}w^2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\, x^{2n}\ dx.$$

Es ist aber der Wert des hier vorkommenden I
endlich, wie man durch die Substitution $x^2 = z$ erkennt; f

$$\sum_0^\infty \frac{k^{2n}}{2n\,!}$$

eine convergente Reihe, hat also einen *endlichen* Wert. -
k *complex*, so würde die Reihe der „absoluten Beträ
k convergieren, daher auch nach dem Satze von *Cauchy* die Rei

Dagegen wird $e^{-\frac{1}{2}w^2}$ beliebig klein, es lässt sich
Wert von w fixieren, so dass auch

$$\Delta\ J' < \frac{\sigma}{10}$$

wird und bleibt, wenn w noch mehr zunimmt.

Da nun $\Delta\ J < \frac{\sigma}{10}$ und $\Delta\ J' < \frac{\sigma}{10}$, so können J
höchstens um $\frac{2\sigma}{10}$ differieren. Es besteht also die exacte G

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos kx\ dx = \sum_0^\infty (-1)^n\ \frac{k^{2n}}{2n\,!} \int_0^\infty e^{-x^2}\ x^{2n}\ d$$

und bleibt bestehen, wenn e^{-hx^2} statt e^{-x^2} restituiert wir
nur $h > 0$.—.

Integriert man jetzt gliedweise, so erhält man beim allg
Glied durch fortgesetzte partielle Integration, da

$$\int_0^\infty e^{-hx^2}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi : h} \quad \text{ist,}$$

$$\int_0^\infty e^{-hx^2}\ x^{2n}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\ .\ \frac{1.\,3.\,5.\ \ldots\ (2n-1)}{(2h)^n}.$$

Daher wird

$$\int_0^\infty e^{-hx^2} \cos\ kx.\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\Big[1 - \frac{k^2}{4h} + \frac{k^4}{4\,!}\ \frac{1.3}{(2h)^2} - \frac{k^6}{6\,!}\ \frac{1.3}{(2h}$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{k^{2n}}{2n\,!}\ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2h)^n} + \ldots\Big]$$

$$\left[1-\frac{k^2}{4h}+\frac{1}{2!}\left(\frac{k^2}{4h}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{k^2}{4h}\right)^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{k^2}{4h}\right)^n+\ldots\right]$$

ließlich mit Rücksicht auf die Exponentialreihe, indem h die untere Grenze ins Unendliche rückt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2}\cos kx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\cdot e^{-\frac{k^2}{4h}}.$$

t die Constante k *keinerlei* Bedingung unterworfen; ist h so muss der reelle Theil *positiv* sein.*)

III.

Zur Herleitung der Gleichung der Kreistangente.

d die Gleichungen zweier Kreise

$$S \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2 = 0,$$

$$\Sigma \equiv (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2 = 0,$$

$S-\Sigma = 0$ die Gleichung der Potenzlinie (Radicalachse) Kreise. Wenn $\rho = 0$ ist, so reduciert sich Σ auf einen Nullkreis), und die Gleichung der Potenzlinie ist dann

$$2(a-\alpha)x+2(b-\beta)y+\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2+r^2 = 0.$$

n $\Sigma(a,\beta)$ auf dem Kreis S, so ist

$$(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2-r^2 = 0,$$

$$\alpha^2+\beta^2 = r^2+2a\alpha+2b\beta-a^2-b^2.$$

Potenzlinie von S und dem Nullkreise Σ hat also nach igiger Hebung von 2 die Gleichung

$$(a-\alpha)x+(b-\beta)y+a\alpha+b\beta-a^2-b^2+r^2 = 0$$

$$(\alpha-a)(x-a)+(\beta-b)(y-b)-r^2 = 0.$$

diese Gerade durch die Schnittpunkte von S und Σ geht, er einander unendlich nahe liegen, so geht sie in die des Kreises S (a, b, r) im Punkte Σ (α, β) über.

gt der Punkt Σ nicht auf S, so erhält man als Potenzlinie eine Gerade jeder Punkt P die Eigenschaft hat, dass die Tangente von P an S lg ist als die Strecke PΣ. Auch hat die Gerade g vom Punkte Σ und n Polare bezüglich S gleiche Abstände. Bewegt sich Σ auf einer , so hüllt g einen *Kegelschnitt* ein.

*) Vgl. Serret-Harnack: Diff.- u. Integralrechnung, II., § 499.

Anmerkungen.

Zu I. Die zugrunde gelegte Function rührt von *Darboux* (Liouville de Math. [3 série], tome II.) her. Aus derselben lassen sich durch geeign der Function φ die Taylor'sche Reihe, die Mac Laurin'sche Summ (S. IV., Progr. des f. b. Sem. Vinc. 1879), die *Boole'sche Formel* u. a. wobei besonders die Restformen von Bedeutung sind. Nach den ge Reihen lassen sich Functionen *berechnen*, weil durch dieselben Methoden an werden, nach welchen man fortgesetzte Summationen auszuführen ha Ergebnis mit umso größerer Annäherung den gesuchten Wert darstellt, nach Vorschrift der bezüglichen Methode die Operationen ausgeführt Ist auch die Anzahl der Summanden (analog der Darstellung einer irra Zahl) unendlich, so ist man doch durch das Restglied jederzeit, wenn einem Gliede abbricht, über die Größe und den Sinn des Fehlbetrages o

Zu II. Bei der gegebenen Auswertung des Integrales ist *nur* sequente Anwendung der Regeln über die Integration einer unendliche wie diese bei *Harnack:* Elem. der Differential- und Integralrechnung, niedergelegt sind, beabsichtigt.

Zu III. Da die angegebene Herleitung der Gleichung der Kreis mir in keinem der gangbaren Lehrbücher der analytischen Geometrie b ist, so dürfte die Veröffentlichung des von mir gefundenen Verfahrens fertigt sein.

Schulnachrichten

vom

stischöflichen Privatgymnasium am Seminarium Vincentinum.

I. Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung.

1. Herr Alois Spielmann, Dr. phil., f. b. geistl. Rath, or des Gymnasiums und Regens des Seminars, Mitglied des sschulrathes für Tirol, L. 7. (5 St.)

2. Herr Ferdinand Spielmann, Dr. phil., Prof., Biblio-, Turnlehrer, Vorst. d. 2. Cl.. D. 2., L. 2., Gr. 6. (17 St.)

3. Herr David Mark, Prof., Musikdirector, Exhortator, 2., 4. bis 8. (14 St.)

4. Herr Josef Mischi, Prof., Vorst. d. 5. Cl., L. 5., 8., (16 St.)

5. Herr Josef Braun, Prof., Custos d. physik. Cabinets, d. 7. Cl., M. 4., 5., 7., Ph. 7., D. 4. (16 St.)

6. Herr Andreas Wolf, Prof., Vorst. d. 8. Cl., M. 1., 2., 6., 8., . (14 St.)

7. Herr Josef Schuchter, Prof., R. 3., D. 3., G. H. 3., 4., 7., 8. (16 St.)

8. Herr Ludwig Riescher, Prof., G. H. 1., 2., 6. bis 8. t.)

9. Herr Franz Oettl, Prof., Vorst. d. 1. Cl., D. 1., L. 1., (16 St.)

10. Herr Theodor Hagen, Prof., D. 5. bis 8., G. H. 5. t.)

11. Herr Hartmann Falbesoner, Prof., Custos d. natur-. Cabinets, Vorst. d. 6. Cl., M. 3., Ph. 3. (II. Sem.), 4., Ng. 1., (I. Sem.), 5., 6. (16 St.)

12. Herr Johann Kofler, Prof., Vorst. d. 4. Cl., L. 4., ., 8. (15 St.)

13. Herr Hermann Piristi, Prof., Vorst. d. 3. Cl., I
Gr. 3. (17 St.)

Präfecten:

Herr Franz Konrater, Hauspräf. Herr Vincenz Michael
„ Josef Eberhard, I. Sem. „ Johann Schraffl.
„ Josef Unterleitner, II. Sem. „ Franz Hammerle
Herr Josef Wallnöfer.

Alle Herren sind Weltpriester der Diöcese Brixen.

Neben- und Freigegenstände lehrten:

Dr. Alois Spielmann, Freihandzeichnen ($3^1/_2$ St.).
Dr. Ferd. Spielmann, Gesang (1 St.), Turnen (5 St.
David Mark, Gesang (2 St.), Instrumentalmusik.
Josef Mischi, französische Sprache (2 St.).
Andreas Wolf, italienische Sprache (2 St.).
Hartmann Falbesoner, Freihandzeichnen (1 St.).
Johann Kofler, Stenographie (1 St.).
Franz Konrater, Kalligraphie (1 St.).
Vincenz Michaeler, Gesang (1 St.).

II. Durchführung des Lehrplanes
und
III. Lehrtexte.

I. Classe.

Religion 2 St. Erklärung der Glaubens- und der Sitte
nach dem Katechismus von Pichler.

Deutsch 4 St. Formenlehre, Interpunctionszeichen, der ei
Satz (Willomitzer). Lectüre, Memorieren, Declamat
(Lampels Lesebuch I.). Wöchentlich 1 Composition
1 Pensum.

Latein 8 St. Formenlehre der regelmässigen Flexionen (Sch
Uebungen aus Hauler I. Wöchentlich 1 Composition.

Geographie 3 St. Elemente der mathematischen und phys
schen Geographie; Grundzüge der Völker- und Staatenk
(Kozenn-Jarz). Uebungen im Kartenlesen (Kozenn-Ha
Schulatlas).

Mathematik 3 St. Die vier Species in benannten und u
nannten, ganzen und gebrochenen Zahlen. Theilba
(Močnik). Geometrie: Anschauungslehre der Geraden

Vinkels; erste Anschauungen von Kreislinien und Dreieck
Hočevar).
rgeschichte 2 St. Säugethiere (1. Sem.). Weichthiere und
liederthiere (II. Sem.) (Pokorny).

II. Classe.

ion 2 St. Liturgik (Hafenrichter).
sch 4 St. Lehre vom zusammengesetzten Satze (Willo-
itzer); Lectüre und Declamationen (Lampel II.). Wöchentlich
Composition oder 1 Pensum.
en 8 St. Repetition des Regelmäßigen mit Aufnahme des
nregelmäßigen aus der Formenlehre. Das Wichtigste aus der
yntax (Schultz und Hauler II.). Wöchentlich 1 Composition,
onatlich 2 Pensa.
aphie und Geschichte 4 St. Fortsetzung der astronomi-
hen und physikalischen Geographie. Asien, Afrika, Süd- und
Vesteuropa nach Kozenn-Jarz. Geschichte des Alterthums
ach Gindelys Lehrbuch für die unteren Classen.
matik 3 St. Arithmetik: Abgekürzte Multiplication und
vision. Proportionen, einfache Regeldetri (Močnik). Geo-
etrische Anschauungslehre: Congruenzsätze und An-
endungen auf das Dreieck; der Kreis; das Viereck; das Poly-
on (Hočevar).
rgeschichte 2 St. Vögel, Reptilien, Amphibien, Fische
. Sem.); allgem. Botanik nebst wichtigeren Familien aus der
peciellen (II. Sem.) (Pokorny).

III. Classe.

ion 2 St. Geschichte der alttestam. Offenbarung (Fischer).
ch 3 St. Formen- und Casuslehre mit Rücksicht auf die
edeutungslehre, Wortbildung (Willomitzer). Lectüre (Lam-
el III.) mit Erklärungen und Anmerkungen: Memorieren und
ortragen von Gedichten. Aufsätze monatlich 2.
en 6 St. Congruenz- und Casuslehre (Schultz); Uebungen
s Hauler I. — Alle 14 Tage 1 Composition, zu drei
Vochen 1 Pensum. — Lectüre: Cornel. Nepos 1, 2, 3, 4,
15, 25 (Weidner).
nisch 5 St. Formenlehre bis zu den Verben in μι (Curtius-
artel); Uebungsbuch: Schenkl. Im 2. Semester monatlich
Pensum und 1 Composition.

Geographie und Geschichte: Mittel-, Nord-, Osteuropa; A
Australien (Kozenn-Jarz.) — Das Mittelalter (Ginde
Mathematik 3 St. Abgekürzte Decimalzahlen; allgemein
und gebrochene Zahlen, Potenzieren. Quadrat- und
wurzel. — Geometr. Anschauungslehre: Flächenverg
und -Messung, Verwandlung der Figuren, Aehnlichkeit (M
Naturgeschichte 2 St. Mineralogie (Pokorny, I. Sem.);
allgem. Eigenschaften der Körper, Anfangsgründe der
(Krist, II. Sem.).

IV. Classe.

Religion 2 St. Geschichte der Offenbarung des neuen
(Fischer).
Deutsch 3 St. Deutsche Grammatik (Willomitzer); d
Lesebuch (Lampel IV.), Prosodik, Metrik. — Memorie
Vortrag und Erklärung. 14 schriftliche Arbeiten.
Latein 6 St. Tempus- und Moduslehre, Prosodik (Sc
Lectüre: Caesar de b. g., I—III; Ovid, Metamorphose
bis 330. Uebungen aus Hauler. Alle 14 Tage 1 Com
zu drei Wochen 1 Pensum.
Griechisch 4 St. Verba auf μι, unregelmäßige Verba (C
Hartel); Uebersetzungen aus Schenkls Elemen
Monatlich 1 Composition, 2 Pensa.
Geographie und Geschichte 4 St. Geschichte der
(Gindely). Specielle Geographie der österreichisch-ung
Monarchie; Vaterlandskunde und Statistik (Hannak).
Mathematik 3 St. Arithmetik: Gleichungen des I.
Zusammengesetzte Regeldetri, Theilregel, Kettensatz (M
Stereometrie: Linien und Ebenen im Raume, die körperlic
Hauptarten der Körper, Complanation und Cubatur (M
Physik 3 St. Statik, Mechanik, Akustik, Optik, Magn
Elektricität (Krist).

V. Classe.

Religion 2 St. Einleitung und Beweis der Wahrheit der
lischen Religion (Wappler I.).
Deutsch 3 St. Ausgewählte Lesestücke (Lampel I.); Par
dem Anhang der deutschen Grammatik (Willomitz
Latein 6 St. Livius (Zingerle) I, XXI, XXII, 1—30; Ovidius
mayer) Metam. 6, 17, 18, 19. Fasti 6, 13. Tristi
Wiederholung der Casuslehre (Schultz). Uebersetzun
Hauler. 10 Compositionen.

hisch 5 St. Xenophon, Schenkls Chrestomatie: Kyru-aedie 1—5. Anabasis 1—4. Memorabilien 1. Homer Ilias 1, 2 Christ), Syntax bis zur Tempuslehre (Curtius-Hartel). ebungen (Schenkl). 8 Compositionen.

ichte 3 St. Geschichte des Alterthums bis zur Unterwerfung aliens (Gindely); einschlägige Geographie.

matik 4 St. Grundoperationen, Zahlenlehre, Größenmessung, roportionen, systematische Zahlen und Brüche; Gleichungen Grades mit einer und mehreren Unbekannten (Frischauf, eis); Planimetrie (Hočevar).

geschichte 2 St. Mineralogie und Anfangsgründe der Geo-gie (I. Sem., Hochstetter). Botanik (II. Sem., Burgerstein).

VI. Classe.

on 2 St. Katholische Glaubenslehre (Wappler II.).

ch 3 St. Literaturkunde und ausgewählte Lesestücke ampel II.). Mittelhochdeutsche Lectüre, verbunden mit gram-atischen Bemerkungen nach dem mittelhochdeutschen Lese-ich von Kummer und Stejskal. Lectüre: Maria Stuart.

n 6 St. Salust (Linker): Jugurtha; Caesar (Hoffmann): b. civ. I, cap. 1—30; Cic. (Klotz): Or. in Cat. I.; Verg. offmann): Aen. I. Eclog. V. Georg. II, 1—88; III, 1—97. ilübungen nach Hauler. 10 Compositionen.

isch 5 St. Homer (Christ): Ilias 4—11. Xenoph. Schenkls restomatie: Mem. 3—5; Herod. (Hintner): 1—42. Syntax urtius-Hartel) bis zum Schlusse. 8 Compositionen.

ichte 4 St. Fortsetzung der Geschichte des Alterthums von r Unterwerfung Italiens. Römische Republik und Kaiserreich. schichte des Mittelalters (Gindely). Geographische Repeti-nen (Kozenn-Jarz).

matik 3 St. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Complexe; eichungen des II. Grades mit einer Unbekannten (Frischauf); niometrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie (Hočevar).

geschichte 2 St. Zoologie, Somatologie, Wirbelthiere, Glieder-iere, Weichthiere, Würmer, Echinodermata, Coelenterata, otozoa (Graber).

VII. Classe.

on 2 St. Katholische Sittenlehre (Wappler III.).

ch 3 St. Literaturkunde und ausgewählte Lesestücke

(Lampel III.). Lectüre: Maria Stuart, Jungfrau von O
Wallenstein. Redeübungen.

Latein 5 St. Cicero (Schiche): Cato major, (Klotz) or.
perio Cn. Pompei, pro Archia, pro Marcello; Vergil
mann): Aen. II, III (506—718), V, VI. Stilübungen
Hauler. 10 Compositionen.

Griechisch 4 St. Demosthenes (Wotke): 1. Philipp., 1. 2. 3. Oly
Odyssee (Wotke): 1, 9, 12. — Gram. (Curtius): Infin.
Negationen. 8 Compositionen.

Geschichte 3 St. Geschichte der Neuzeit bis zum Wiener
gress (Gindely).

Mathematik 3 St. Quadr. Gleichungen mit mehreren Unbeka
diophantische I. und II. Grades. Reihen. Zinseszins
Rentenrechnung; Combinatorik; Binomischer Lehrsat
Trigonometrische Aufgaben. Analytische Geometrie des Pu
der Geraden und Kegelschnitte (Frischauf, Hočevar,

Naturlehre 3 St. Mechanik, Wärmelehre, Chemie. (Walle

Propädeutik 2 St. Formale Logik. Lehrbuch von G. A. Lin

VIII. Classe.

Religion 2 St. Kirchengeschichte (Kaltner).

Deutsch 3 St. Literaturkunde und ausgewählte Lese
(Lampel IV.). Lectüre: Hermann und Dorothea, La
Redeübungen.

Latein 5 St. Tacitus (Müller): Germania; Annal. III, IV. H
(Huemer): Carm. I, II; Epist. I. 1, 2, 6, 7, 10; II. 3.
übungen nach Hauler. 10 Compositionen.

Griechisch 5 St. Platon: Apologie, Protagoras (Wilda
Sophokles: Philoktet (Schubert). Homers Odyssee; 1
(Pauly-Wotke). 8 Compositionen.

Geschichte 3 St. Oesterreichische Vaterlandskunde (Gesch
Statistik, Geographie und Topographie) nach Gi
Schimmer und Steinhauser. Repetition von Partie
der griechischen und römischen Geschichte. Neuzeit
Wiener Congress bis zur Gegenwart.

Mathematik 2 St. Wiederholung der Hauptpartien des m
matischen Lehrstoffes (Frischauf, Heis, Wallentin,
vars Uebungsaufgaben).

Naturlehre 4 St. Magnetismus, Elektricität, Wellenlehre, A
Optik (Wallentin).

Propädeutik 2 St. Empirische Psychologie (Borschke).

Neben- und Freigegenstände.

enische Sprache: I. Cursus. Formenlehre und mündliche Uebungen nach Gerstls Grammatik. II. Cursus. Fortsetzung, Syntax; Lectüre: „Colpa e perdono“, dramma allegorico di Lemoyne.

ızösische Sprache (Anfängercurs): Grammatik nach Plötz. Lectüre: Racine, Athalie.

ınen (in 3 Abtheilungen): Frei- und Geräth-Uebungen.

igraphie: Deutsche, lateinische Current- und französische Ronde-Schrift.

handzeichnen: I. Ebene geometrische Gebilde, das geometrische Ornament, gebogene Linien und elementare Körperformen. II. Einfache Flachornamente, Schattieren, Perspective und ihre Anwendung auf das Landschaftszeichnen. III. (3. und 4. Classe.) Uebungen in Ornamenten, Gefäßen, Landschaften, Thieren im Umriss und mit Schattierung; der menschliche Kopf.

ıographie (Anfängercurs): Gabelsberger-System, Wortbildung und Kürzung nach R. Fischer.

ıng: Melodik, Rhythmik, Tonarten, Psalmtöne nach Marks Leitfaden. Kirchliche und profane Tonwerke.

rumentalmusik: Harmonium, Pianoforte, Orchester-Instrumente.

V. Themen zu den deutschen Aufsätzen.

(Die Schularbeiten sind mit * bezeichnet.)

V. Classe.

1.* Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten in den Balladen ıönigs Tochter“ und „Erlkönig“. — 2. Wodurch werden in der de „Die Kraniche des Ibycus“ die verschiedenen Scenen einch verbunden? — 3.* Gute und schlimme Seiten des Ritterthums. den Romanzen vom Cid. — 4. Die Verdienste der Athener ampfe gegen die Perser. — 5.* Die Hauptmomente im ersten e des Nibelungenliedes. — 6. Arbeit und Fleiß sind die el, So führen über Strom und Hügel. — 7.* Das Gerichtshren in „Reineke Fuchs“ (1. Gesang). — 8. Die Jugend des en Kyros. Nach Xenophon. — 9.* Gliederung der Parabel: sus im Joche. — 10.* Die verschiedenartige Behandlung der Gedichten Nr. 165—168 zugrunde liegenden Idee. — 11. Der

Ackerbau, der Anfang der Cultur. — 12.* Die Umgebung
Brixen. — 13. Beispiele von Heldenmuth und Größe bei den Röm
in Zeiten der Gefahr und des Unglücks. — 14.* Erklärung
Gedichtes: Klage der Ceres. — 15. Eine Ferienreise. — 16.*
klärung der Sprüche (14—20) von Herder.

VI. Classe.

1.* Das Hildebrandlied nach Inhalt und Form. — 2. W
nicht vorangeht, der geht zurücke. — 3.* Charakterisierung de
und 2. Theiles der Nibelungensage. — 4. Ein Bild aus
Weihnachtszeit. — 5.* Schwert und Zunge. Ein Vergleich. — 6.
Charakter des jungen Jugurtha. — 7.* Gliederung der Ode: M
Vaterland. — 8. Wozu ermuntert uns die erwachende Natur?
9.* Die Bedeutung Wielands in der Literaturgeschichte des 18. Ja
hunderts. — 10. Welche Gründe bewegen Mortimer zum Religio
wechsel? — 11.* Eine Ruine und ihre Umgebung. — 12. Mag
Gewissen nur nicht nagen, Lass die Welt, was sie will, sagen.
13.* Der Herbst, eine Zeit der Freude. — 14. Ueber den Nut
der Naturwissenschaften für das geistige Leben des Menschen.

VII. Classe.

1. Die Ansichten Herders über Volkspoesie. — 2.* Wel
Ereignisse des ausgehenden Mittelalters weisen auf eine neue Z
hin? — 3. Das gute Beispiel, der beste Lehrmeister. — 4.
Höhepunkt und das tragische Moment in „Maria Stuart“.
5.* Degen und Feder. Ein Vergleich. — 6. Jeder ist seines Glüc
Schmied. — 7.* Winterfreuden. Nach Goethes „Vier Jahreszeit
(Lesebuch). — 8. Was ist unschuldig, heilig, menschlich gut, We
es der Kampf nicht ist ums Vaterland? Jungfrau von Orleans.
9.* Ein Spaziergang ins Freie. Nach Schillers „Spaziergang“ (V. 1—
— 10. Was erfahren wir in „Wallensteins Lager“ über Wall
tein, seine Anhänger und Gegner? — 11.* Willst du herrsch
so lerne gehorchen. — 12. Das entscheidende Gespräch Wall
steins mit der Gräfin Terzky (Wallensteins Tod I, 7). — 13.* Nutz
der Mathematik. — 14. Die Kunst im Dienste der Religion.

VIII. Classe.

1. Wie hat Schiller die dem Liede von der Glocke zugrun
liegende Idee durchgeführt? — 2.* Würdigung des Epilogs
Schillers Glocke. — 3. Alte und neue Zeit. Nach dem 3. Gesan

„Hermann und Dorothea“. — 4. Geographische Motive für die ɔindung der ungarischen und böhmischen Länder mit den habs- ɡischen. — 5.* Das Horazische „carpe diem“ im Munde des sen, im Munde des Thoren. — 6. Ueber den Wert des Theaters. '. Mein Sohn, du wirst das Gut von deinem Vater erben; Erbst nicht auch den Fleiß, so wirst du drauf verderben. — Erklärung der Parabasen von Platen (Lesebuch). — 9. Der ɹle wähne niemals dich entwachsen, Sie pflanzet sich durchs ɀe Leben fort. — 10.* Ueber des Pompejus Wort, dass die schen sich mehr der aufgehenden als der untergehenden Sonne enden. — 11. Die Bedeutung der Ströme für die Cultur. — Ingenuas didicisse fideliter artes Emollit mores nec sinit esse s. Ovid. Maturitätsarbeit.

V. Statistik der Schüler.

	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1. Schülerzahl.								
Zu Ende 1890/91	56	46	40	29	33	26	25	23
Zu Anfang 1891/92 . . .	56	45	41	34	29	30	25	24
Während des Schuljahres eingetreten:	—	—	—	—	—	—	—	—
Im ganzen also aufgenommen	56	45	41	34	29	30	25	24
Darunter:								
Neu aufgenommen, und zwar:								
aufgestiegen	56	5	—	1	—	1	—	—
Repetenten . , . .	—	—	—	—	—	—	—	—
Wieder aufgenommen, u. zw.:								
aufgestiegen	—	39	39	33	29	28	25	24
Repetenten	—	1	2	—	—	1	—	—
Während des Schuljahres ausgetreten . . , .	2	—	—	1	—	1	1	1
Schülerzahl zu Ende 1891/92	54	45	41	33	29	29	24	23
Oeffentliche Schüler: alle.								
Privatisten: keine.								
2. Geburtsort (Vaterland).								
Brixen	1	—	—	3	—	3	—	—
Tirol außer Brixen . . .	40	34	30	27	24	18	13	15
Vorarlberg	13	9	11	3	4	7	9	7
Salzburg	—	—	—	—	—	1	—	1
Steiermark	—	—	—	—	—	—	1	—
Baiern	—	1	—	—	—	—	1	—
Lothringen	—	—	—	—	1	—	—	—
Schweiz	—	1	—	—	—	—	—	—
	54	45	41	33	29	29	24	23
3. Muttersprache.								
Deutsch	52	43	39	28	27	28	23	22
Italienisch (und ladinisch) .	2	2	2	5	2	1	1	1
4. Religionsbekenntnis.								
Katholisch (lat. R.) alle 278.								
5. Lebensalter.								
Es haben vollendet 11 Jahre	8	—	—	—	—	—	—	—
„ „ „ 12 „	22	3	—	—	—	—	—	—
„ „ „ 13 „	18	22	4	—	—	—	—	—
Fürtrag .	48	25	4	—	—	—	—	—

	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Summe
Uebertrag .	48	25	4	—	—	—	—	—	77
haben vollendet 14 Jahre	6	18	16	5	—	—	—	—	45
„ „ 15 „	—	2	16	12	6	—	—	—	36
„ „ 16 „	—	—	5	11	10	2	—	—	28
„ „ 17 „	—	—	—	5	10	13	10	—	38
„ „ 18 „	—	—	—	—	3	11	7	5	26
„ „ 19 „	—	—	—	—	—	3	5	9	17
„ „ 20 „	—	—	—	—	—	—	2	7	9
„ „ 21 „	—	—	—	—	—	—	—	2	2
	54	45	41	33	29	29	24	23	278
Nach dem Wohnorte der Eltern.									
·tsangehörige	2	—	1	3	1	3	—	—	10
ıswärtige	52	45	40	30	28	26	24	23	268
	54	45	41	33	29	29	24	23	278
7. Classification.									
a) Zu Ende des Schuljahres 1891/92.									
Fortgangsclasse mit Vorzug	16	17	10	6	11	5	12	11	88
„	29	26	30	27	16	24	12	11	175
ı einer Wiederholungsprüfung zugelassen . .	6	—	—	—	—	—	—	1	7
. Fortgangsclasse . . .	3	1	1	—	1	—	—	—	6
. Fortgangsclasse . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ı einer Nachtragsprüfung :rankheitshalber zugelassen	—	1	—	—	1	—	—	—	2
	54	45	41	33	29	29	24	23	278
b) Nachtrag zum Schuljahre 1890/91.									
'iederholungsprüfungen waren bewilligt . . .	3	1	1	—	1	—	—	—	6
Entsprochen haben . .	3	1	1	—	1	—	—	—	6
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—
achtragsprüfungen waren bewilligt	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Entsprochen haben . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht erschienen sind . .	—	1	—	—	—	—	—	—	1
ndergebnis 1890/91 . .									
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	13	14	7	16	7	10	13	10	90
I. „	32	28	29	13	26	15	12	13	168
I. „	8	3	4	—	—	1	—	—	16
I. „	3	—	—	—	—	—	—	—	3
Ungeprüft blieben . . .	—	1	—	—	—	—	—	—	1
	56	46	40	29	33	26	25	23	278
3. Geldleistungen der Schüler.									
omSchulgeld befreit alle 278.									

	Classe								
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	
Aufnahmstaxen . . . . . fl.	168	15	—	3	—	3	—	—	1
Lehrmittelbeiträge . . . . „	56	45	41	33	29	29	24	23	2
Taxen für Zeugnisduplicate „	—	3	—	—	—	—	—	—	
	224	63	41	36	29	32	24	23	4
9. Besuch des Unterrichtes in den relat.-oblig. und nichtobligaten Gegenständen.									
Zweite Landessprache (Italienisch . . . . . I. Curs	—	—	—	15	—	—	—	—	
II. „	—	—	—	—	10	2	3	—	
Kalligraphie	54	—	—	—	—	—	—	—	
Freihandzeichnen (3 Abth.)	54	17	29	14	—	—	—	—	1
Turnen . . . (3 Abth.)	54	44	41	33	29	28	24	23	2
Gesang . . . (3 Abth.)	54	42	40	11	9	9	5	13	1
Instrumentalmusik	1	—	4	14	5	7	6	10	
Stenographie . . . . . ,	—	—	—	33	1	—	—	—	
Französische Sprache . .	—	—	—	—	9	5	5	1	
10. Stipendien.									
Anzahl der Stipendisten . .	1	3	6	7	1	3	6	2	

Gesammtbetrag der Stipendien . . . . 2613 fl. 89

VI. Lehrmittel-Sammlung.

Bibliothek.

a) Geschenkt von: Monsignore Dompropst J. Lore Deutsches Wörterbuch von Jakob und Wilhelm Grimm, Fo 4 Hefte; Herrn Canonicus J. Stippler: Encyclopädie der th logischen Wissenschaften vom hochwürdigsten Fürstbischof Vinc Gasser, Manuscript; Wegers Buchhandlung: L. Rapp, Beschreib der Diöcese Brixen, 5. Bd., 7.—9. Heft, und Beschreibung Generalvicariates Vorarlberg, 1. Band., 1. und 2. Heft; k Ministerium für Cultus und Unterricht: Das Buch vom Vater detzky von C. v. Duncker; Herrn Prof. Th. Hagen: Oskar Pesc Völkerkunde, 4. Aufl., Leipzig 1877; Ferdinandeum: Zeitsch 3. Folge, 35. Heft, Innsbruck 1891; Herrn Consiliarius J. Sch Calderons Schauspiele, übersetzt von Gries, 9 Bde.; Egger: Geschi Tirols, 3 Bde.; Schillers Werke, 12 Bde.; Shakespeare, 37 He Cesare Cantù, storia universale 50 Bde.; Leo, Lehrbuch der U

lgeschichte, 6 Bde.; Becker: Handbuch für Alterthümer, 7 Bde., kles, Bilder mit griechischen Sitten, 3 Bde., Gallus oder sche Scenen, 3 Bde.; Marquardt, Römische Privatalterthümer, e.; Ferd. Gregorovius, Corsica; Lenaus sämmtliche Werke, Iefte; A. Jäger, Geschichte der landständischen Verfassung s, 3 Bde.; Kink, Akademische Vorlesungen; Overbeck, Pompeji; ume, Rom in seinen drei Gestalten, 4 Bde.; Kraus, Roma ranea; Menzel: Deutsche Dichtung, 3 Bde., Geschichte der schen, 5 Bde.; Goethes sämmtliche Werke, 40 Bde.; Heinrich el: Grundriss der bildenden Künste; Anthologia graeca; Capponi, a della republica di Firenze, 3 Bde.; Compagni, cronica floren- Machiavelli, le storie florentine; Guicciardini, istoria d'Italia, e.; Capefigne, storia di Carlo Magno, fatta italiana da L. Toccagni; plays of W. Shakespeare, 9 Bde.; Marocco, Edmondi di Amicis; kers Italien, 3 Bde.; Voyage de la Trappe, a Roma; Cons. r. Schmid, sein Werk: Christus als Prophet.

b) Gekauft: K. Stejskal, Repertorium über die ersten ahrgänge der Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien 1850—1889; P. Norbert Stock, Der Tag bei Spinges; Verlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, d., 2. Heft, 42. Bd., 1. Heft; J. Bittner, Verzeichnis der Programmten österreichischer Mittelschulen, 1874—1889; Monumenta naniae epistolorum tom. I., p. II.; Genelin, Unsere höfischen ; Pierluigi da Palestrina, 30. Bd.; Oesterreichisch-ungarische ie, 6 Jahrgänge, 1886—1892; Lud. Rapp, Culturgeschichtliche r aus Tirol, Brixen, 1892; Forts. Berghaus, Physikalischer Atlas. chriften: Die österreichischen Gymnasien (Wien), das Gymnasialn (Berlin), für Mathematik und Physik (Schlömilch), Petermanns raphische Mittheilungen, Mittheilungen des Institutes für österische Geschichtsforschung, Wiener und Berliner Zeitschrift für ismatik, Verordnungsblatt.

Schülerbibliothek.

a) Geschenkt vom hohen k. u. k. Cultusministerium: Vatersches Ehrenbuch (Prachtausgabe); Herrn Canonicus Stippler: es, Der Dom von Köln und das Münster von Straßburg; eas Hofers letzter Gefährte; Herrn Consiliarius J. Schöpf: ere Broschüren und Erzählungen; Ungenannt: Mettenleiter, lingsblumen; Höcker, Der Tyrann der Goldkiste; Pflanz, mbus; Hausschatz, Missionen, Raphael, katholische Warte, Forts.

b) Gekauft: Koneberg, Das Wiedersehen im Felde; Schwa
Aloisius von Gonzaga; Varges, Ein Ritt durch Indien; Bolai
Der Teufel in der Schule; Hausschatz 1891; Isabella Bı
gesammelte Erzählungen, Lief. 26—36 (Schluss); Raphael 1
Don Bosco, Stifter der Salesianer-Genossenschaft von Villefra
Freib. 1892.

Physikalisches Cabinet.

Ankauf: Chemisches Verbrauchsmateriale; eine Längen-
eine Kreis-Theilmaschine; mehrfache Reparaturen.

Naturaliencabinet.

324 Stück Conchylien von Herrn Sparcassedirector Tschurtsc
thaler in Innsbruck; 278 Stück Conchylien von A. Eiter, stud.
20 Vögel und 2 Schlangenhäute aus Südafrika von H. Franz
Missionär.

Die Sammlung der Alterthümer wurde bereichert mit
japanesischen Rüstung aus dem 17. Jahrhundert, welche
hochwürdige Herr Dr. Aemilian Schöpfer als Geschenk des deuts
Pfarrers Dr. Josef Verres aus London mitbrachte. — Ein
namhaftes Geschenk erhielt das Vincentinum vom hochwürd
Herrn Peter Plank, der bei seiner Uebersiedlung von Tils
Zinggen seine Violine, die allgemein als echte „Stainer-Geige"
dem Seminar überließ.

Münzensammlung.

Geschenke von: Decan von Hörmann: Hadrian, Bronzemü
gefunden in Pfons; römische Kaisermünze von Bronze, gefunde
Igls am Platze des neuen Schulhauses; Erzherzog Maximi
Deutschmeister, Thaler von 1603; Franz Maximilian und Hein
Franz v. Mansfeld $^1/_3$-Thaler von 1672; Johann Friedrich, He
von Braunschweig, 12-Marien-Groschenstück von 1672; eb
6-Groschenstück von 1668; Medaille auf die Vermählung des
herzogs Leopold mit Ludovica, Infantin von Spanien, von 1
Medaille auf die Vermählung der Erzherzogin M. Carolina
Ferdinand IV., König von Neapel, von 1768; Medaille auf
Vermählung des Erzherzogs Ferdinand mit M. Beatrix v. Este
1771; Erzherzog Sigmund von Salzburg, Zwanziger von 1
Karl VI., Tiroler Sechser von 1715; Leopold III., Tiroler Grosc
Benedict XIV., kleine Silbermünze; vier verschiedene kl
Silbermünzen; große Goldmünze, Leopold, von 1687;
Decan Nitsche von Zams: Medaille auf die Wiederauffin

ıeiligen Schatzes auf dem heiligen Berge Andechs von 1888; ille der St. Michaels-Bruderschaft; Medaille auf die Errichtung ;rzbisthums Agram 1853; zwei Weihepfennige. — Schulrath Iitterrutzner: Mezzo Scudo „Anno VII. rep. I. della libertà ɔntese." — Pfarrer und geistlicher Rath Speckbacher in ing: Denkmünze an das sechshundertjährige Jubiläum des Todes ıeiligen Philippus Benitius. — Von Wälschellen: 18 Kupfer-en. — Pfarrer Ruez in Ehrwald: Friedrich Christian von Sachsen, entionsthaler von 1766; Pius IX., 5 Soldi, von 1867; kleine Münze 'hur; 15 verschiedene kleine Silbermünzen; 86 Kupfermünzen ver-idener Gattung; 5 Spielmarken; ungarische $^5/_{10}$-Kreuzer von 1882. xpositus König in Schattwald: Silbermedaille zum Glück-rchen; Doge Johannes Bembo, halber Scudo ohne Jahr; silberne münze an die Vermählung Ludwig I. von Baiern 1810; Leopold I., ırisches Fünfzehnkreuzerstück; Kaiser Ferdinand I., ungarischer ızziger von 1848; 15 verschiedene Münzen. — Eduard Haueis, ıng im Vincentinum, auf dem dortigen Spielplatze gefunden: rkreuzer von Karl von Württemberg von 1780. — Vom Bericht-ıtter: Pius VII., Scudo von 1802. Kaiser Franz I., Zwanziger 1815.

VII. Maturitätsprüfung.

chriftliche Prüfungen vom 30. Mai bis 3. Juni 1892.

Ieutscher Aufsatz: Ovid ex Ponto, II. 9, 47 f.

„Ingenuas didicisse fideliter artes
Emollit mores nec sinit esse feros."

ebersetzung aus dem Deutschen ins Latein: „Einiges über des Horaz Satiren und Episteln." Süpfle, Aufgaben zu latein. Stilübungen, II. Th., Nr. 268—269 („Von den Briefen verschieden sind").

ebersetzung aus dem Latein ins Deutsche: Cicero, de natura deorum II., 95—98.

ebersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche: Platons Alkibiades II., p. 148D—149C.

athematik: 1. Wie sind eine arithmetische und eine geometrische Progression, wenn beide positiv von 1 aus fortschreiten, das achte Glied der ersten mit dem vierten Glied der zweiten übereinstimmt und die Summe der vier ersten

geometrischen Glieder das achte arithmetische Glied um
übertrifft?

2. Ein reguläres Sechseck mit der Seite s=1 dreht
um eine Achse in seiner Ebene, die durch einen Eckpu
parallel der Seiten-Symmetrale geht; man berechne die Ol
fläche und das Volum des so entstandenen Rotationskörp

3. Man berechne vom Dreieck, wo A.) (—3, —2),
(6, —5), C.) (5, 2) die Eckpunkte in rechtwinkligen Coo
naten sind, die Gleichung des umgeschriebenen Kreises
den Höhenschnittpunkt.

Die mündlichen Prüfungen wurden am 14, 15. und 16.
unter dem Vorsitze des k. k. Landesschulinspectors Herrn Dr.
Hausotter gehalten.

Fortl. Zahl	Abiturienten	Geboren		Erfolg
		Ort	Jahr	
1.	Ammann Josef	Tannheim	1873	reif
2.	Constantini Hektor	Ampezzo	1872	nicht zugelass
3.	Fadum Franz	Zams	1873	reif mit Aus
4.	Feichter Johann	Virgen	1872	reif
5.	Gaim Alois	Wenns	1873	„
6.	Grass Gabriel	Bürserberg	1871	reif mit Aus
7.	Gratl Josef	Salzburg	1874	„
8.	Gruber Rudolf	Zirl	1872	„
9.	Kalb Josef	Hörbranz	1873	reif
10.	Kessler Benedict	Tschagguns	1872	„
11.	Klotz Benedict	Bichlbach	1872	reif mit Ausz
12.	Nägele Alfred	Gaißau	1873	„
13.	Obholzer Josef	Schwaz	1872	reif
14.	Padöller Johann	Reschen	1871	„
15.	Pitterle Romed	Taisten	1873	„
16.	Schäfer Christian	St. Gerold	1872	reif mit Ausz
17.	Schileo Hermann	Bruneck	1873	reif
18.	Schmid Oskar	Feldkirch	1874	reif mit Ausz
19.	Strasser Josef	Feldkirch	1874	reif
20.	Streng Josef	Zams	1872	„
21.	Tembler Thomas	Kals	1872	reif mit Ausz
22.	Tragseil Johann	Oberperfuß	1871	„
23.	Vögel Leo	Landeck	1873	„

VIII. Chronik.

Die Aufnahmsprüfungen zum Eintritt in die erste Classe fanden 17., 19., 20. und 22. August statt. Am 24. August wurde von f.-b. Commission über die Aufnahmsgesuche entschieden.

An die Stelle des Herrn Präfecten Josef König, der mit dem lusse des Schuljahres in die Seelsorge übergetreten war, wurde Josef Wallnöfer, Cooperator in Breitenwang, von dem hochdigsten f.-b. Ordinariat an die Anstalt berufen. Herr Franz Jos. umerle, am 26. Juli zum Priester geweiht, verblieb als Präfect.

Am 16. und 17. September Wiederholungsprüfungen, am September, 8 Uhr Eröffnungs-Gottesdienst, 10 Uhr Conferenz, Uhr Vorlesung der Statuten. Hierauf hielt Seine Excellenz hochwürdigste Fürstbischof Simon eine Ansprache, in welcher ie Zöglinge ermahnte, Ordnung, Studium und Herzensreinheit angelegen sein zu lassen, und ertheilte seinen oberhirtlichen n zum Beginne des Jahres.

Der 19. September war voller Schultag.

Die höchsten Namensfeste Sr. k. und k. Apostolischen Majestät eres allergnädigsten Kaisers, Ihrer Majestät der Kaiserin und Excellenz des hochwürdigsten Fürstbischofs wurden nach feierm Gottesdienst schulfrei gehalten.

Am 18. November beehrte die Anstalt mit einem Besuche Eminenz Cardinal Agostini, Patriarch von Venedig.

Bei der feierlichen Bestattung Sr. k. Hoheit des durchlauchtig- Herrn Erzherzogs Heinrich und Seiner Gemahlin Freifrau Waideck am 9. December in Bozen war das Vincentinum durch Director und Herrn Professor D. Mark vertreten.

Am Neujahrstage und am Feste der hl. drei Könige führten Zöglinge das Schauspiel „Der verborgene Edelstein“ von Wiesen auf.

Am 22. Jänner trat Herr Josef Unterleitner als Präfect an die le des Herrn Josef Eberhard, der am 12. Jänner das f.-b. Ordinariatset als Stadtpfarr-Cooperator in Brixen erhalten hatte.

Am 13. Februar Schluss des I. Semesters.

Am 14. Februar Concert mit reichem Programm aus Gesangs- Orchester-Stücken.

Am 17. Februar Beginn des II. Semesters.

Am 1. März starb der musterhaft brave Zögling der 8. Curses

Johann Schifferegger aus Bruneck nach langen, sehr schmerzli
Leiden.

Am Ostermontag und am weißen Sonntag gaben die Zögl
das Schauspiel „Hans Dollinger“ von Hüttinger.

Am 9. Mai allgemeiner Maiausflug.

Am 26. Mai starb in seiner Heimat, Bartholomäberg, Will
Köberle, Studierender des 7. Curses. Derselbe hatte, seit ei
Jahre kränkelnd, öfter die Befürchtung geäußert, er werde se
Mutter nachfolgen müssen, welche im Alter von 25 Jahren
Lungenschwindsucht gestorben war.

Vom 30. Mai bis 3. Juni schriftliche Maturitätsprüfungen.

Am 3. Juni wurde der Sextaner Johann Lederle aus In
zu Grabe getragen. Eine heftige Bauchfellentzündung hatte sei
jungen Leben und den schönen Hoffnungen seiner Eltern n
zehntägigem Leiden ein Ende gemacht.

Am 12. Juni Musik- und Gesangs-Concert mit Einlad
an Musikfreunde in der Stadt.

Vom 30. Juni bis 7. Juli Versetzungsprüfungen.

Am 10. Juli, 8 Uhr, Dankgottesdienst; Abends 6 Uhr wu
die Classification den im Festsaale versammelten Schülern beka
gemacht, die Prämienvertheilung vorgenommen und das Nöth
für den Beginn des nächsten Schuljahres angekündet. Am 11., Fr
reisten die Zöglinge der 7 Curse in die Ferien ab, die Octava
begannen am 14. die mündliche Maturitätsprüfung unter d
Vorsitze des Herrn k. k. Landes-Schulinspectors Dr. Johann Hausot

IX. Erlässe.

Landesschulrath-Erlass vom 3. August 1891, Z. 16.642:
Direction wird beauftragt, den detaillierten Lehrplan für das F
handzeichnen vorzulegen.

Landesschulrath-Erlass vom 13. September 1891, Z. 21.5
Es ist das Verzeichnis der Lehrbücher für den Religionsunterri
unter genauer Bezeichnung der Titelblätter und unter Anführu
der ministeriellen Approbation vorzulegen.

Statthalterei-Erlass vom 26. October 1891, Z. 25.486, betreff
die Ausfertigung von Eidesurkunden.

Landesschulrath-Erlass vom 24. December 1891: Kundmach
des Erlasses des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unt

ı vom 9. December, Z. 21.553, wodurch die Fortsetzung des ‹enunterrichtes an dieser Anstalt als Freifach genehmigt wird.
ı Statthaltereianzeige vom 19. Jänner 1892, Z. 1561, dass auf ıd des hohen Cultus- und Unterrichts-Ministerium-Erlasses ı 10. Jänner 1892, Z. 26.781 ex 1891 eine Subvention von 00 für die Fortsetzung der v. Wörndle'schen Wandgemälde lem Parcivalcyclus im Festsaale der Anstalt angewiesen sei.
Landesschulrath-Erlass vom 19. Juni 1892, betreffend die ıführung des abgeänderten Lehrplanes und der Instructionen en Unterricht in Geographie und Geschichte, in Mathematik Physik und in Naturgeschichte am Untergymnasium.

X. Das nächste Schuljahr

ınt am 16. September. An diesem und am folgenden Tage ıen die bewilligten Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen ıten werden, sowie Prüfungen zur Aufnahme in einen höheren ı, insoweit solche nöthig erscheinen sollten. Die Prüfungen zur ıahme in die erste Classe werden vom 17. bis 22. August finden; Ort und Tag der Prüfung wird in der Erledigung der ahmsgesuche, die bis 10. August an das f.-b. Ordinariat in en oder an das f.-b. Generalvicariat in Feldkirch einzureichen jedem einzelnen Competenten näher bezeichnet werden. Die ıerungen bei dieser Prüfung, welche in der deutschen Sprache im Rechnen schriftlich und mündlich vorzunehmen ist, gleich wie an den k. k. Gymnasien. Bücher und Schreibısiten hiezu mitzubringen ist unnöthig; eine Prüfungstaxe wird entrichtet.

Am 18. September, 8 Uhr früh, wird der Eröffnungs-Gottesıst gehalten, wobei kein Zögling ohne besondere Erlaubnis ın darf. Abends, 5 Uhr, werden die Seminarstatuten vorgelesen.

Das abgelaufene Schuljahr hat wieder neue Beweise gebracht, s das Interesse an dem Gedeihen dieser Diöcesan-Lehr- und ehungsanstalt in hohen und niederen Kreisen rege geblieben ist. ıe Legate von wenig bemittelten Landleuten und von Priestern ärmlichem Einkommen erfreuten die Vorstehung des Vincenıns kaum weniger als das namhafte Legat des hochwürdigsten ısignors Dr. Albert Jäger, k. k. Universitäts-Professors i. P.,

welcher der Anstalt seit ihrer Gründung stets wohlwollende A merksamkeit zugewandt hatte. Geschenke für die Lehrmittel- Alterthumssammlung, wie sie oben angeführt sind, und Spen von Einrichtungs-Gegenständen, die zwar in keiner Beziehung Schule stehen, dessenungeachtet nicht weniger entbehrt wer können, haben wieder die Vorstehung und die Zöglinge zum Dak verpflichtet. Möge es Gott allen hier und im Jenseits reich lohnen!

Speciellen Dank spricht der Unterzeichnete im Namen Anstalt den hochwürdigen Herren aus, welche in diesem Ja wieder als Beichtväter der Zöglinge Mühe und Zeitaufwand nicht haben verdrießen lassen: Consil. Joh. Rimml, Propst Ig Mitterer, Prof. Dr. Aem. Schöpfer und Hofcaplan Peter Schwins hackl. Die gespendeten Prämien verdankt die Anstalt Sr. Excel dem hochwürdigsten Fürstbischof Simon und (2 für Stenograph dem tirolischen Stenographenverein.

Brixen, 16. Juli 1892.

Dr. Alois Spielmann
f.-b. Consil., Director.

Berichtigung.
Seite 11, Zeile 4 von unten, lies: $<$ statt: $=$.

Verzeichnis der Schüler

f.-b. Privat-Gymnasiums am Seminarium Vincentinum in Brixen

am Schlusse des Schuljahres 1891/92.

(…it * bezeichneten Schüler erhielten 1. Fortgangsclasse mit Vorzug; (2) = 2., (3) = 3. Fortgangs-…; (—) = Wiederholungsprüfung; eingeklammert sind die Namen der ausgetretenen Schüler; (u) = krankheitshalber ungeprüft; Ch. = Chorsänger. — (Vg.) = Vorarlberg.)

VIII. Classe: 24—1 Schüler.

…mann Josef, Tannheim. Ch.
…nstantini Hektor, Ampezzo. Ch. (—)
…lum Franz, Zams.
…ichter Johann, Virgen.
…im Alois, Wenns. Ch.
…ass Gabriel, Bürserberg (Vg.). Ch.
…atl Josef, Salzburg.
…uber Rudolf, Zirl.
…lb Josef, Hörbranz (Vg.).
…ssler Benedict, Tschagguns (Vg.).
…otz Benedict, Bichlbach. Ch.
…gele Alfred, Gaissau (Vg.).
*Obholzer Josef, Schwaz. Stip. Ch.
Padöller Johann, Reschen. Ch.
Pitterle Romed, Taisten. Ch.
*Schäfer Christian, St. Gerold (Vg.). Stip. Ch.
(Schifferegger Johann, Bruneck.)
Schileo Hermann, Bruneck. Ch.
*Schmid Oskar, Feldkirch (Vg.).
Strasser Josef, Feldkirch (Vg.). Ch.
Streng Josef, Zams.
Tembler Thomas, Kals. Ch.
*Tragseil Johann, Oberperfuß. Ch.
*Vögel Leo, Landeck.

VII. Classe: 25—1 Schüler.

…lgäuer Joh. Friedrich, Altenstadt (Vg.). Ch.
…reuter Martin, Alberschwende (Vg.). Stip. Ch.
…rgmann Franz, Innichen. Ch.
…axl Urban, Fohnsdorf (Steiermark).
v. Eccher Josef, Cavalese. Stip.
*Erath Fridolin, Au (Vg.). Stip.
*Frick Alfons, Altenstadt (Vg.). Stip.
Geiger Thomas, Landeck.
Gfall Josef, St. Jakob.
Grün Alfons, Kappl.

*Jordan Johann, Axams.
Jörg Josef, Kappl.
*Kircher Georg, Naz. Ch.
(Köberle Wilhelm, Bartlmäberg (Vg.).)
*Lampert Johann, Göfis. Stip.
Lorenz Christ., Lindau (Baiern).
Lutz Franz, Bregenz (Vg.). Stip.
*Moritz Ferdinand, Vandans
*Nagler Johann, St. Lorenz
*Perndanner Rudolf, Klaus
Prugger Gustav, Mals.
*Raffeiner Wilhelm, Mais.
Rieger Johann, St. Veit.
*Sigl Josef, Schwaz. Ch.
*Stadelmann Simon, Buch

VI. Classe: 30—1 Schüler.

Aichner Martin, Mittersill (Salzburg).
Auer Alfons, Innsbruck.
Bstieler Sebastian, Prägraten. Ch.
Büchel Johann, Tosters (Vg.).
*Dietrich Joh., Lauterach (Vg.).
Dobler Jakob, Satteins (Vg.). Stip.
Eberhard Adolf, Vendels.
Hatzer Bartlmä, Prägraten.
Haueis Eduard, Strengen. Ch.
Hutle Josef, Bregenz (Vg.). Rep.
Jaist Peter, Neustift (Stubai).
Küng Josef, Raggal (Vg.).
(Lederle Johann, Inzing.)
Luger Josef, Dornbirn (Vg.). Stip.
Manaigo Salvio, Ampezzo.
*Mayer Max, Innsbruck.
Neuhauser Anton, Brixen.
Oberhammer Franz, Brixe
Pargger Anton, St. Justina.
Pitterle Joh., Außervillgra Ch.
Schmid Otto, Welsberg.
Schmidhofer Johann, Se Stip. Ch.
Steger Richard, Taufers (Pu thal). Ch.
Stippler Sigmund, Längenf
Tinkhauser Ignaz, Brixen.
Tschurtschenthaler Paul, neck.
Wechner Ambros, Elmen.
*Winder Adam, Dornbirn (
*Wolf Franz, Ischgl. Ch.
*Wösch Rudolf, Schwaz.

V. Classe: 29 Schüler.

*Amann Julius, Hohenems (Vg.). Stip.
*Aukenthaler Engelb., Gries a. Br.
Christanell Anton, Kaltern.
Elsässer Heinrich, Montigny (Lothringen). Ch.
Fliri Anton, Taufers (Vinstgau).
Galehr Johann, Düns (Vg.).
Geiger Johann, Landeck. Ch.
*Gruber Johann, Inzing.
Haller Bernard, Obsteig.
*Heidegger Josef, Kematen.
*Holzmeister Urban, Fulpm
Hosp Josef, Silz. Ch.
*Hussl Josef, Reutte. Ch.
Kathrein Magnus, Tobadill.
Kohler Andreas, Zams.
Mairhofer Josef, Kitzbühel.
*Noggler Josef, Graun.
Pohl Johann, Oetz. Ch.

ɔld Anton, Mühlwald. Ch.
amstrahler Josef, St. Peter bei Loien.
ɛinthaler Wilhelm, Innsbruck. Ch.
Röggla Ferdinand, Imst.
·hönherr Friedrich, Biberwier.
*Soratroi Alexius, Buchenstein.
*Staudacher Karl, Bruneck.
Stoppel Josef, Lauterach (Vg.).
*Strigl Stefan, Niederdorf. Ch.
Trebo Josef, St. Vigil.
*Ulmer Ferdinand, Dornbirn (Vg.). Ch.

IV. Classe: 34—1 Schüler.

ıer Johann, Bruneck. Ch.
ıßerlechner Josef, Kartitsch. Stip.
·uner Josef, Innsbruck. Ch.
ɔutschmann Alois, Zaunhof.
ter Alois, Zaunhof.
ınkhauser Rupert, Lermos.
nk Andreas, Schönwies.
ıchs Josef, Telfs. Ch.
ıspari Floro, Ampezzo.
ɔller Albuin, Albeins. Ch.
ırrasser Josef, Bruneck. Ch.
rn Ferdinand, Silz. Stip. Ch.
öpperger Johann, Innsbruck.
sara Johann, Abtei.
rchlechner Adolf, Untermais.)
ölle Johann, Schönwies. Stip.
:anebitter Franz, Längenfeld.
auracher Hermann, Fügen.
Menardi Bruno, Ampezzo.
Mittelberger Hermann, Götzis (Vg.).
*Mutschlechner Josef, Mühlen.
Penz Josef, Obernberg.
Rabensteiner Josef, Brixen.
Raggl Karl, Schönwies. Stip.
Reichart Otto, Bregenz (Vg.). Stip.
Reinisch Rudolf, Steinach. Ch.
Rinderer Lorenz, Ludesch (Vg.).
Schiendl Franz, Brixen. Ch.
Schneider Karl, Lienz.
Siess Roman, Schnann.
*Sorarui Peter, Buchenstein. Stip. Ch.
Trampedeller Franz, Brixen. Ch.
Veiter Michael, St. Veit.
Verocai Paul, Ampezzo. Stip.

III. Classe: 41 Schüler.

ailer Albert, Vahrn.
ɛrgmann Andreas, Innichen. Stip. Ch.
ırger Joh., St. Martin in Gsies.
ornauer Karl, Wilten. Ch.
tschmann Franz, Schwaz. Ch.
arber Blasius, D.-Matrei. Rep.
rüner Alois, Nauders.
uem Alois, Innsbruck.
ammer Peter, Obernberg.
uber Franz, Landeck. Ch. (2.)
uber Michael, Satteins (Vg.).
*Kammerer Johann, Niederdorf.
Kruckenhauser Fr. Jos., Mareit.
Kunater Hubert, St. Lorenzen.
Lorenz Emerich, Galtür.
Matscher Anton, Sterzing.
Mattle Rudolf, Mathon. Ch.
Mitterer Karl, Hötting,
*Mündle Johann, Satteins (Vg.)
*Neumair Josef, Bruneck. Ch.
Oberschneider Cöl., Virgen. Ch.
Payr Thomas, Kals. Rep.
Pfister F. J., Thüringerberg (Vg.).

*Rauch Joh. Jos., Schlins (Vg.).
Reichart J. Georg, Bregenz (Vg.).
Rief Johann, Tannheim. Ch.
Rietzler Magnus, Fiss.
Roilo Felix, Buchenstein. Ch.
*Ruon Peter, Buchenstein. Ch.
Scheiber Albert, Feldkirch. Ch.
Schoder J. J., Vandans (Vg.). Ch.
Schönherr Josef, Biberwier.
Sick Engelbert, Bregenz (Vg.). Stip. Ch.
Sparr Lorenz, Ludesch (
Stip. Ch.
Spielmann Theodor, Ehrw
Steinacher Alois, Wattens.
Steindl Johann, Weerberg.
*Wachter Hermann, Blu
(Vg.). Stip.
*Walter Robert, Bludenz (
Weiler Jakob, Strassen. Stip.
Wurm Josef, Reutte.

II. Classe: 45 Schüler.

*Albrecht Otto, Mals.
*Altstätter Heinrich, Schattwald.
Außerlechner Peter, Kartitsch. Rep.
Burger Anton, Bludenz (Vg.). Ch.
*Crepaz Franz, Buchenstein. Ch.
v. Eccher Karl, Cavalese. Stip.
Egger Franz, Meran.
Eigentler Otto, Schwaz. Ch.
*Frenademez Peter, Abtei. Ch.
Friedl Hermann, Boden. Ch.
*Fritz Wilhelm, Dalaas (Vg.). Ch.
Fuchsbrugger Peter, St. Johann in Ahrn.
Griesenböck Cassian, Schwaz.
Guggenbichler Albuin, Schwaz.
*Gut Jakob, Klaus (Vg.). Ch.
Hafele Josef, Wildermieming.
Hamerle Ferdinand, Landeck.
*Hammerle Adolf, Holzgau. Ch.
Häusle Johann, Nenzing (Vg.).
Hofmann Peter, Gsies. Ch.
Jechtenhammer Josef, Schwaz.
Kahr Hermann, Hall.
Köllemann Christian, Matsch. (2.)
Koller Alois, Anrass. Ch.
*Larcher Johann, Mieming. Ch.
*Lechner Alois, Zaunhof.
*Mathis Johann, Hohenems (
Ch.
*Nagel Guntram, Höchst (Vg.
Neururer Sigismund, Zaunh
*Niedermaier Emil, Regensd
(Schweiz). Ch.
Patscheider Otto, Nauders.
Peer Anton, Innsbruck. Ch
Penz Michael, Obernberg.
Pirchstaller Michael, Neustift.
Pohl Joh. Tobias, Oetz. Ch.
*Pregenzer Vincenz, Prutz.
Schileo Anton, Bruneck. Stip
*Sieber Fr. Jos., Schwarzen
(Vg.). Stip.
Spiegel Ferd., Dornbirn (Vg.).
*Steinlechner Johann, Stans
Schwaz). Ch.
Strigl Anton, Niederdorf. C
*Thurnher Emanuel, Dornbir
(Vg.).
Tschon Anton, Mariahilf.
Tschurtschenthaler Johann, B
neck.
*Walch Andreas, Wernfeld
(Baiern).

I. Classe: 56—2 Schüler.

rbisch Fr. Anton, Schruns (Vg.).
ck Alex., Bludenz (Vg.). (2.)
irer Alois, Achenthal.
rkofer Rudolf, Pettneu.
nler Josef, Schwaz.
utschmann Johann, Wenns.
essel Martin, Hittisau (Vg.).
exel Franz, Hohenems (Vg.).
exel Goswin, Dornbirn (Vg.).
ger Hermann, Silz.
sendle Leopold, Innichen.
zzi Josef, St. Vigil.
l Joh. Jos., Tschagguns (Vg.).
öwis Wilhelm, Bizau (Vg.).
iger Josef, Pettneu.
hedina Orest, Ampezzo.)
iid Josef, Oetz.
chenblaickner Michael, Stans (bei Schwaz).
iber Albert, Bregenz (Vg.). (—)
ger Alfred, Wängle. (2.)
ler Max, Innsbruck.
iewein Alois, Arzl bei Imst.
im Ferdinand, Sterzing.
iüeny Ferd., Bludenz (Vg.).
ndl Wilhelm, D.-Matrei.
niger Michael, Sillian.
rchmair Alois, Schwaz.
iabl Hermann, Innsbruck.
Königsrainer Jos., Hötting. (—)
Lechner Johann, Zaunhof.
Lederle Crispin, Jerzens. (—)
(Lorenz Isider, Kaisers.)
Lutz Ludwig, See. (—)
Maier Ulrich, Götzis (Vg.).
*Maister Josef, Schwaz.
Marte Alfred, Innsbruck.
Mehner David, St. Leonhard.
Messner Rudolf, Antholz.
Paldele Johann, Brixen.
Palla Josef, Buchenstein.
Peer Anton, Navis.
Penz Josef, St. Peter.
Pircher Cajetan, Strengen. Ch. (—)
Plautz Johann, Nikolsdorf.
*Saxer Andreas, Obernberg.
Schäfer Eduard, Raggal (Vg.).
*Scherrer Thomas, Ludesch (Vg.).
*Strasser Engelbert, Sillian.
Tipotsch Johann, Hippach.
Tollinger Leo, Strass.
Torggler Johann, Mühland.
Trenkwalder W., Oberhofen. (2.)
Tröber Franz, Landeck. (—)
Tschol Andreas, Braz (Vg.). Stip.
*Walder Josef, Sillian.
*Wierer Josef, Sillian.

Schülerzahl:

Am Beginn des Schuljahres	284
Es traten aus	6
Am Jahresschluss	278

Anzeige für das nächste Schuljahr: Am 16. und September finden Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen statt. Zöglinge, welche keine Prüfung abzulegen haben, sollen am September in die Anstalt eintreten. Am 18. September um Uhr Früh wird der Eröffnungs-Gottesdienst gehalten werden.

Buchdruckerei des Katholisch-politischen Pressvereins in Brixen.

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LV. Band. 4. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

3emerkung zu meinem Aufsatz „Ueber partielle Integration“ (Band 55, Heft 2 dieser Zeitschrift).

Von

Martin Brendel in Göttingen.

Herr E. Lampe war so freundlich, mich darauf aufmerksam zu machen, ss bereits Worpitzky in einem in der Zeitschrift für Mathematik und ıysik (Band 23, 1878) abgedruckten Brief an Schlömilch und in seinem ·hrbuch der Differential- und Integralrechnung (Berlin 1880) von der 'erallgemeinerung der partiellen Integration“ handelt. In der That ist ɘ von Worpitzky in seinem Lehrbuch, Seite 73, gegebene Formel mit r ersten von mir gegebenen identisch, wenn er auch den Gegenstand cht ganz so ausführlich behandelt und namentlich die von mir in Nr. 7 ıgeführte willkürliche Function nicht hat.

Ebenso schreibt mir Herr W. Scheibner, dass er schon in den Jahren 356—1857 (vgl. Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen esellschaft der Wissenschaften, Bd. 7, Seite 45—46 und 192) gewisse ısdehnungen des Principes der partiellen Integration angewandt hat, die enfalls den von mir erwähnten zum Theil analog sind.

Es ist wohl nicht zweifelhaft, dass Mancher bei Ausführung der einen ler anderen Integration darauf gekommen sein mag, Verfahren anzuwenn, die im Grunde nichts anderes als die genannte allgemeine Methode r partiellen Integration sind. Es möchte sich aber doch wohl empfehlen, m Gegenstande, speciell in den Lehrbüchern, die ihm gebührende Auferksamkeit zuzuwenden und namentlich ein Zeichen für die partielle tegration einzuführen, dessen Fehlen auch Worpitzky bemerkt und das n Analogon zu dem Zeichen der partiellen Differentiation wäre.

Göttingen 1901, November.

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LV. Band. 2. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Ueber partielle Integration.

Von

Martin Brendel in Göttingen.

1. Man pflegt unter partieller Integration (intégration par parties) d bekannte Integrationsverfahren zu verstehen, das durch die Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

definirt ist. Es lässt sich aber zeigen, dass diese Formel nur ein speciel Fall eines allgemeinern Verfahrens ist, welches mit mehr Recht als pa tielle Integration bezeichnet zu werden verdient, und welches auch wirkli das Analogon oder vielmehr die Umkehrung der partiellen Differentiation i

Es sei nämlich die Integration

$$y = \int f(u, v)\,dx$$

auszuführen, wo u und v Functionen von x darstellen. Lässt sich die Integration ausführen, indem man v als constant ansieht, und sei dies *partielle Integral*

$$y_0 = \int' f(u, v)\,dx,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeuten soll, dass bei der Integration als Constante angesehen werden soll, so wird im allgemeinen y_0 ei Function von x und v sein, da man behufs der Integration u durch ersetzen wird. Offenbar ist dann:

$$y = y_0 - \int \frac{\partial y_0}{\partial v}\,dv$$

und das durch diese Formel definirte Integrationsverfahren sollte eigentli als *partielle Integration* bezeichnet werden.

Die obigen Gleichungen behalten ihre Allgemeinheit, wenn wir x sta u schreiben, und unser Verfahren ist dann durch folgende Forme charakterisirt:*)

*) Von Herrn Zermelo wurde ich darauf aufmerksam gemacht, wie man leic

$$
\left.\begin{array}{l}
y = \int f(x,v)\,dx = y_0 + y_1, \\
y_0 = \int' f(x,v)\,dx, \qquad y_1 = -\int \frac{\partial y_0}{\partial v}\,dv = -\int \frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{dv}{dx}\,dx,
\end{array}\right)
$$

o die beiden Ausdrücke für y_1 ausdrücklich hingeschrieben sind, weil je ıch der Beschaffenheit der Function f entweder der Gebrauch von v oder ›r von x als Integrationsvariabler vortheilhafter sein kann.

2. Setzen wir in dem Formelsystem (1) $f(x,v) = v$, so erhalten wir ›n speciellen Fall unsers Verfahrens, den man gewöhnlich als partielle ıtegration bezeichnet, und den man vielmehr, wie Herr Hilbert vorhlägt, *Integration eines Products* nennen sollte.

3. Wenn es auch von vornherein klar ist, dass die Integrationen, elche sich nach unserm Verfahren durch bekannte Functionen ausführen ssen, auch durch die eine oder andre der sonst üblichen Methoden aushrbar sein müssen, so scheint jenes doch häufig schneller zum Ziele zu ihren als diese und namentlich zur Ableitung einer grossen Menge von ransformationen von Integralen scheint es sehr fruchtbar zu sein. Es ögen einige Beispiele gegeben werden, welche das Verfahren ein wenig lustriren sollen, auf deren Zusammenstellung ich aber leider nur bechränkte Zeit verwenden konnte, so dass ihre Wahl gewiss nicht so weckmässig getroffen worden ist, wie es hätte der Fall sein können; ıch eine generelle Untersuchung der Fälle, die sich nach unserm Verhren behandeln lassen, wäre am Platze, ist aber von mir nicht ausgeführt worden.

Sei z. B. das Integral

$$y = \int \frac{x\,dx}{1 + ax + bx^2}$$

›igen kann, dass diese Formeln wirklich die Umkehrung der partiellen Differenation darstellen; es ist nämlich:

$$df(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}du = df(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Wenn man also setzt:

$$y = \int \frac{\partial f}{\partial u}du, \qquad y_0 = f(u,v), \qquad y_1 = -\int \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

› ist

$$y = y_0 + y_1, \qquad \frac{dy_1}{dv} = -\frac{\partial y_0}{\partial v}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{\partial y_0}{\partial u},$$

us welch letzterm folgt:

$$y_0 = \int' dy.$$

auszuführen; setzt man $v = 1 + ax$, so wird

$$y_0 = \int' \frac{x\,dx}{v+bx^2} = \frac{1}{2b} \lg (v+bx^2),$$

$$dy_1 = -\frac{1}{2b} \frac{dv}{v+bx^2} = -\frac{a}{2b} \frac{dx}{v+bx^2}$$

also:

$$\int \frac{x\,dx}{1+ax+bx^2} = \frac{1}{2b} \lg (1+ax+bx^2) - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{1+ax+bx^2},$$

womit eine bekannte Transformationsformel abgeleitet ist.

Hat man allgemeiner:

$$y = \int x f(a+bx+cx^2)\,dx$$

und setzt man $v = a + bx$, so ist, wenn man mit F diejenige Funct
bezeichnet, deren Ableitung f ist:

$$y_0 = \frac{1}{2c} F(v+cx^2), \quad dy_1 = -\frac{1}{2c} f(v+cx^2)\,dv = -\frac{b}{2c} f(v+cx^2)\,d$$

und hiermit die allgemeine Transformationsformel:

$$\int x f(a+bx+cx^2)\,dx = \frac{1}{2c} F(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c} \int f(a+bx+cx^2)\,d$$

wonach man durch Specialisirung ausser vielen andern die folgen
sofort hinschreiben kann:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

$$\int x \sin(a+bx+cx^2)\,dx = -\frac{1}{2c} \cos(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c} \int \sin(a+bx+cx^2)$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich natürlich auch ableiten dur
die Substitution $a + bx + cx^2 = z$, wobei $x\,dx$ durch den Werth

$$\frac{1}{2c}\,dz - \frac{b}{2c}\,dx$$

zu ersetzen ist.

4. Sei ferner das Integral

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+\sqrt{b+cx}}}$$

gegeben; setzt man $v = \sqrt{b+cx}$, so wird $y_0 = \frac{2}{a} \sqrt{v+1+ax}$, und hi
mit $dy_1 = -\frac{1}{a} \frac{dv}{\sqrt{v+1+ax}}$, also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+\sqrt{b+cx}}} = \frac{2}{a} \sqrt{1+ax+\sqrt{b+cx}} - \frac{1}{a} \int \frac{dv}{\sqrt{1-\frac{ab}{c}+v+\frac{a}{c}}}$$

·o die Integration rechter Hand mit v als Integrationsvariabler ausgeführt erden kann, worauf dann v durch x zu ersetzen ist.

Ebenso erhält man, wenn man $v = \sqrt[3]{b + cx}$ setzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+\sqrt[3]{b+cx}}} = \frac{2}{a}\sqrt{1+ax+\sqrt[3]{b+cx}} - \frac{1}{a}\int \frac{dv}{\sqrt{1-\frac{ab}{c}+v+\frac{a}{c}v^3}},$$

·o man das elliptische Integral gleich in der für die weitere Transormation bequemen Form erhält.

5. Die Methode ist auch namentlich da anwendbar, wo eine Integration $f(x)\,dx$ auszuführen ist, indem $f(x)$ nicht explicit als Function von x, der doch nur in complicirterer Form als solche gegeben ist. Sei z. B. die ntegration $\int \frac{dx}{\sqrt{x+v}}$ auszuführen und dabei v als Function von x durch ie Gleichung

$$x = av^4 + bv^3 + cv^2 + ev + g$$

egeben, so erhält man ohne weiteres nach unsrer Formel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+v}} = 2\sqrt{x+v} - \int \frac{dv}{\sqrt{av^4+bv^3+cv^2+(e+1)v+g}}.$$

Diese, sowie einige der vorher gegebenen Formeln kann man auch bleiten nach der Formel

$$\int f(x+v)\,dx = F(x+v) - \int f(x+v)\,dv,$$

vo F wieder diejenige Function bezeichnet, deren Ableitung f ist und velche ebenfalls einen Specialfall unsers Verfahrens darstellt.

6. Es sei besonders auf den Fall aufmerksam gemacht, wo die Inte〈g〉ration $\int f(x, v)\,dx$ auszuführen ist, während v nur durch eine Differentialleichung von der Form $\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v)$ gegeben ist. Lässt sich dann die ntegration $y_0 = \int' f(x, v)\,dx$ ausführen, so kann es vorkommen, dass der usdruck $dy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{dv}{dx}dx$ von v frei ist, womit das Integral y als unction von x und v dargestellt ist, ohne dass sich im allgemeinen v urch bekannte Functionen von x darstellen lässt. Erhält man aber auf iese Weise, was gewöhnlich der Fall sein wird, dy_1 als Function von und v, so kann man das partielle Integrationsverfahren erneut anwenden nd so auf die Darstellung des Integrals durch eine Reihe geführt werden; ie Differentialgleichung $\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v)$ braucht man nicht erst zu lösen.

Unten soll noch ein Beispiel hierfür gegeben werden. Hier wollen w nur ein Beispiel anführen für den Fall, dass $\frac{dy_1}{dx}$ von v frei ist, welch auch zeigen soll, dass man aus einer so hergestellten Grundformel ei Reihe anderer herleiten kann.

Sei $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}}$, wo wir v zunächst unbestimmt lassen wollen, haben wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v}\sqrt{1+vx} + \int \frac{2+vx}{v^2\sqrt{1+vx}}\,\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Tritt nun der Fall ein, dass die Grösse rechter Hand unter de Integralzeichen von v frei ist, d. h. kann v durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2\sqrt{1+vx}}{2+vx}\,X$$

dargestellt werden, wo X eine, im übrigen beliebige, Function von x alle ist, so wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v}\sqrt{1+vx} + \int X\,dx.$$

Aus dieser Relation kann man unter andern eine Reihe von Tran formationsformeln ableiten. Setzt man z. B. $v = x$, so wird

$$X = \frac{2+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + 2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

woraus die Integralformel:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$$

folgt. Setzt man aber $v = x^{n-1}$, so erhält man in ähnlicher Weise:

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^n}} = -\frac{\sqrt{1+x^n}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{n-2}{2(n-1)}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}.$$

7. Unsere Methode ist noch einer Erweiterung fähig, indem ma nämlich der Grösse y_0 noch eine willkürliche Function von v hinzufüge kann, was natürlich auch in dem unter Nr. 2 genannten Specialfa möglich ist.

Das Formelsystem (1) sieht dann folgendermassen aus:

$$(2)\qquad \begin{aligned} y &= \int f(x,v)\,dx = y_0 + y_1\,, \\ y_0 &= \int' f(x,v)\,dx + W(v), \qquad \frac{dy_1}{dx} = -\frac{\partial y_0}{\partial v}\,\frac{dv}{dx}\,, \end{aligned}$$

ler

$$) \quad y = \int' f(x, v)\, dx + W(v) - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int' f(x, v)\, dv + W'(v) \right\} dv.$$

Da sich die Function $W(v)$ in der letztern Gleichung identisch heraus-
›bt, so wird der Fall, wo ihre Einführung von Nutzen ist, nicht gerade
hr häufig eintreten. Ich kann aber ein einfaches Beispiel beibringen,
o sie wesentliche Dienste leistet.

Ist nämlich die Integration $y = \int v\, dx$ auszuführen, wo v durch die
leichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x}$ definirt und X eine Function von x allein ist, so giebt
ısere Methode ebenso wie die gewöhnliche Formel der partiellen Integration:

$$\int v\, dx = vx - \int X\, dx.$$

t aber v durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x + v}$ definirt, so giebt die gewöhn-
›he Methode, ebenso wie unser Formelsystem (1):

$$\int v\, dx = vx - \int \frac{xX}{x + v}\, dx,$$

odurch nichts gewonnen ist. Führt man aber nach den Formeln (2)
ne willkürliche Function $W(v)$ ein, so wird:

$$y_0 = vx + W(v)$$

ıd:

$$\int v\, dx = vx + W(v) - \int \frac{x + W'(v)}{x + v} X\, dx.$$

Man braucht nur $W'(v) = v$, also $W(v) = \frac{v^2}{2}$, zu wählen und erhält:

$$\int v\, dx = vx + \frac{v^2}{2} - \int X\, dx.$$

8. Es soll nun noch ein Beispiel gegeben werden für den in Nr. 6
wähnten Fall, dass die Integration auf eine Reihe führt. Sei nämlich
›r Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = a \cos(\beta x + V)$$

ıszuführen, wo $\frac{dV}{dx} = b \cos \varepsilon x$, und wo a, β, b, ε Constanten und zwar
und ε kleine Grössen sind. Setzen wir $y = y_0 + y_1$, so giebt unsere
ethode:

$$y_0 = \frac{a}{\beta} \sin(\beta x + V),$$

$$\frac{dy_1}{dv} = -\frac{ab}{2\beta} \cos[(\beta + \varepsilon)x + V] - \frac{ab}{2\beta} \cos[(\beta - \varepsilon)x + V].$$

Wird der letztere Ausdruck wieder nach unsrer Methode integ und $y_1 = y_0' + y_1'$ gesetzt, so wird:

$$y_0' = -\frac{ab}{2\beta(\beta+\varepsilon)} \sin[(\beta+\varepsilon)x+V) - \frac{ab}{2\beta(\beta-\varepsilon)} \sin[\beta-\varepsilon)x+V],$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)} \cos[(\beta+2\varepsilon)x+V] + \frac{ab^2}{4\beta}\left(\frac{1}{\beta+\varepsilon}+\frac{1}{\beta-\varepsilon}\right)\cos(\beta x + V$$
$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)} \cos[(\beta-2\varepsilon)x+V].$$

Die weitere Anwendung des Verfahrens giebt:

$$y_0'' = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)(\beta+2\varepsilon)} \sin[(\beta+2\varepsilon)x+V] + \frac{ab^2}{4\beta^2}\left(\frac{1}{\beta+\varepsilon}+\frac{1}{\beta-\varepsilon}\right)\sin(\beta x +$$
$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)(\beta-2\varepsilon)} \sin[(\beta-2\varepsilon)x+V]$$

u. s. w. Der Ausdruck $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ ist ohne weiteres a zustellen.

In diesem Beispiel tritt der Vortheil des Verfahrens besonders herv unsere Reihe schreitet nämlich im wesentlichen nach Potenzen von $\frac{b}{\beta}$ f wenigstens die ersten Glieder, solange der im Divisor vorkommende Fa $\beta - n\varepsilon$ (ε können wir stets als positiv annehmen) noch als von Ordnung β anzusehen ist. Würde man aber behufs der Integration Grösse $\cos(\beta x + V)$ nach Potenzen von $V = \frac{b}{\varepsilon} \sin \varepsilon x$ entwickeln, würde diese Entwicklung zwar convergiren, aber im Falle ε erheb kleiner als b ist, zur Anwendung unbrauchbar sein. Namentlich im Fa wo ε sich der Grenze Null nähert, ist nur unser Verfahren anwendba

Die obige Reihe $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ ist convergent, wenn den Fall, wo β durch ε theilbar ist, hier ausschliessen. Es könnte z scheinen, als ob auch sie zur Anwendung ungeeignet wäre, weil m immer zu einem Gliede gelangen muss, wo der im Divisor auftrete Factor $\beta - n\varepsilon$ ausserordentlich klein wird. Man hat hier aber ein wisses Analogon zu Herrn Poincaré's asymptotischen Reihen: bri man die Reihe rechtzeitig vor dem Gliede ab, für welches $|\beta - n\varepsilon|$ s Minimum erreicht, so erhält man einen sehr genäherten Werth der Fu tion; setzt man sie aber weiter fort, so entfernt man sich wieder von d wahren Werthe ihrer Summe; setzt man sie aber überhaupt weit ge fort, so nähert man sich wieder gleichmässig ihrem wahren Werthe. N im letzten Punkte liegt der wesentliche Unterschied gegen die asymp tischen Reihen, welche eben divergent sind.

9. Das durch das vorstehende Beispiel erläuterte specielle Verfah der partiellen Integration stammt von Gyldén und bildet den wese

ısten Vorzug seiner Störungstheorie; ich selbst habe es bei der Theorie kleinen Planeten schon seit 15 Jahren angewandt, und es hat auch eigentlichen Anlass zu den ganzen vorstehenden Betrachtungen geen. In der Störungstheorie tritt gerade der Fall ein, dass $\frac{b}{\varepsilon}$ sehr ss und $\frac{b}{\beta}$ sehr klein wird, also ε sehr klein im Verhältniss zu b und ehr klein im Verhältniss zu β ist; man braucht dort von der Reihe $= y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ im allgemeinen nur zwei oder drei Glieder zu ücksichtigen.

Nichts hindert übrigens, die Reihe für y so anzusetzen:

$$y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots + y_0^{(n)} + y_1^{(n)},$$

dass sie endlich bleibt; das letzte Glied würde dann unausgeführte egrale enthalten, von denen nur nachzuweisen ist, dass sie klein genug d, um vernachlässigt werden zu können.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich schliesslich noch auf eine Behnung des partiellen Differentialquotienten hinweisen, die ich beim malen analytischen Rechnen seit längerer Zeit mit Vortheil anwende.

Ist nämlich z. B. u eine Function von drei Variabeln

$$u = f(x, y, z)$$

bezeichne ich die Ableitungen folgendermassen

$$\frac{\partial u}{dx}, \quad \frac{\partial u}{dy}, \quad \frac{\partial u}{dz},$$

offenbar nur die in den Zählern stehenden Differentiale ∂u partielle, in den Nennern stehenden dx, dy, dz aber totale sind. Der Vollndigkeit halber sollte man schreiben

$$\frac{\partial_x u}{dx}, \quad \frac{\partial_y u}{dy}, \quad \frac{\partial_z u}{dz},$$

r beim Schreiben der Differential*quotienten* kann man natürlich, wie ich, die Indices an den Zeichen ∂ fortlassen.

Selbstverständlich sollen sich diese Ausführungen nur auf das formale hnen mit den Differentialen beziehen, da man wohl mit Recht im gemeinen nur die Ableitungen einer Function, nicht aber die Differene, als wohldefinirte Grössen ansieht. Man wird doch wohl aber sehr

häufig der Bequemlichkeit halber beim formalen Rechnen mit Differe[...]tialen operiren und dann kann man nach obigem z. B. in

$$du = \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u$$

die dx, dy, dz fortheben.

Ist nun in unserm Beispiel z wieder eine Function von x und y, al[...]

$$dz = \frac{\partial z}{dx}\,dx + \frac{\partial z}{dy}\,dy = \partial_x z + \partial_y z,$$

so kann man mit den so bezeichneten Differentialen formal rechnen u[...] dabei sicher vor Rechenfehlern sein. In unserm Beispiel kann man [...] die folgenden Ausdrücke einfach in einander transformiren:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dy}\,dy \\ &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,\partial_x z + \frac{\partial u}{dz}\,\partial_y z \\ &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dx}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{dy} + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dy}\right) dy \\ &= \partial_x u + \partial_y u + \frac{\partial_z u (\partial_x z + \partial_y z)}{dz} = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u. \end{aligned}$$

Bei complicirteren Abhängigkeitsverhältnissen mehrerer Variabler unt[...]einander hat mir diese Bezeichnungsweise für das formale Rechnen se[...] grosse Dienste geleistet. — Dagegen ist im vorstehenden Aufsatz die son[...] übliche Bezeichnungsweise angewandt worden, um die Darstellung nic[...] durch ungewohnte Bezeichnungen unübersichtlich zu machen.

Göttingen, 1901 Januar.

Programm

des

[H]erzoglichen Realgymnasiums zu Gotha,

herausgegeben zu Ostern 1859.

Inhalt:

Druck und Papier der Engelhard-Reyher'schen Hofbuchdruckerei in Gotha.

Ueber die Berechnung des Integrallogarithmen
nd einiger mit ihm zusammenhängenden anderen Funktionen.

Die unter dem Namen des Integrallogarithmus bekannte transscendente Funktion

$$\mathrm{li}\, z^{\pm 1} = \int \frac{d \,.\, e^{\pm \mathrm{l}z}}{\pm \mathrm{l}z} = \gamma + \mathrm{l}(\pm \mathrm{l}z) \pm \frac{\mathrm{l}z}{1.1!} + \frac{(\mathrm{l}z)^2}{2.2!} \pm \frac{(\mathrm{l}z)^3}{3.3!} + \frac{(\mathrm{l}z)^4}{4.4!} \pm \, . \, .$$

durch die eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche sie einer umfassenden Untersuchung ihrer Eigenschaften ent-nsetzt, eine gewisse Berühmtheit erlangt. Schon vor länger als vierzig Jahren haben sich Soldner und scheroni*) mit ihr beschäftigt und gezeigt, daß der Werth der Constante γ, wenn das Integral für $z = o$ t Null werden soll, auf die Constante der natürlichen harmonischen Reihe zurückkommt. Beide Analysten, e bald darauf auch Bessel**), bemüheten sich Reihenentwickelungen aufzufinden, die möglichst stark convergirten somit bequem zu numerischer Berechnung der Funktion gebraucht werden könnten. Die Resultate dieser rsuchungen, die meistens das Ergebniß besonderer analytischer Kunstgriffe waren und deshalb sehr wenig ren Zusammenhang zeigten, habe ich in einer, vor länger als zwanzig Jahren in Crelle's Journal***) ienenen, Abhandlung zusammengestellt und aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet, zugleich aber auch nach-esen, daß alle die Hülfsmittel, welche die Theorie der Potenzreihen und der Kettenbrüche zur Entwickelung Untersuchung transscendenter Integralfunktionen darbieten, im vorliegenden Falle entweder geradezu unbrauch-sind, oder nur Resultate geben, die nichts Erhebliches erkennen lassen und namentlich für numerische Berech-g nur sehr geringe Hülfe gewähren. In diesem Stadium befindet sich die Theorie des Integrallogarithmus bis auf den heutigen Tag. Da nun auch nicht eine einzige analytische Eigenschaft oder Relation zwischen tionenwerthen verschiedener Argumente hat aufgefunden werden können und es fast scheint, als ob dergleichen diese Transscendente gar nicht existirten, so ist die numerische Berechnung derselben vor der Hand wohl das tigste, was für sie zu leisten ist.

Nun hat zwar Soldner bereits eine Tafel der Integrallogarithmen gegeben; allein abgesehen von ihrer gen Ausdehnung ist sie, seiner eignen Angabe zu Folge, ohne alle Controlen berechnet, und so darf es nicht der nehmen, daß einzelne Werthe aus ihr, bei zufälliger Prüfung derselben durch andere Rechner, sehr liche Abweichungen von den Resultaten der letzteren zeigten. Unter diesen Umständen darf ich hoffen, durch heilung des Nachfolgenden den Gegenstand vor der Hand zu einer Art von Abschluß zu bringen.

Die Theorie unserer Transscendente liefert, streng genommen, nur zwei Reihenentwickelungen, die so con-nt sind, daß sie sich zu numerischer Berechnung eignen, nehmlich:

---

*) Soldner, théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante; à Munic, 1809.
Mascheroni, adnotationes ad calculum integralem Euleri; Ticini 1790.

**) Bessel, Königsberger Archiv für Mathematik und Naturwissenschaften. Jahrg. 1811, Heft 1.

***) Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova; Crelle's Journal Bd. 17.

$$\mathrm{li}\ x^{\pm 1} = \gamma + \mathrm{l}(\pm \mathrm{l}x) \pm \frac{\mathrm{l}x}{1.1!} + \frac{(\mathrm{l}x)^2}{2.2!} \pm \frac{(\mathrm{l}x)^3}{3.3!} + \frac{(\mathrm{l}x)^4}{4.4!} \pm \ldots \qquad (1)$$

$$\mathrm{li}\ (a+x) = \mathrm{li}(au) = \mathrm{li}\,a + \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}au}{\mathrm{l}a}\right) + a\left[\frac{\mathrm{l}u}{1!}A_1 + \frac{(\mathrm{l}u)^2}{2!}A_2 + \frac{(\mathrm{l}u)^3}{3!}A_3 + \ldots\right] \qquad (2)$$

$$u = 1 + \frac{x}{a}; \quad A_n = \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{l}a}{n(n+1)} + \frac{(\mathrm{l}a)^2}{n(n+1)(n+2)} - + \ldots$$

Die erste Reihe giebt die Funktionenwerthe für diejenigen x, welche sich nicht allzuweit von der Einheit entfer während die zweite dazu dient, um von bereits gefundenen Funktionenwerthen zu denen nahe liegender Argum fortzuschreiten. Die Letztere ist um so bemerkenswerther, als alle bis jetzt geführten Untersuchungen, von verschiedenen Standpunkten sie auch ausgehen und wie verschiedene Methoden und Kunstgriffe der Entwicke sie auch anwenden mögen, schlüßlich immer die Reihe (2) als Endresultat geben.

So erträglich nun auch beide Reihen beim ersten Blicke für die numerische Rechnung gebaut zu sein sche so unerhört lästig wird die wirkliche Ausführung der letzteren. Bei der höchst mäßigen Convergenz jener drücke muß man, sobald x sich nur um ein Geringes von der Einheit entfernt oder der Bruch $\frac{x}{a}$ den Werth übersteigt, fast immer zwischen zehn bis zwanzig Glieder zusammennehmen, um das Resultat auf zehn Deci stellen genau zu erhalten. Ist schon die Berechnung so vieler auf einander folgender Potenzen eines natürl Logarithmen beschwerlich, so wird die Mühe noch um ein Bedeutendes durch die erforderlichen Multiplicati mit den Coefficienten A gesteigert, und zum Schlusse hat man noch obendrein die Berechnung des Logarit eines Logarithmen auszuführen. Es läßt sich zwar die Reihe (2) so umformen, daß das Glied $\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}au}{\mathrm{l}a}\right)$ weg wird; man findet dadurch:

$$\mathrm{li}\,(a+x) = \mathrm{li}\,a + a\left[\frac{\mathrm{l}u}{1!}B_1 + \frac{(\mathrm{l}u)^2}{2!}B_2 + \frac{(\mathrm{l}u)^3}{3!}B_3 + \ldots\right] \qquad (3)$$

$$B_1 = \frac{1}{\mathrm{l}a}; \quad B_n = \frac{1-(n-1)B_{n-1}}{\mathrm{l}a};$$

aber dennoch bleibt für jede einzelne Werthbestimmung immer noch soviel Arbeit übrig, daß auch die hartnä Geduld dadurch erschöpft wird.

Um diesem Uebelstande zu begegnen, habe ich statt des Integrales $\int\frac{dz}{\mathrm{l}z}$ das verwandte Integral $\int$ angewendet, und damit die Berechnung von li z auf die von li . e^y zurückgeführt. Setzt man nehmlich Gleichung (3) e^a anstatt a und bezeichnet $\left(1+\frac{x}{e^a}\right)$ mit v, so erhält man:

$$\mathrm{li}\,(e^a+x) = \mathrm{li}\,.\,e^a + e^a\left\{\frac{\mathrm{l}v}{1!}C_1 + \frac{(\mathrm{l}v)^2}{2!}C_2 + \frac{(\mathrm{l}v)^3}{3!}C_3 + \ldots\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{a}; \quad C_n = \frac{1-(n-1)C_{n-1}}{a};$$

oder wenn man, um die Multiplication der in der Klammer stehenden Reihe mit e^a zu ersparen, diesen F gleich mit den einzelnen Coefficienten verbindet und jeden der letzteren noch durch die ihm zugehörige natü Fakultät dividirt:

$$\mathrm{li}\,(e^a+x) = \mathrm{li}\,a = \mathrm{l}v\,.\,D_1 + (\mathrm{l}v)^2 D_2 + (\mathrm{l}v)^3 D_3 + (\mathrm{l}v)^4 D_4 + \ldots \qquad (4)$$

$$D_1 = \frac{e^a}{a}; \quad D_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{e^a}{a.n!} - \frac{n}{a}D_n\right).$$

Diese Reihe ist in der That sehr brauchbar, um die Integrallogarithmen aller beliebigen, namentlich sehr g oder sehr kleiner, Zahlen zu berechnen. Nimmt man nehmlich eine Tafel der Werthe von e^a zu Hülfe, so br man nur x gleich dem im Zahlenwerthe von e^a vorkommenden Decimalbruche (letzteren natürlich negativ ge men), oder gleich der dekadischen Ergänzung dieses Bruches zu setzen, um den Werth von $(e^a + x)$ in eine Zahl zu verwandeln. Dadurch wird man zugleich in den Stand gesetzt, den Werth von $v = 1 + \frac{x}{e^a}$

heit so nahe zu bringen, als man will, und kann demnach lv so klein machen, daß wenige Glieder der he (4) hinreichen, das Resultat auf 7 bis 10 Decimalstellen genau zu geben. Ein Paar Beispiele werden ügen, die Sache anschaulich zu machen. Es werde verlangt li 10, li 11, li 12 ꝛc. zu berechnen. Man hat:

$$e^{2,3} = 9,97418 \text{ also } 10 = e^{2,3} + 0,02582 \quad v = 1,00258 \quad lv = +\ 0,0025767$$
$$e^{2,4} = 11,02318 \quad 11 = e^{2,4} - 0,02318 \quad v = 0,99789 \quad lv = -\ 0,0021122$$
$$e^{2,48} = 11,94126 \quad 12 = e^{2,48} + 0,05874 \quad v = 1,00492 \quad lv = +\ 0,0049179.$$

größer die Zahlen sind, deren Integrallogarithmen gefunden werden sollen, desto kleiner werden die lv, daß die Arbeit immer rascher von Statten geht, je weiter man in derselben vorschreitet. So wird z. B. $= 9996,600$ und $e^{10} = 22026,47$ und damit ergiebt sich:

$$10000 = e^{9,21} + 3,400 \quad v = 1,00034 \quad lv = +\ 0,000340$$
$$22026 = e^{10} - 0,47 \quad v = 0,999978 \quad lv = -\ 0,0000211.$$

lich ist auch klar, daß man keineswegs genöthigt ist, immer diejenige Potenz von e zu wählen, welche der ebenen Zahl am nächsten liegt; man kann vielmehr zu einem und demselben Werthe von e^a verschiedene x neh, und dadurch die einmal gefundenen Coefficienten D für die Berechnung mehrerer Integrallogarithmen ben. So wird z. B. $e^3 = 20,08553$ und man erhält damit:

$20 = e^3 - 0,08553$	$lv = -\ 0,00426$	$21 = e^3 + 0,91446$	$lv = +\ 0,04452$
$19 = e^3 - 1,08553$	$lv = -\ 0,05556$	$22 = e^3 + 1,91446$	$lv = +\ 0,09104$
$18 = e^3 - 2,08553$	$lv = -\ 0,10963$	u. s. w.	

Einzige, was bei dieser Art der Berechnung nothwendig vorausgesetzt werden muß, ist die Kenntniß der grallogarithmen für alle diejenigen Werthe von e^a, welche man bei den eben besprochenen Zerlegungen anzuden hat. Die Berechnung derselben geschieht, so lange a nicht größer ist als 5, am bequemsten nach der Formel

$$\text{li } e^{\pm a} = \gamma + \text{la} \pm \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} \pm \frac{a^3}{3.3!} + \frac{a^4}{4.4!} \pm \ldots \tag{5}$$

das Resultat mit verhältnißmäßig großer Schnelligkeit finden läßt. Wächst hingegen a über 5 hinaus, so det man bequemer die nachstehende Reihe an:

$$\text{li } e^{a \pm u} = \text{li } e^a + \text{l}\left(\frac{a \pm u}{a}\right) \pm u\, F_1 + u^2 F_2 \pm u^3 F_3 + u^4 F_4 \pm \ldots \tag{6}$$

$$F_1 = \frac{e^a - 1}{a}; \quad F_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{e^a}{a.n!} - \frac{n}{a} F_n\right),$$

e aus der Gleichung (2) dadurch entsteht, daß man in letzterer beziehungsweise e^a und $e^{\pm u}$ anstatt a und u tzt. Die nachfolgende Tafel der Werthe von li e^a ist zum größten Theile auf diese Art berechnet worden. jedoch die Glieder der Reihe (5), auf die gehörige Weise verbunden, zugleich die Werthe der cyclischen und rbolischen Integral-Cosinus und Sinus finden lassen, so habe ich mich der, zum Theil sehr großen, Mühe zogen, die ganze Tafel noch einmal mittelst der Formel (5) zu berechnen und die bereits gefundenen Werthe li e^a als Controlen zu verwenden. Zu dem Ende suchte ich die Summen der vier Reihen

$$\text{I} = \gamma + \text{la} + \frac{a^4}{4.4!} + \frac{a^8}{8.8!} + \ldots \qquad \text{III} = \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^6}{6.6!} + \frac{a^{10}}{10.10!} + \ldots$$

$$\text{II} = \frac{a}{1.1!} + \frac{a^5}{5.5!} + \frac{a^9}{9.9!} + \ldots \qquad \text{IV} = \frac{a^3}{3.3!} + \frac{a^7}{7.7!} + \frac{a^{11}}{11.11!} + \ldots.$$

ie einzelnen Werthe von a und erhielt damit:

$$\text{Ci a} = \int \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{da}{a} = \text{I} + \text{III} \qquad \text{Si a} = \int \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{da}{a} = \text{II} + \text{IV}$$

$$\text{ci a} = \int \cos a \cdot \frac{da}{a} = \text{I} - \text{III} \qquad \text{si a} = \int \sin a \cdot \frac{da}{a} = \text{II} - \text{IV}$$

$$\text{li } e^a = \text{I} + \text{III} + \text{II} + \text{IV} \qquad \text{li } e^{-a} = \text{I} + \text{III} - \text{II} - \text{IV}.$$

die Rechnung nach (5) richtig, so mußte der damit gefundene Werth von li e^a mit dem aus der Formel (6) tenen übereinstimmen. Da der Werth a = 1 gewissermaaßen als Fundament für die ganze Tafel anzusehen

war, so wurden die obigen vier Reihen für ihn auf 40 Decimalstellen entwickelt. Dies gab, wenn die Constante γ*) gleich

γ = 0,57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421

gesetzt wird, folgende Resultate:

li e = + 1,89511 78163 55936 75546 65209 34331 63426 90
li e^{-1} = — 0,21938 39343 95520 27367 71637 75460 12164 90
Ci 1 = + 0,83786 69409 80208 24089 46785 79435 75630 99:
Si 1 = + 1,05725 08753 75728 51457 18423 54895 87795 90
ci 1 = + 0,33740 39229 00968 13466 26462 03889 15076 99:
si 1 = + 0,94608 30703 67183 01494 13533 13823 17965 78

Hier wie im Folgenden ist die letzte Decimalziffer stets ungeändert gelassen; es ist ihr aber, wenn die nächst folgenden Ziffern zwischen 33 . . . und 66 . . . lagen, ein Punkt, und wenn sie zwischen 66 . . . und 99 . . . lagen, ein Colon beigefügt worden. In ähnlicher Weise habe ich die nachfolgenden Funktionenwerthe für a = 2 u. s. w. bis a = 10 auf 23 Decimalstellen berechnet und das Resultat nach Gleichung (6) geprüft.

a	li . e^a	Ci . a	ci . a
1	+ 1,89511 78163 55936 75546.	+ 0,83786 69409 80208 24089.	+ 0,33740 39229 00968 13466
2	4,95423 43560 01890 16337:	2,45266 69226 46914 52190.	0,42298 08287 74864 99569:
3	9,93333 25706 25416 55800:	4,96039 20947 65609 76029:	0,11962 97860 08000 32762.
4	19,63087 44700 56220 02264.	9,81354 75588 23185 55808.	— 0,14098 16978 86930 41163:
5	40,18527 53558 03177 45509	20,09206 35301 05951 06464:	0,19002 97496 56643 87861:
6	85,98976 21424 39204 80358.	42,99470 10299 93521 07246	0,06805 72438 93247 12620.
7	191,50474 33355 01395 95306	95,75231 39268 84892 80742.	+ 0,07669 52784 82184 51838
8	440,37989 95348 38268 99742.	220,18993 09346 07712 53626	0,12243 38825 32009 55729
9	1037,87829 07170 89587 65757	518,93913 91348 67704 82565	0,05534 75313 33133 60708.
10	2492,22897 62418 77759 13844	1246,11448 60424 54414 72655:	— 0,04545 64330 04455 37263.

a	li . e^{-a}	Si . a	si . a
1	— 0,21938 39343 95520 27367:	+ 1,05725 08753 75728 51457	+ 0,94608 30703 67183 01494
2	0,04890 05107 08061 11956:	2,50156 74333 54975 64147.	1,60541 29768 02694 84857:
3	0,01304 83810 94197 03741	4,97344 04758 59806 79771	1,84865 25279 99468 25639:
4	0,00377 93524 09848 90647:	9,81732 69112 33034 46456	1,75820 31389 49053 05810.
5	0,00114 82955 91275 32579:	20,09321 18256 97226 39044.	1,54993 12449 44674 13727.
6	0,00036 00824 52162 65865:	42,99506 11124 45683 73112	1,42468 75512 80506 53576:
7	0,00011 54817 31610 33821.	95,75242 94086 16503 14563:	1,45459 66142 48093 59061.
8	0,00003 76656 22843 92490	220,18996 86002 30556 46116	1,57418 68217 06942 05208
9	0,00001 24473 54178 00627	518,93915 15822 21882 83192	1,66504 00758 29602 49510.
10	0,00000 41569 68929 68532.	1246,11449 01994 23344 41188	1,65834 75942 18874 04933

Die vorstehenden Zahlwerthe sind von mir schon früher veröffentlicht worden, (Grunert's Archiv, Bd. 3. S. ..) gleichwohl aber hier nochmals aufgeführt, um alles zusammenzustellen, was über numerische Werthe der fraglichen Transscendenten bis jetzt vorhanden ist. Mittelst dieser Hauptwerthe konnten nun die li e^a für alle Argumente der nachfolgenden Tafel nach Gleichung (6) berechnet und dadurch für die zweite Rechnung nach Formel (5) die erforderliche Controle erhalten werden.

---

*) Der hier gebrauchte Werth von γ ist aus der Abhandlung von Gauß über die hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma . 1} x$ ... entnommen; die Berechnung desselben ist von Nicolai und zwar auf doppelte Weise bewirkt worden, so daß die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate die Richtigkeit der hier aufgenommenen 40 Decimalstellen verbürgt. Soldner hat γ auf 22 Decimalstellen berechnet, die vollständig mit Nicolais Werth übereinstimmen; Mascheronis Rechnung giebt 32 Stellen, von denen jedoch nur die ersten 19 richtig, die übrigen total falsch sind. — In neuerer Zeit hat Lindmann, der wahrscheinlich die Werthbestimmung Nicolais nicht kannte, sich durch die eben besprochene Differenz zu einer Wiederholung der Rechnung veranlaßt gefunden, und hat gleichfalls Soldners Rechnungsresultat bestätigt erhalten. Vergl. Grunert's Archiv, Bd. 29. S. 240.

li . e^{a}	li . e^{-a}	Ci . a	Si . a	ci . a	si . a
— ∞	— ∞	— ∞	+0,00000 00000	— ∞	+0,00000 00000
—4,01792 94654	—4,03792 95765	—4,02792 95209:	0,01000 00555.	—4,02797 95209:	0,00999 99444.
3,31470 68944	3,35470 77833	3,33470 73388.	0,02000 04444.	3,33490 73388.	0,01999 95555.
2,89911 57239.	2,95911 87240	2,92911 72239:	0,03000 15000.	2,92956 72239:	0,02999 85000.
2,60125 65775:	2,68126 36890	2,64126 01333	0,04000 35557	2,64206 01333	0,03999 64446
—2,36788 45985:	—2,46789 84885	—2,41789 15435.	+0,05000 69449.	—2,41914 15435.	+0,04999 30560.
2,17528 29155.	2,29530 69181.	2,23529 49168.	0,06001 20012:	2,23709 49168:	0,05998 80012:
2,01080 00635.	2,15083 81802.	2,08081 91218:	0,07001 90583.	2,08326 91219.	0,06998 09472.
1,86688 41027:	2,02694 10025:	1,94691 25526:	0,08002 84499	1,95011 25528	0,07997 15610
1,73866 37503.	1,91874 47700	1,82870 42601:	0,09004 05098.	1,83275 42604.	0,08995 95098.
—1,62281 28139:	—1,82292 39584	—1,72286 83861:	+0,10005 55722	—1.72786 83866.	+0,09994 44611
1,51695 87514:	1,73710 66940.	1,62703 27227:	0,11007 39712:	1,63308 27235:	0,10992 60823:
1,41934 96691	1,65954 17520:	1,53944 57106	0,12009 60414:	1,54664 57119:	0,11990 40414.
1,32865 50699.	1,58889 93048:	1,45877 71874	0,13012 21174.	1,46722 71896.	0,12987 80063
1,24384 06539.	1,52414 57221:	1,38399 31880.	0,14015 25341	1,39379 31915.	0,13984 76451.
—1,16408 64172:	—1,46446 16705	—1,31427 40439	+0,15018 76266	—1,32552 40491:	+0,14981 26265
1,08873 12379	1,40918 66986:	1,24895 89682:	0,16022 77303:	1,26175 89760.	0,15977 26191
1,01723 42901.	1,35778 06525.	1,18750 74713.	0,17027 31812	1,20195 74825	0,16972 72920:
0,94914 75052	1,30979 61354	1,12947 18203	0,18032 43151	1,14567 18360.	0,17967 63147.
0,88409 54874	1,26485 84244	1,07447 69559	0,19038 14684:	1,09252 69777	0,18961 93568:
—0,82176 05879	—1,22265 05441:	—1,02220 55660.	+0,20044 49781.	—1,04220 55956:	+0,19955 60885
0,76187 16238:	1,18290 19862.	0,97238 68050.	0,21051 51811:	0,99443 68447:	0,20948 61801:
0,70419 52245:	1,14538 00550	0,92478 76398	0,22059 24152	0,94898 76922:	0,21940 93026:
0,64852 91026	1,10988 31388:	0,87920 61207.	0,23067 70181.	0,90565 61892:	0,22932 51273
0,59469 67580.	1,07623 54148:	0,83546 60864:	0,24076 93284	0,86426 61749.	0,23923 33258
—0,54254 32646.	—1,04428 26344.	—0,79341 29495.	+0,25086 96848:	—0,82466 30625:	+0,24913 35703
0,49193 18828:	1,01388 87367:	0,75291 03098	0,26097 84269.	0,78671 04528.	0,25902 55335
0,44274 13124	0,98493 31013	0,71383 72068:	0,27109 58944.	0,75028 73862.	0,26890 88885
0,39486 34448	0,95730 83003.	0,67608 58725:	0,28122 24277:	0,71528 60956:	0,27878 33090
0,34820 15102:	0,93091 82460	0,63955 98781.	0,29135 83678.	0,68161 01535	0,28864 84691:
—9,30266 85392.	—0,90567 66516:	—0,60417 25954:	+0,30150 40562	—0,64917 29329:	+0,29850 40438
0,25818 60759	0,88150 57456:	0,56984 59107:	0,31165 98348:	0,61789 63216:	0,30834 97081:
0,21468 30961	0,85833 51893	0,53650 91427	0,32182 60465:	0,58770 96398	0,31818 51382
0,17209 50921.	0,83610 11614.	0,50409 81267:	0,33200 30346.	0,55854 87246:	0,32801 00104:
0,13030 32936	0,81474 55796	0,47255 44366.	0,34219 11430	0,53035 51518.	0,33782 40021.
—0,08943 40019	—0,79421 54346	—0,44182 47182:	+0,35239 07163.	—0,50307 55693	+0,34762 67909:
0,04925 80179	0,77446 22178	0,41186 01178:	0,36260 20999.	0,47666 11256.	0,35741 80555
0,00979 01485	0,75544 14281.	0,38261 57883	0,37282 56398	0,45106 69761:	0,36719 74749
+0,02901 12214	0,73711 21441.	0,35405 04613:	0,38306 16827:	0,42625 18553	0,37696 47290.
0,06718 45009:	0,71943 66516:	0,32612 60753.	0,39331 05763	0,40217 77043:	0,38671 94985
+0,10476 52186	—0,70238 01188.	—0,29880 74501	+0,40357 26687.	—0,37880 93464	+0,39646 14647.
0,14178 63068:	0,68591 03113.	0,27206 20022.	0,41384 83091	0,35611 42013:	0,40619 03098
0,17827 83531.	0,66999 73415	0,24585 94941:	0,42413 78473.	0,33406 20354	0,41590 57166.
0,21426 98207:	0,65461 34475.	0,22017 18138:	0,43444 16341.	0,31262 47399.	0,42560 73689.
0,24978 72447	0,63973 27976	0,19497 27764.	0,44476 00211:	0,29177 61358.	0,43529 49512:
+0,28485 54053.	—0,62533 13163	—0,17023 79554:	+0,45509 33608.	—0,27149 17998.	+0,44496 81490
0,31949 74829.	0,61138 65301	0,14594 45235:	0,46544 20065	0,25174 89098.	0,45462 66483.
0,35373 51958:	0,59787 74292.	0,12207 11166:	0,47580 63125.	0,23252 61070:	0,46427 01364:
0,38758 89238:	0,58478 43444	0,09359 77102:	0,48618 66341.	0,21380 33726	0,47389 83013.
0,42107 78189.	0,57208 88360.	0,07550 55085.	0,49658 33275	0,19556 19165:	0,48351 08319

a	li . e^a	li . e^{-a}	Ci . a	Si . a	ci . a	si . a
0,50	+0,45421 99048.	—0,55977 35947:	—0,05277 68449.	+0,50699 67498	—0,17778 40788	+0,49310 74
0,51	0,48703 21668	0,54782 23517:	0,03039 50924:	0,51742 72592:	0,16045 32389:	0,50268 77
0,52	0,51953 06324.	0,53621 97978.	0,00834 45826.	0,52787 52150.	0,14355 37358.	0,51225 15
0,53	0,55173 04452	0,52495 15101	+0,01338 94675.	0,53834 09776:	0,12707 07938	0,52179 84
0,54	0,58364 59307	0,51400 38857	0,03482 10225	0,54882 49082	0,11099 04567	0,53132 81
0,55	+0,61529 06570.	—0,50336 40813:	+0,05596 32878.	+0,55932 73692	—0,09529 95274	+0,54084 03
0,56	0,64667 74897:	0,49301 99587:	0,07682 87654:	0,56984 87242:	0,07998 55128:	0,55033 48
0,57	0,67781 86418:	0,48296 00342.	0,09742 93038	0,58038 93380:	0,06503 65743.	0,55981 12
0,58	0,70872 57196	0,47317 34333	0,11777 61431.	0,59094 95764:	0,05044 14814:	0,56926 92
0,59	0,73940 97641.	0,46364 98489.	0,13787 99575:	0,60152 98065.	0,03618 95707	0,57870 85
0,60	+0,76988 12899.	—0,45437 95031:	+0,15775 08933:	+0,61213 03965.	—0,02227 07069	+0,58812 88
0,61	0,80015 03198	0,44535 31121.	0,17739 86038.	0,62275 17159:	0,00867 52485:	0,59752 98
0,62	0,83022 64173.	0,43656 18538.	0,19683 22817.	0,63339 41355:	+0,00460 59848:	0,60691 12
0,63	0,86011 87163.	0,42799 73384	0,21606 06889:	0,64405 80273:	0,01758 17423:	0,61627 27
0,64	0,88983 59484:	0,41965 15808.	0,23509 21838	0,65474 37646:	0,03026 03685:	0,62561 41
0,65	+0,91938 64682.	—0,41151 69759.	+0,25393 47461.	+0,66545 17220:	+0,04264 98292.	+0,63493 50
0,66	0,94877 82764:	0,40358 62747:	0,27259 60008.	0,67618 22756.	0,05475 77342:	0,64423 51
0,67	0,97801 90418:	0,39585 25634	0,29108 32392.	0,68693 58026.	0,06659 13593.	0,65351 42
0,68	1,00711 61209	0,38830 92428	0,30940 34390.	0,69771 26818:	0,07815 76659	0,66277 19
0,69	1,03607 65763:	0,38095 00104.	0,32756 32829:	0,70851 32934	0,08946 33195	0,67200 80
0,70	+1,06490 71946	—0,37376 88432.	+0,34556 91756:	+0,71933 80189	+0,10051 47070	+0,68122 22
0,71	1,09361 45014	0,36675 99814	0,36342 72599:	0,73018 72414	0,11131 79525	0,69041 41
0,72	1,12220 47768:	0,35991 79139	0,38114 34314:	0,74106 13453:	0,12187 89321:	0,69958 36
0,73	1,15068 40693:	0,35323 73644:	0,39872 33524.	0,75196 07169.	0,13220 32879.	0,70873 03
0,74	1,17905 82082.	0,34671 32789	0,41617 24646:	0,76288 57435:	0,14229 64404.	0,71785 39
0,75	+1,20733 28160	—0,34034 08129	+0,43349 60015.	+0,77383 68144.	+0,15216 36009:	+0,72695 42
0,76	1,23551 33194.	0,33411 53210:	0,45069 89991:	0,78481 43202.	0,16180 97826:	0,73603 09
0,77	1,26360 49602	0,32803 23463:	0,46778 63069	0,79581 86533	0,17123 98110.	0,74508 36
0,78	1,29161 28047	0,32208 76102:	0,48476 25972	0,80685 02075	0,18045 83335.	0,75411 29
0,79	1,31954 17531.	0,31627 70037.	0,50163 23746:	0,81790 93784.	0,18946 98289:	0,76311 60
0,80	+1,34739 65482	—0,31059 65785.	+0,51839 99848.	+0,82899 65633:	+0,19827 86159.	+0,77209 57
0,81	1,37518 17833.	0,30504 25392	0,53506 96220:	0,84011 21612:	0,20688 88609.	0,78105 02
0,82	1,40290 19100:	0,29961 12355	0,55164 53372:	0,85125 65727:	0,21530 45858:	0,78997 99
0,83	1,43056 12453:	0,29429 91553:	0,56813 10450	0,86243 02003:	0,22352 96751:	0,79888 27
0,84	1,45816 39782:	0,28910 29181:	0,58453 05300.	0,87363 34482	0,23156 78824.	0,80776 09
0,85	+1,48571 41762	—0,28401 92685	+0,60084 74538.	+0,88486 67223.	+0,23942 28367.	+0,81661 27
0,86	1,51321 57910	0,27904 50701:	0,61708 53604	0,89613 04306	0,24709 80485:	0,82543 77
0,87	1,54067 26644.	0,27417 73007:	0,63324 76818.	0,90742 49826	0,25459 69152:	0,83423 65
0,88	1,56808 85336.	0,26941 30463.	0,64933 77436.	0,91875 07899:	0,26192 27264	0,84300 80
0,89	1,59546 70359	0,26474 94963:	0,66535 87697:	0,93010 82661.	0,26907 86686.	0,85175 31
0,90	+1,62281 17136:	—0,26018 39393	+0,68131 38871:	+0,94149 78265	+0,27606 78304.	+0,86047 00
0,91	1,65012 60188	0,25571 37579:	0,69720 61304	0,95291 98883:	0,28289 32065	0,86916 00
0,92	1,67741 33168	0,25133 64254	0,71303 84456:	0,96437 48711	0,28955 77018.	0,87782 26
0,93	1,70467 68909:	0,24704 95010	0,72881 36949:	0,97586 31960	0,29606 41358	0,88645 63
0,94	1,73191 99460.	0,24285 06267:	0,74453 46596.	0,98738 52864	0,30241 52457:	0,89506 11
0,95	+1,75914 56118:	—0,23873 75236.	+0,76020 40441	+0,99894 15677.	+0,30861 36907:	+0,90363 87
0,96	1,78635 69467	0,23470 79883.	0,77582 44791:	1,01053 24675.	0,31466 20546:	0,91218 55
0,97	1,81355 69406:	0,23075 98900.	0,79139 85253	1,02215 84153.	0,32056 28494:	0,92070 46
0,98	1,84074 85185	0,22689 11674	0,80692 86755.	1,03381 98429.	0,32631 85182:	0,92919 36
0,99	1,86793 45427.	0,22309 98257:	0,82241 73584:	1,04551 71842.	0,33193 14381:	0,93765 31

li . e^a	li . e^{-a}	Ci . a	Si . a	ci . a	si . a
+1,89511 78163.	—0,21938 39343:	+0,83786 69409:	+1,05725 08753:	+0,33740 39229	+0,94608 30703:
2,16737 82795.	0,18599 09045.	0,99069 36875	1,17668 45920.	0,38487 33774	1,02868 52186:
2,44209 22851:	0,15840 84368.	1,14184 19241:	1,30025 03610	0,42045 91828:	1,10804 71990
2,72139 88802	0,13545 09578.	1,29297 39611:	1,42842 49190.	0,44573 85675.	1,18395 80090:
3,00720 74641	0,11621 93125:	1,44549 40757:	1,56171 33883.	0,46200 65850:	1,25622 67327:
+3,30128 54491	—0,10001 95824	+1,60063 29333.	+1,70065 25157:	+0,47035 63171:	+1,32468 35311:
3,60531 99490	0,08630 83336:	1,75950 58076.	1,84581 41413.	0,47173 25169	1,38918 04858:
3,92096 32013.	0,07465 46444	1,92315 42784.	1,99780 89228:	0,46696 83641:	1,44959 22896:
4,24986 75574:	0,06471 31293.	2,09257 72140.	2,15729 03434	0,45681 11294	1,50581 67802.
4,59371 36869.	0,05620 43780:	2,26875 46543:	2,32495 90325.	0,44194 03496:	1,55777 53137.
+4,95423 43560	—0,04890 05107	+2,45266 69226.	+2,50156 74333.	+0,42298 08287:	+1,60541 29768
5,33323 53596.	0,04261 43415	2,64531 05090:	2,68792 48505:	0,40051 19878.	1,64869 86362.
5,73261 46998	0,03719 11370.	2,84771 17813:	2,88490 29184	0,37507 45990.	1,68762 48272.
6,15438 07913.	0,03250 22671:	3,06093 92620:	3,09344 15292.	0,34717 56175.	1,72220 74818
6,60067 02763.	0,02844 02609.	3,28611 50077	3,31455 52686.	0,31729 16174.	1,75248 55007.
+7,07376 58945:	—0,02491 49178:	+3,52442 54883.	+3,54934 04062	+0,28587 11963:	+1,77852 01734.
7,57611 47697:	0,02185 02218	3,77713 22739:	3,79898 24957:	0,25333 66160.	1,80039 44505
8,11034 74152	0,01918 18718	4,04558 27716:	4,06476 46435	0,22008 48786.	1,81821 20764:
8,67929 77238	0,01685 52924.	4,33122 12156:	4,34807 65081	0,18648 83896.	1,83209 65890:
9,28602 41865:	0,01482 40192	4,63560 00836:	4,65042 41028:	0,15289 53241.	1,84219 01946.
+9,93383 25706	—0,01304 83810:	+4,96039 20947.	+4,97344 04758.	+0,11962 97860	+1,84865 25279:
10,62630 02841	0,01149 44187.	5,30740 29326:	5,31889 73514.	0,08699 18311:	1,85165 93076:
11,36730 26569:	0,01013 29924:	5,67858 48322.	5,68871 78247.	0,05525 74117	1,85140 08970
12,16104 13736	0,00893 90425.	6,07605 11655.	6,08499 02080:	0,02467 82846	1,84808 07827:
13,01207 53041.	0,00789 09735	6,50209 21653	6,50998 31388	—0,00451 80779	1,84191 39833
+13,92535 39951.	—0,00697 01398:	+6,95919 19276.	+6,96616 20675	—0,03212 85485	+1,83312 53986:
14,90625 40995.	0,00616 04143	7,45004 68426	7,45620 72569.	0,05797 43518.	1,82194 81156.
15,96061 90449	0,00544 78246.	7,97758 56101	7,98303 34347:	0,08190 10012:	1,80862 16808:
17,09480 22651.	0,00482 02468	8,54499 10091:	8,54981 12559:	0,10377 81503.	1,79339 03548.
18,31571 43464.	0,00426 71452:	9,15572 36005:	9,15999 07458.	0,12349 93492	1,77650 13604.
+19,63087 44700.	—0,00377 93524	+9,81354 75588	+9,8173 69112.	—0,14098 16978:	+1,75820 31389.
21,04846 65683	0,00334 88806.	10,52255 88438.	10,52590 77244:	0,15616 53918	1,73874 36264:
22,57740 06477:	0,00296 87621:	11,28721 59427:	11,29018 47049:	0,16901 31567:	1,71836 85636:
24,22737 97756.	0,00263 29119.	12,11237 34318.	12,11500 63437:	0,17950 95725	1,69731 98506:
26,00897 32716	0,00233 60100	13,00331 86307:	13,00565 46408	0,18766 02867:	1,67583 39594
+27,93369 66979.	—0,00207 34007.	+13,96581 16485:	+13,96788 50493.	—0,19349 11221	+1,65414 04143:
30,01409 92964:	0,00184 10058	15,00612 91453	15,00797 01511.	0,19704 70797	1,63246 03525
32,26385 95826	0,00163 52494:	16,13111 21665.	16,13274 74160.	0,19839 12468.	1,61100 51718
34,69788 98737:	0,00145 29939.	17,34821 84399	17,34967 14338.	0,19760 36133	1,58997 52781:
37,33237 06037:	0,00121 14833.	18,66557 95602	18,66679 10435:	0,19477 98060	1,56963 89381
+40,18527 53558	—0,00114 82955:	+20,09206 35301	+20,09321 18256:	—0,19002 97496.	+1,54993 12449.
43,27570 76357.	0,00102 13001	21,63734 31678	21,63836 44679.	0,18347 62631.	1,53125 32047
46,62485 05057:	0,00090 86216	23,31197 09420:	23,31287 95637	0,17525 36022.	1,51367 09467.
50,25573 03048	0,00080 86083.	25,12746 08482.	25,12826 94565:	0,16550 59585.	1,49731 50635:
54,19347 58009:	0,00071 98044.	27,09647 79982.	27,09709 78027	0,15438 59261:	1,48230 00826.
+58,46551 42498	—0,00064 09260.	+29,23243 66618:	+29,23307 75879.	—0,14205 29475.	+1,46872 40726.
63,10178 59742:	0,00057 08401.	31,55060 75670.	31,55117 84072.	0,12867 17493.	1,45666 83847
68,13497 92375.	0,00050 85464:	34,06723 53455	34,06774 38920	0,11441 07807.	1,44619 75285
73,60078 73506:	0,00045 31612:	36,80016 70946:	36,80062 02559:	0,09944 06646:	1,43735 91822:
79,53819 01448:	0,00040 39035	39,76889 31206:	39,76929 70241:	0,08390 26741	1,43018 43341

a	li . e^{a}	li . e^{-a}	Ci . a	Si . a	ci . a	si . a
6,0	+ 85,98976 21424.	—0,00036 00824.	+ 42,99470 10299:	+ 42,99506 11124.	—0,06805 72438:	+1,42468 75
6,1	93,00200 99869:	0,00032 10870	46,50084 44499:	46,50116 55369:	0,05198 25289:	1,42086 73
6,2	100,62574 19406.	0,00028 63763.	50,31272 77821.	50,31301 41585	0,03587 30192.	1,41870 68
6,3	108,91647 25275:	0,00025 54914	54,45810 85180:	54,45836 40095	0,01988 82106	1,41817 40
6,4	117,93486 57001:	0,00022 79479.	58,96731 88761	58,96754 68240:	0,00418 14110	1,41922 29
6,5	+127,74722 02332	—0,00020 34298.	+ 63,87350 84016:	+ 63,87371 18315.	+0,01110 15195	+1,42179 42
6,6	138,42600 14082	0,00018 15837.	69,21290 99122.	69,21309 14959:	0,02582 31380.	1,42581 61
6,7	150,05042 34452.	0,00016 21138.	75,02513 06656:	75,02529 27795.	0,03985 54400.	1,43120 53
6,8	162,70708 75714	0,00014 47577:	81,35347 14068	81,35361 61646	0,05308 07167	1,43786 84
6,9	176,49068 10901.	0,00012 92826:	88,24527 59037.	88,24540 51864	0,06539 23139:	1,44570 24
7,0	+191,50474 33355	—0,00011 54817	+ 95,75231 39268:	+ 95,75242 94086	+0,07669 52784:	+1,45459 66
7,1	207,86250 49687	0,00010 31713.	103,93120 08987.	103,93130 40700	0,08690 68880.	1,46443 32
7,2	225,68780 77010.	0,00009 21881	112,84385 77564:	112,84394 99445:	0,09595 70643.	1,47508 90
7,3	245,11611 22163:	0,00008 23872.	122,55801 49145.	122,55809 73018	0,10378 86664	1,48643 64
7,4	266,29560 28236.	0,00007 36397	133,14776 45919.	133,14783 82316:	0,11035 76658	1,49834 47
7,5	+289,38839 82001.	0,00006 58308:	+144,69416 61846	+144,69423 20155	+0,11563 32032.	+1,51068 15

Schulnachrichten.

A. Allgemeine Lehrverfassung des Realgymnasiums
im Schuljahr 1858 bis 1859.

Da erst im letzten Programm der Lehrplan der Anstalt vollständig abgedruckt ist, so halten wir es für ichend, denselben im Auszuge und zwar nach der zu Johannis 1858 durch den Abgang des Herrn Dr. Zeyß oendig gewordenen Vertheilung der Lehrgegenstände mitzutheilen.

I. Prima. (Cursus zweijährig.)
Ordinarius Professor Bretschneider.

1. Religion 2 Stunden, Oberlehrer Cott. 2. Deutsche Sprache: Literaturgeschichte 2 Stunden, Looff; itze 1 Stunde, Oberlehrer Cott. 3. Französische Sprache 4 St., Prof. Schwob-Dollé. 4. Englische che 4 St., Oberlehrer Dr. Sievers. 5. Lateinische Sprache 3 St., derselbe. (Für die vom Lateinischen nsirten Schüler: Zeichnen 3 St., Baumeister Schmidt.) 6. Mathematik 4 St., Prof. Bretschneider. emie und Mineralogie 6 St. (2 St. theoretischer Unterricht, 4 St. Arbeiten im Laboratorium), Oberlehrer Eisenach. 8. Physik 2 St., Looff. 9. Geschichte 2 St., derselbe. 10. Geographie 2 St., Professor tschneider. 11. Zeichnen (für alle Schüler) 2 St., Baumeister Schmidt. 12. Singen 1 St., Lehrer ser.

II. Secunda. (Cursus einjährig.)
Ordinarius Oberlehrer Dr. Sievers.

1. Religion 2 St., combinirt mit Prima. 2. Deutsche Sprache 3 St., Oberlehrer Dr. Sievers. 3. Fran- e Sprache 4 St., Professor Schwob-Dollé. 4. Englische Sprache 3 St., Oberlehrer Dr. Sievers. teinische Sprache, combinirt mit Prima. 6. Mathematik: a. Geometrie 3 St., Professor Bretschneider; ithmetik 2 St., Looff. 7. Chemie und Naturbeschreibung 4 St., Oberlehrer Dr. Eisenach. 8. Physik , derselbe. 9. Geschichte 2 St., combinirt mit Prima. 10. Geographie 2 St., Prof. Bretschneider. eichnen 2 St., combinirt mit Prima. 12. Singen 1 St., desgleichen.

III. Tertia. (Cursus einjährig.)
Ordinarius Oberlehrer Cott.

1. Religion 2 St., Oberlehrer Cott. 2. Deutsche Sprache 4 St., derselbe. 3. Französische Sprache , Professor Schwob-Dollé. 4. Englische Sprache 3 St., Oberlehrer Dr. Sievers. 5. Lateinische he 3 St., derselbe. (Für die vom Lateinischen dispensirten Schüler: Zeichnen 3 St., Baumeister idt.) 6. Mathematik: a. Geometrie 2 St., Professor Bretschneider; b. Arithmetik und praktisches n 3 St., Looff. 7. Physik 2 St., Oberlehrer Dr. Eisenach. 8. Naturbeschreibung 2 St., derselbe chichte 2 St., Looff. 10. Geographie 2 St., Prof. Bretschneider. 11. Zeichnen (für alle Schüler) , Baumeister Schmidt. 12. Schönschreiben 1 St., Lehrer Benser. 13. Singen 1 St., derselbe.

IV. Quarta. (Cursus einjährig.)

Ordinarius Lehrer Kirsten.

1. Religion 2 St., Lehrer Kirsten. 2. Deutsche Sprache 4 St., derselbe. 3. Französische S 4 St., Oberlehrer Cott. 4. Englische Sprache 3 St., Lehrer Kirsten. 5. Lateinische Sprache 4 St., (Für die vom Lateinischen noch dispensirten Schüler: Zeichnen 4 St., Baumeister Schmidt.) 6. Mathe a. Geometrie 2 St., Prof. Bretschneider; b. Arithmetik und praktisches Rechnen 3 St., Looff. 7. beschreibung 2 St., Oberlehrer Dr. Eisenach. 8. Geschichte 2 St., Lehrer Kirsten. 9. Geographie Professor Bretschneider. 10. Zeichnen (für alle Schüler) 2 St., Baumeister Schmidt. 11. Schönsc 2 St., Lehrer Benser. 12. Singen 1 St., derselbe.

V. Quinta. (Cursus einjährig.)

Ordinarius Lehrer Weingart.

1. Religion 2 St., Lehrer Kirsten. 2. Deutsche Sprache 4 St., Lehrer Weingart. 3. Fran Sprache 6 St., Lehrer Cott. 4. Lateinische Sprache 4 St., Lehrer Weingart. 5. Rechnen 4 St., Benser. 6. Naturbeschreibung 2 St., Oberlehrer Dr. Eisenach. 7. Geschichte 2 St., Lehrer Ki 8. Geographie 2 St., Oberlehrer Cott. 9. Zeichnen 3 St., Baumeister Schmidt. 10. Schönschreiben Lehrer Benser. 11. Singen 1 St., derselbe.

VI. Sexta. (Cursus einjährig.)

Ordinarius Lehrer Benser.

1. Religion 2 St., Lehrer Weingart. 2. Deutsche Sprache 6 St., derselbe. 3. Französische S 2 St., Lehrer Kirsten. 4. Lateinische Sprache 6 St., Lehrer Weingart. 5. Rechnen 4 St., Lehrer B 6. Geographie 2 St., Oberlehrer Cott. 7. Zeichnen 2 St., Baumeister Schmidt. 8. Schönschreiben Lehrer Benser. 9. Singen 1 St., derselbe.

B. Chronik der Anstalt.

Ostern 1858—1859.

Aus dem Lehrercollegium schied zu Johannis 1858 Herr Dr. Zeyß, um einem ehrenvollen Ru Diaconus zu Herbsleben zu folgen. Seit dem Februar 1848 hatte derselbe mit dem ausgezeichnetsten Eif dem glänzendsten Erfolge seines Unterrichts der Anstalt als Lehrer angehört und auch außer dem Bereic Schule durch die in unsern Programmen*) erschienenen Beiträge zu einer Geschichte der Pflanzenwanderu rühmliche Anerkennung erworben. Deshalb mußte sein Scheiden für die Anstalt als ein schmerzlicher betrachtet werden. Dem Scheidenden, welcher in der Schulversammlung von der Anstalt Abschied nahm, die innigsten Wünsche der Collegen und Schüler für sein ferneres Wohlergehen. Nach dem Abgange des Dr. Zeyß ascendirte Herr Gymnasiallehrer Kirsten in dessen Stelle und Herr Candidat Weingart provisorisch als Lehrer für die durch Ascension erledigte Lehrerstelle berufen. Hierdurch wurden mehrfach änderungen in der Vertheilung der Lehrgegenstände und im Stundenplan nothwendig, welche mit dem Begi Unterrichts nach den Sommerferien durchgeführt wurden.

Durch das Herzogliche Staatsministerium wurde dem Director dadurch eine Besoldungszulage g ertheilt, daß dessen Dienstwohnung, bisher zu einhundert Thalern im Besoldungsetat angesetzt, in dem neu zu einhundertundfünfzig Thalern berechnet wurde. Außerdem wurden die Besoldungen nachfolgender Lehrer e

---

*) Osterprogramm 1855. Versuch einer Geschichte der Pflanzenwanderung. 1tes Stück. — Programm zur Feier des jährigen Jubiläums des Oberconsistorial-Präsidenten Freitag. 2tes Stück. September 1855.

Die des Professors Bretschneider	von 780	auf	800	Thlr.
des Oberlehrers Dr. Eisenach	von 550	„	650	„
des Oberlehrers Dr. Sievers	von 550	„	650	„
des Oberlehrers Cott	von 440	„	500	„
des Gymnasiallehrers Kirsten	von 440	„	500	„
der letzten wissenschaftlichen Lehrerstelle	von 330	„	400	„

Die Turnlehrerstelle wurde dem Lehrer an der hiesigen Bürgerschule, Herrn Mönch provisorisch über-
n.

Während der Sommerferien machte Referent gemeinschaftlich mit Herrn Mönch im Auftrage des Herzogl.
tsministerii eine Reise nach Dresden, um dem an der dortigen Königlichen Centralturnanstalt vom Herrn
ctor Kloß nach der Spieß'schen Methode ertheilten Turnunterricht beizuwohnen. Darauf wurde, soweit
ei dem Mangel eines Turnsaales geschehen konnte, diese Methode auch bei den Turnübungen der Schüler
iesigen Lehranstalten angewandt.

Frequenz der Anstalt.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Sommersemester	6	10	24	37	33	30	140.
Wintersemester	5	8	25	30	36	33	137.
Am Ende des Schuljahrs .	4	6	23	28	35	33	129.

Errichtung der Anstalt sind aufgenommen 1069 Schüler (34 im letzten Schuljahre, und zwar 3 in Tertia,
Quarta, 9 in Quinta, 20 in Sexta.

Zu der vor Ostern stattfindenden Abiturientenprüfung haben sich die Primaner

Arnold Vogt aus Blankenhain bei Weimar,
Victor Hartleb aus Coburg und
Theodor List aus Lauterbach in Oberhessen

det. Vogt beabsichtigt Cameralia, Hartleb Mathematik und Naturwissenschaften zu studiren, List sich
Techniker und Fabrikanten auszubilden.

Vermehrung der Unterrichtsmittel im letzten Schuljahre.

a. Lehrerbibliothek.

Aus dem etatsmäßigen Fond wurden außer den Fortsetzungen der bereits schon in früheren Programmen
igten Werke angeschafft: Kühner, lateinische Schulgrammatik. Elze, Shakspeare's Hamlet. Körner, praktische
ung zur Anfertigung deutscher Aufsätze. Berlet, deutsche Schulgrammatik für höhere Schulen. Heinze,
ung zum Disponiren. Neukirch, praktischer Stylbildungsfreund. Fischer, Kuno, Schiller als Philosoph.
ke, Schiller's Leben und Werke, 1. Bd. Kreyßig, Shakspeare, Vorlesungen über ihn, seine Zeit und seine
, 2 Bde. Pröhle, die Kriegsdichter des siebenjährigen Krieges und der Freiheitskriege. Wolfram: Sind
rlernung der deutschen Rechtschreibung besondere Regeln nöthig? Kletke, zur Beurtheilung und Würdigung
utschen Realschulwesens. Fischer, Kuno, Baco v. Verulam, die Realphilosophie und ihre Zeit. Hocker,
Dalton, Himalayan Journal, Reisetagebuch. Aus dem Englischen. v. Klöden, Handbuch der physischen
aphie. Mayr, Atlas der Alpenländer. Lübke, Geschichte der Architectur, 2. Aufl. Beck, Johann Friedrich
ittlere, Herzog zu Sachsen. Beitzke, Geschichte der deutschen Freiheitskriege in den Jahren 1813 u. 1814.
ß, David Friedrich, Ulrich von Hutten. Largiadèr, das axonometrische Zeichnen. Herr, Lehrbuch der
n Mathematik, 1. Band. Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, übersetzt von Schlömilch, 2 Bde.
zens mathematische Schriften, herausgegeben von Gerhardt. Steffensen, Anwendung der Algebra auf die
etrie. Marin, Elemente der Maschinenlehre. Schumann, chemisches Laboratorium. Aderholdt, Theorie des

Regenbogens. Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik. Schmidlin, Anleitung zum Botani[illegible] und zur Anlegung der Pflanzensammlungen. Giebel, Tagesfragen aus der Naturgeschichte.

An Geschenken erhielt die Lehrerbibliothek: Von der Hahn'schen Hofbuchhandlung zu Hannover: Sch[illegible] Arithmetik und Algebra, 3 Hefte. Wittstein, kurzer Abriß der Elementarmathematik. Leunis, analytischer Leitfa[illegible] für den ersten wissenschaftlichen Unterricht in der Naturgeschichte, 1. Heft, 2. Auflage.

Die Lehrerbibliothek zählt jetzt 2274 Werke in 5076 Bänden.

b. Schullesebibliothek.

Auch diese wurde aus den Beiträgen der Schüler angemessen vermehrt. Herr Dr. Schmidt-Weißenf[illegible] schenkte das von ihm verfaßte Werk: „Friedrich Gentz. Eine Biographie." 2 Bände.

c. Zeichenapparat.

Angeschafft wurden 17 Hefte der Berliner Zeichenschule von Hermes. Als Geschenk erhielt die Anstalt d[illegible] das Herzogliche Staatsministerium von dem Herzoglichen Sächsischen Consul zu Wien, Herrn Kaufmann Ros[illegible] berg ein „Werkzeuge-Album", eine Sammlung von colorirten Zeichnungen der verschiedenartigsten Werkzeuge i[illegible] prachtvollem Einbande.

d. Lehrmittel für den naturwissenschaftlichen Unterricht.

Für das chemische Laboratorium wurde angeschafft: Ein Satz Platingewichte, ein Apparat zu Maß-Anal[illegible] nach Mohr, ein Diamant-Mörser.

Der physikalische Apparat wurde vermehrt durch ein Durchschnittsmodell einer Dampfmaschine mit Con[illegible] sator, von Fessel in Cöln (45 Thlr.); einen Apparat, um den Widerstand der Luft zu zeigen (10 Thlr.); [illegible] Turbine nebst Wasserreservoir und Gummischlauch (37 Thlr.); einen Inductionsapparat nach Ruhmkorff (57 Th[illegible]) ein elektrisches Ei (6½ Thlr.); einen elektromagnetischen Zeigertelegraphen (20 Thlr.); ein Paar Adhäsionspl[illegible] (5 Thlr.).

Für den Unterricht in der Naturbeschreibung wurden Ochsenheimer's Schmetterlinge (11 Thlr.) und [illegible] Fortsetzung von Hayne's Termini botanici angeschafft.

Herr Kaufmann Heinrich Arnoldi hierselbst schenkte der Anstalt die dritte Lieferung des Obstcabi[illegible] in Porzellanmasse.

Die Sammlung von Schulbüchern für unbemittelte Schüler ist theils durch Geschenke, theils durch An[illegible] von 58 auf 89 Bände vermehrt. Herr Director Dr. Clemen in Cassel schenkte derselben drei Exemplare [illegible] Lesebuches für Bürgerschulen, Herr Gymnasiallehrer Kirsten das englische Lexicon von Kaltschmidt, der [illegible] tianer Breyding und der Quartaner Hoßfeld, sowie mehrere abgegangene Schüler einige noch brauch[illegible] Schulbücher. Neu angekauft wurde das Lehrbuch der französischen Sprache von Plötz, 1. und 2. Cu[illegible] Bretschneider's Leitfaden für den geographischen Unterricht und drei Exemplare des französischen Wörterb[illegible] von Thibaut.

Zum Schlusse spricht Referent noch allen Denjenigen, welche unsere Anstalt mit Geschenken bereicherten [illegible] unsere unbemittelten Schüler unterstützten, seinen wärmsten Dank aus.

Die öffentliche Prüfung

findet am 24. 25. und 26. März statt.

Ordnung der Prüfung.

Donnerstag, den 24. März, Vormittags 8 Uhr.

Prima und **Secunda.**

1. Geschichte. Prima und Secunda. Looff.
2. Chemie. Prima. Oberlehrer Dr. Eisenach.
3. Arithmetik. Secunda. Looff.
4. Englische Sprache. Prima und Secunda. Oberlehrer Dr. Sievers.
5. Physik. Secunda. Oberlehrer Dr. Eisenach.

Freitag, den 25. März, Vormittags 8 Uhr.

Tertia.

1. Geometrie. Professor Bretschneider.
2. Französische Sprache. Professor Schwob-Dollé.
3. Geographie. Professor Bretschneider.
4. Lateinische Sprache. Oberlehrer Dr. Sievers.

10 Uhr. **Quarta.**

1. Arithmetik. Looff.
2. Französische Sprache. Oberlehrer Cott.
3. Lateinische Sprache. Lehrer Kirsten.

Sonnabend, den 26. März, Vormittags 8 Uhr.

Quinta.

1. Religion. Lehrer Kirsten.
2. Deutsche Sprache. Lehrer Weingart.
3. Rechnen. Lehrer Benser.

10 Uhr. **Sexta.**

1. Religion. Lehrer Weingart.
2. Geographie. Oberlehrer Cott.
3. Lateinische Sprache. Lehrer Weingart.

An den drei Prüfungstagen, so wie am Vormittage des darauf folgenden Sonntages sind die Zeichnungen der Schüler in den Lehrzimmern der Tertia und Quarta ausgestellt.

Mittwoch, den 13. April, Vormittags 9 Uhr.

Redeactus.

Gesang und Gebet.

Gesang: Motette von Rink.

1. Der Storch von Luzern, von Usteri, vorgetragen vom Sextaner Kämmerer.
2. Die Gründung von Ohrdruf, von Bieber, vorgetragen vom Sextaner Buschmann II.
3. Frankfurt, von Kopisch, vorgetragen vom Sextaner Eduard Dietrich.
4. Die Entstehung der Erdbeere, von Rückert, vorgetragen vom Sextaner Roth II.
5. Die Wurmlinger Kapelle, von Lenau, vorgetragen vom Quintaner Müller.

6. Der racheburstige Indianer, von Bube, vorgetragen vom Quintaner Buschmann I.
7. Des Hagestolzen Geburtstag, vorgetragen vom Quintaner Kohlstock.
8. Die Ohrfeige, von Zimmermann, vorgetragen vom Quintaner Köllner.

Gesang: Harre des Herrn, von Malan.

1. Rudolf von Erlach, Ballade von Ißleib, vorgetragen vom Quartaner Amthor.
2. Les Adieux de Marie Stuart, von Béranger, vorgetragen vom Quartaner Döll.
3. The Pauper's Deathbed, von Mrs Southey, vorgetragen vom Quartaner v. Kessel.
4. Der Hirt von Oggersheim, von Langbein, vorgetragen vom Quartaner Eichel.

Gesang: Lied von v. Seckendorf.

1. Die Rache, von Lenau, vorgetragen vom Tertianer Zahn.
2. Les Yeux d'une mère, von Lemoine, vorgetragen vom Tertianer Knauer.
3. Die drei Indianer, von Lenau, vorgetragen vom Tertianer Schrödter.
4. Le Diamant, von Emile Deschamps, vorgetragen vom Tertianer König.
5. Incident of the French Camp, von Browning, vorgetragen vom Tertianer v. Rüxleben.
6. Der Nachtjäger, von Gustav Freytag, vorgetragen vom Secundaner Käftner.
7. Napoléon II., von Victor Hugo, vorgetragen vom Secundaner Würzler.
8. The death of Leonidas, von Croly, vorgetragen vom Secundaner Eberhard.

Gesang: Morgengesang von Rolle.

Rede des Primaners Hartleb: Sur les causes qui ont amené la Révolution française.

Rede des Primaners List: On the influence of Elizabeth on the greatness of England.

Hierauf wird der Primaner Voigt im Namen der abgehenden Schüler der Anstalt Lebewohl sagen u der Secundaner Bretschneider im Namen der zurückbleibenden Schüler antworten.

Zu dieser Prüfung, sowie zum Redeactus, ladet die hohen vorgesetzten Behörden, die Eltern und Pfle der Zöglinge, sowie die Gönner und Freunde der Anstalt ehrerbietigst ein

das Lehrercollegium.

Der Termin zur Prüfung und Aufnahme neuer Zöglinge wird durch die öffentlichen Blätter bek gemacht werden.

Looff.

Verzeichniß der Schüler

ach der Rangordnung von Weihnachten 1858, mit Angabe des Geburtsortes.

Prima.

1. Vogt aus Blankenhain bei Weimar.
2. Hartleb aus Suhl.
3. List aus Lauterbach in Oberhessen.
4. Bonde aus Gräfenhain bei Ohrdruf.

Abgegangen im Laufe des Schuljahrs:

Fr. Wolff aus Heßwinkel.
). Wurmb aus Großenfurra im Schwarzburgischen.
Seyfarth aus Gotha.

Secunda.

1. Bretschneider aus Gotha.
2. Eberhard aus Gotha.
3. Kästner aus Zella.
4. Würzler aus Bernburg.
5. Habenicht aus Gotha.
6. W. Wolff aus Gotha.

Abgegangen:

. Brüsselle aus Dotis in Ungarn.
Bangemeister aus Hallungen.
Gutknecht aus Nienburg im Anhaltischen.
Beck aus Crawinkel.

Tertia.

R. Henneberg aus Gotha.
H. Blödner I. aus Gotha.
Beckh aus Luckau.
l. König aus Gotha.
Breyding aus Eisenach.
Fichel aus Schmalkalden.
Knauer aus Ichtershausen.
Stäps aus Weimar.
l. Schack aus Gotha.
Müller aus Weimar.
Bahn aus Cassel.
Thon aus Cornberg bei Bebra in Kurhessen.
R. Kohlstock aus Gotha.
l. Amthor aus Gotha.
E. Kühn aus Gotha.
Schrödter aus Georgenthal.
. Rüxleben aus Grüningen bei Greußen.
B. Friede aus Gotha.
lverdes aus Uhrleben.
Schmeißer aus Wewau bei Weißenfels.

21. A. Zeyß aus Gotha.
22. Creutzburg aus Coburg.
23. Glaser aus Steinbach.

Abgegangen:

Henschel aus Gotha.
W. Zeyß aus Gotha.

Quarta.

1. A. Amthor aus Gotha.
2. R. Looff I. aus Gotha.
3. Heym aus Struth bei Zella.
4. O. Döll aus Gotha.
5. Fr. Alverdes aus Uhrleben.
6. O. Friede aus Gotha.
7. A. Pozzi II. aus Triest.
8. J. Blödner I. aus Gotha.
9. B. Kühn aus Gotha.
10. Hornschuch aus Groß-Tabarz.
11. Barthelmes aus Gotha.
12. Krug aus Bremen.
13. O. Rocke aus Gotha.
14. Schröder aus Gotha.
15. H. Looff II. aus Gotha.
16. L. Fries aus Heidelberg.
17. Pozzi I. aus Triest.
18. Anschütz aus Mehlis.
19. v. Kessel aus Gotha.
20. O. Zeyß aus Gotha.
21. Hoßfeld aus Leipzig.
22. Reer aus Coburg.
23. Blödner II. aus Gotha.
24. Zschiegner aus Gotha.
25. Eichel aus Gotha.
26. Schweitzer aus Remda im Weimarischen.
27. Merkel aus Schmalkalden.
28. Catterfeld aus Mehlis.

Abgegangen:

A. Pechstein I. aus Halle.
Fr. Pechstein II. aus Halle.
A. Mälzer aus Gotha.
Schönichen aus Bernburg.
Zink aus Herbsleben.
Burckhard aus Langensalza.

E. Gutknecht aus Nienburg im Anhaltischen.
v. Wangenheim aus Gotha.
Weißenborn aus Westhausen.
v. Ponte-Reno aus Wien.
v. Netterodt aus Lupnitz bei Eisenach.

Quinta.

1. Michel aus Heßwinkel.
2. Buschmann aus Ohrdruf.
3. W. Döll aus Gotha.
4. Grünbaum aus Gotha.
5. L. Burbach I. aus Hörselgau.
6. W. Burbach II. aus Uelleben.
7. E. Mälzer aus Gotha.
8. Eckardt aus Gotha.
9. E. Zeyß aus Gotha.
10. F. Dietrich aus Coburg.
11. W. Backhaus aus Burgtonna.
12. Müller aus Coburg.
13. Keilig aus Rodewisch bei Auerbach im Voigtlande.
14. Kühnau aus Magdeburg.
15. A. Beutler II. aus Gotha.
16. O. Fries aus Heidelberg.
17. Eichenberg aus Gotha.
18. Thilo aus Gotha.
19. Schmiedel aus Aschara.
20. F. Kohlstock aus Gotha.
21. König aus Gotha.
22. Reinhard aus Gotha.
23. Metzeroth aus Gotha.
24. Auerbach aus Gotha.
25. Dünkel aus Hochheim.
26. C. Beutler I. aus Gotha.
27. Kestner aus Waltershausen.
28. R. Schack aus Gotha.
29. Vockerodt aus Brüheim.
30. Rauch aus Gotha.
31. Blödner aus Gotha.
32. Köllner aus Gotha.
33. Roth aus Winterstein.
34. Hellfarth aus Gotha.
35. Berthel aus Gotha.

Abgegangen:

Neltzen aus Gotha.

Sexta.

1. Stößel aus Gotha.
2. Kämmerer aus Livorno.
3. Kraft aus Bufleben.
4. O. Mälzer aus Gotha.
5. Hellmund aus Gotha.
6. E. Dietrich I. aus Coburg.
7. Buschmann aus Ohrdruf.
8. Mey aus Gotha.
9. Hänert aus Grumbach bei Langensalza.
10. Hartmann aus Großenbehringen.
11. E. Bornhardt I. aus Winterstein.
12. Wiegk aus Gotha.
13. Köhler aus Gotha.
14. H. Beutler II. aus Gotha.
15. Gräser aus Gotha.
16. E. Bornhardt II. aus Winterstein.
17. O. Backhaus aus Burgtonna.
18. Bieber aus Gotha.
19. C. Roth II. aus Winterstein.
20. Barthelmes aus Zella.
21. G. Dietrich II. aus Coburg.
22. O. Henneberg aus Gotha.
23. J. Beutler I. aus Gotha.
24. R. Krug aus Bremen.
25. Wilk aus Eckartsleben.
26. Bätz aus Gotha.
27. Boch aus Gotha.
28. E. Roth I. aus Arnstadt.
29. Bonde aus Gotha.
30. Th. Rocke aus Gotha.
31. V. Schmidt I. aus Wandersleben.
32. O. Beutler III. aus Gotha.
33. R. Schmidt II. aus Wandersleben.

VÝROČNÍ ZPRÁVA

(OSMÁ)

C. K. GYMNASIU REALNÉM

V TŘEBONI.

KONCEM ROKU ŠKOLNÍHO

1880

Podává ředitel

NORBERT HAJNOVSKÝ.

Tiskl Jan Nedvídek v Táboře. — Nákladem ústavu.

OBSAH.

I.

·ivce vyjádřené v pravouhlých souřadnicích rovnicí:

$$16\,(y^4-2ay^3-2a^2\,y^2)+(x^2-4a^2)^2=0\ ^*).$$

ıítání délky oblouku kličky křivky pod osou souřadnic integrací přibližnou **)

ıčí-li s délku jmenovanou, jest

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ıažuje-li se y za neodvisle proměnnou

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

pak případě

$$s=\int_{a\,(1-\sqrt{3})}^{0}f_1\,(y)\,dy+\int_{a\,(1-\sqrt{3})}^{0}f_2\,(y)\,dy,\ \text{kdež}$$

$$_{;2}\,(y)=\sqrt{1-\frac{(2y^2-3ay-2a^2)^2}{(a^2\pm y\sqrt{2a^2+2ay-y^2})\,(y^2-2ay-2a^2)}}$$

ıněni-li se meze integrační jest

$$s=-\int_{0}^{a\,(1-\sqrt{3})}f_1\,(y)\,dy-\int_{0}^{a\,(1-\sqrt{3})}f_2\,(y)\,dy,$$

e dále $y=a\,(1-\sqrt{3})\,z;\ dy=a\,(1-\sqrt{3})\,dz$ meze pak

*) okončení článku z programu zdejšího na rok 1878.
**))braz 1. na udaném místě.

y	z
o	o
$a(1-\sqrt{3})$	1

$$\text{bude } s = a(\sqrt{3}-1)\left\{\int_0^1 \varphi_1(z)\,dz + \int_0^1 \varphi_2(z)\,dz\right\}$$

Značí-li se

$$Z_1 = 4(2-\sqrt{3})z^2 - 3(1-\sqrt{3})z - 2 = 1{\cdot}0717968\,z^2 + 2{\cdot}196152$$
$$Z_2 = 1 + (1-\sqrt{3})\,z - (2-\sqrt{3})\,z^2 = 1 - 0{\cdot}7320508\,z - 0{\cdot}267$$

jest:

$$\varphi_{1,\,2}(z) = \sqrt{1 + \frac{Z_1^2}{2(1 \mp 0{\cdot}7320508\,z\sqrt{2\,Z_2})\,Z_2}}$$

K přibližnému určení integrálů

$$\int_0^1 \varphi_1(z)\,dz \quad \text{a} \quad \int_0^1 \varphi_2(z)\,dz$$

volíme methodu Gaussovu, dle níž

$$\int_0^1 \varphi_1(z)\,dz = \text{přibližně} \sum_{k=0}^{n} A_k\,\varphi_1(z_k)$$
$$\int_0^1 \varphi_2(z)\,dz = \text{přibližně} \sum_{k=0}^{n} A_k\,\varphi_2(z_k)$$

volíce dle ní pro $n = 4$

$$z_0 = 0{\cdot}0469\;1008,\; z_1 = 0{\cdot}2307\;6534,\; z_2 = 0{\cdot}5,$$
$$z_3 = 0{\cdot}7692\;3466,\; z_4 = 0{\cdot}9530\;8992 \text{ a}$$
$$A_0 = A_4 = 0{\cdot}118\;4634,\; A_1 = A_3 = 0{\cdot}239\;3143,\; A_2 = 0{\cdot}28$$

Vypočtěním se najde:

$$\varphi_1(z_0) = 1{\cdot}718\;408 \qquad A_0\,\varphi_1(z_0) = 0{\cdot}203\;568$$
$$\varphi_1(z_1) = 1{\cdot}615\;607 \qquad A_1\,\varphi_1(z_1) = 0{\cdot}386\;639$$
$$\varphi_1(z_2) = 1{\cdot}228\;065 \qquad A_2\,\varphi_1(z_2) = 0{\cdot}349\;316$$
$$\varphi_1(z_3) = 1{\cdot}146\;092 \qquad A_3\,\varphi_1(z_3) = 0{\cdot}274\;270$$
$$\varphi_1(z_4) = 3{\cdot}701\;669 \qquad A_4\,\varphi_1(z_4) = 0{\cdot}438\;512$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_1 (z_k) = 1{\cdot}652\ 305$$

$$\text{proto} \int_0^1 \varphi_1 (z)\, dz = \text{přibližně } 1{\cdot}652\ 305$$

[Po]dobně se nalezne:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 (z_0) &= 1{\cdot}665\ 858 & A_0 \varphi_2 (z_0) &= 0{\cdot}197\ 343\\
\varphi_2 (z_1) &= 1{\cdot}427\ 702 & A_1 \varphi_2 (z_1) &= 0{\cdot}341\ 669\\
\varphi_2 (z_2) &= 1{\cdot}120\ 213 & A_2 \varphi_2 (z_2) &= 0{\cdot}318\ 638\\
\varphi_2 (z_3) &= 1{\cdot}065\ 019 & A_3 \varphi_2 (z_3) &= 0{\cdot}254\ 881\\
\varphi_2 (z_4) &= 2{\cdot}965\ 542 & A_4 \varphi_2 (z_4) &= 0{\cdot}351\ 308
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_2 (z_k) = 1{\cdot}463\ 839$$

$$\text{proto} \int_0^1 \varphi_2 (z)\, dz = \text{přibližně } 1{\cdot}463\ 839.$$

[Dé]lka oblouku kličky udané jest

$$s = a \times 0{\cdot}732\ 0508\ [1{\cdot}652\ 305 + 1{\cdot}463\ 839]$$
$$s = 2{\cdot}281\ 075\ a$$

Plocha kličky křivky.

[Po]važujíce opět y za neodvisle proměnnou, máme pro plochu vůbec výraz

$$P = \int x\, dy.$$

[P]ovička celé plochy křivky jeví se po udání mezí ve vzorci:

$$P = \int_{a(1-\sqrt{3})}^{a(1+\sqrt{3})} x_1\, dy - \int_{a(1-\sqrt{3})}^{0{\cdot}59389\,a} x_2\, dy - \int_{2{\cdot}6917\,a}^{a(1+\sqrt{3})} x_2\, dy$$

$$\text{kdež } x_{1,2} = 2 \sqrt{a^2 \pm y \sqrt{2a^2 + 2ay - y^2}} \qquad 1.)$$

[Plo]cha jedné z kliček vyjádřena jest ve vzorci:

$$p = \int\limits_{a(1-\sqrt{3})}^{0} (x_1 - x_2)\, dy \qquad 2.)$$

$\int x_1\, dy$ dá se přeměniti substitucí

$$\sqrt{2a^2 + 2ay - y^2} = a\, \frac{z^2\sqrt{2} + 2z - \sqrt{2}}{1 + z^2}$$

v integrál:

$$2a^2 \int \sqrt{z^4 + 4z^3 + (2 + 6\sqrt{2})\, z^2 + (1 - 2\sqrt{2})} \;\frac{\sqrt{2} - 2z - z^2 \sqrt{}}{(1 + z^2)^3}$$

podobný výraz plyne i pro $\int x_2\, dy$.

Integrály tyto nedají se zakončeným tvarem vyjádřiti a vedou funkcím transcendentním. Přibližně lze integrál 2.) integrovati pr odmocniny v 1.) dle binomické poučky.

Zavedeme nejdříve do 2.) novou proměnnou

$$y = -az,\; dy = -adz$$

meze

y	z
0	0
$a(\sqrt{3} - 1)$	$\sqrt{3} - 1$

tím se promění výraz pro plochu

$$p = 2a^2 \int\limits_0^{\sqrt{3}-1} \left(\sqrt{1 - z\sqrt{2} - 2z - z^2} - \sqrt{1 + z\sqrt{2} - 2z - z^2}\right.$$

Provedeme-li odmocniny dle poučky binomické, zkrátíme a při t zůstaneme, máme:

$$p = -2a^2 \int^{\sqrt{3}-1} \left(z\sqrt{Z} + \tfrac{1}{8} z^3 Z\sqrt{Z} + \tfrac{7}{128} z^5\, Z^2 \sqrt{Z}\right)$$

aneb

$$p = -2a^2 \left\{ \int\limits_0^{\sqrt{3}-1} z\sqrt{Z}\, dz + \frac{1}{8} \int\limits_0^{\sqrt{3}-1} z^3 Z\sqrt{Z}\, dz + \frac{7}{128} \int\limits_0^{\sqrt{3}-1} z^2\, Z_2 \sqrt{Z}\, d\right.$$

kdežto $$Z = 2 - 2z - z^2$$

Nastává úloha řešiti nejprve neomezené integrály tvaru

$$\int z^n \, Z^p \sqrt{Z} \, dz.$$

šíce je dle redukčního vzorce

$$\int z^n Z^p \sqrt{Z\,dz} = -\frac{z^{n-1}\,Z^{p+1}\sqrt{Z}}{2p+n+2} - \frac{2p+2n+1}{2p+n+2}\int z^{n-1}\,Z^p \sqrt{Z\,dz}.$$

$$+\frac{2(n-1)}{2p+n+2}\int z^{n-2}\,Z^p\sqrt{Z}\,dz\ ^{*)}$$

me k integrálům tvaru $\int Z^p \sqrt{Z}\,dz$, k jejichž řešení vede redukční

$$\int Z^p\sqrt{Z}\,dz = \frac{(1+z)\,Z^p\sqrt{Z}}{2(p+1)} + \frac{3(2p+1)}{2(p+1)}\int Z^{p-1}\sqrt{Z}\,dz.$$

kračujíce dle vzorce toho, přicházíme k integrálu

$$\int \sqrt{Z}\,dz = \frac{1+z}{2}\sqrt{Z} + \tfrac{3}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

ně

$$\int\frac{dz}{\sqrt{Z}} = -2\,arctg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}\ ^{**)}$$

stli tedy integrály ve výrazu 3.) dle udaných vzorců redukčních ře-
lezneme:

$$\int z^5 Z\sqrt{Z}\,dz = -Z^3\sqrt{Z}\left[\frac{1}{11}z^4 - \frac{3}{22}z^3 + \frac{5}{18}z^2 - \frac{767}{1584}z + \frac{8663}{11088}\right]$$

$$-(1+z)\sqrt{Z}\left[\frac{103}{96}Z^2 + \frac{515}{128}Z + \frac{4635}{256}\right]$$

$$+\frac{13905}{128}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}.$$

$$\int z^3 Z\sqrt{Z}\,dz = -Z^2\sqrt{Z}\left[\frac{1}{7}z^2 - \frac{3}{14}z + \frac{29}{70}\right]$$

$$-(1+z)\sqrt{Z}\left[\frac{5}{8}Z + \frac{315}{112}\right]$$

$$+\frac{945}{56}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}$$

*) Herr, Lehrbuch der höh. Mathematik II. str. 240. a 241.

**) Tamtéž str. 237.

$$\int z\sqrt{Z}\,dz = -\frac{Z\sqrt{Z}}{3} - \frac{1+z}{2}\sqrt{Z} + 3\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}$$

Proto

$$p = 2a^2 \int_{0}^{\sqrt{3}-1} \left\{ \frac{Z\sqrt{Z}}{3} + \frac{1+z}{2}\sqrt{Z} - 3\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z} \right.$$

$$+ \frac{a^2}{4} \int_{0}^{\sqrt{3}-1} \left\{ Z^2\sqrt{Z}\left[\frac{1}{7}z^2 - \frac{3}{14}z + \frac{29}{70}\right] + (1+z)\sqrt{Z}\left[\frac{5}{8}z \ldots \right.\right.$$

$$\left. - \frac{135}{8}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}\right\} + \frac{7a^2}{64} \int_{0}^{\sqrt{3}-1} \left\{ Z^3\sqrt{Z}\left[\frac{1}{11}z^4 - \frac{3}{2}z \ldots \right.\right.$$

$$\left. + \frac{5}{18}z^2 - \frac{767}{1584}z + \frac{8663}{11088}\right] + (1+z)\sqrt{Z}\left[\frac{103}{96}Z^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \left. + \frac{4635}{256}\right] - \frac{13905}{128}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{Z}}{z}\right\}$$

Poněvadž $\sqrt{3}-1$ jest kořenem rovnice $Z = o$, zmizí při do… mezí všecky členy mající za činitele Z pro hořejší mez, pro dolení m… pak všecky členy mající za činitele z.

Vedle toho jest $\int^{z=o} Z = 2.$

Proto jest přibližný výraz pro plochu kličky

$$p = a^2\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(6 + \frac{135}{32} + \frac{97335}{8192}\right.$$

$$- a^2\sqrt{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{32445}{16384} + \frac{5}{16} + \frac{29}{70} + \frac{45}{64} + \frac{721}{1536}\right.$$

$$\left. + \frac{7210}{8192} + \frac{60641}{88704}\right).$$

bsah tělesa povstalého otočením křivky kolem osy pořadnic.

určení obsahu toho užijeme výrazu

$$V = \pi \int x^2 \, dy$$

e pak ohled k náležitým mezím, takže

$$V = \pi \int_{a(1-\sqrt{3})}^{0\cdot59389\,a} (x_1{}^2 - x_0{}^2)\, dy + \pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} x_1{}^2 \, dy + \pi \int_{2\cdot6917\,a}^{a(1+\sqrt{3})} (x_1{}^2 - x_0{}^2)\, dy$$

x_1 a x_2 mají týž význam jako ve výrazu 1. a obsah tělesa jmenova- dosazení hodnot dán jest vzorcem

$$8\pi \int_{a(1-\sqrt{3})}^{0\cdot59389\,a} y \sqrt{2a_2 + 2ay - y^2}\, dy + 4\pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} (a^2 + y \sqrt{2a^2 + 2ay - y^2}\, dy$$

$$+ 8\pi \int_{2\cdot6917\,a}^{a(1-\sqrt{3})} y \sqrt{2a^2 + 2ay - y^2}\, dy$$

šeme-li

$$2a^2 + 2ay - y^2 = Y$$

řední integrál rozvedeme

$$V = 8\pi \int_{a(1-\sqrt{3})}^{0\cdot59389\,a} y \sqrt{Y} dy + 4\pi a^2 \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} dy + 4\pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} y \sqrt{Y} dy$$

$$+ 8\pi \int_{2\cdot6917\,a}^{a(1+\sqrt{3})} y \sqrt{Y}\, dy$$

třetí integrál můžeme psáti

$$4\pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} y \sqrt{Y} dy = 8\pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} y \sqrt{Y} dy - 4\pi \int_{0\cdot59389\,a}^{2\cdot6917\,a} y \sqrt{Y} dy$$

můžeme shrnouti následovní integrály v jeden

$$8\pi\int\limits_{a(1-\sqrt{3})}^{0{\cdot}59389\,a} y\sqrt{Y}\,dy + 8\pi\int\limits_{0{\cdot}59389\,a}^{2{\cdot}6917\,a} y\sqrt{Y}\,dy + 8\pi\int\limits_{2{\cdot}6917\,a}^{a(1+\sqrt{3})} y\sqrt{Y}\,dy =$$

$$8\pi\int\limits_{a(1-\sqrt{3})}^{a(1+\sqrt{3})} y\sqrt{Y}\,dy$$

takže pak

$$V = 8\pi\int\limits_{a(1-\sqrt{3})}^{a(1+\sqrt{3})} y\sqrt{Y}\,dy + 4\pi a^2\int\limits_{0{\cdot}59389\,a}^{2{\cdot}6917\,a} dy - 4\pi\int\limits_{0{\cdot}59389\,a}^{2{\cdot}6917\,a} y\sqrt{Y}\,dy$$

Celá úloha tudíž spočívá v řešení neomezeného integrálu

$$\int y\sqrt{Y}\,dy$$

Dle redukčních vzorců

$$\int y\sqrt{Y}\,dy = -\frac{Y\sqrt{Y}}{3} + a\int\sqrt{Y}\,dy$$

$$\int\sqrt{Y}\,dy = \frac{(y-a)\sqrt{Y}}{2} + \frac{3a^2}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = arc\ sin\,\frac{y-a}{a\sqrt{3}}$$

jest

$$\int y\sqrt{Y}\,dy = -\frac{Y\sqrt{Y}}{3} + a\,\frac{y-a}{2}\sqrt{Y} + \frac{3a^3}{2}\,arc\ sin\,\frac{y-a}{a\sqrt{3}}$$

Provedeme-li pak ještě jednoduchý integrál $\int dy = y$ a dosadím[e] výrazu pro V, máme obsah tělesa rotačního:

$$V = 8\pi\Bigg/_{a(1-\sqrt{3})}^{a(1+\sqrt{3})}\left(-\frac{Y\sqrt{Y}}{3} + a\,\frac{y-a}{2}\sqrt{Y} + \frac{3a^3}{2}\,arc\,sin\,\frac{y-a}{a\sqrt{3}}\right)$$

$$+\,4\pi a^2\Bigg/_{0{\cdot}59389\,a}^{2{\cdot}6917\,a} y - 4\pi\Bigg/_{0{\cdot}59389\,a}^{2{\cdot}6917\,a}\left(-\frac{Y\sqrt{Y}}{3} + a\,\frac{y-a}{2}\sqrt{Y} + \frac{3a^3}{2}\,arc\ sin\,\frac{y-a}{a\sqrt{3}}\right.$$

i dosazení mezí se výraz zjednoduší, neboť

$$\ldots = o, \quad \Big/_{\ldots}^{a(1+\sqrt{3})} Y = o, \text{ poněvadž } a(1 \mp \sqrt{3}) \text{ jsou kořeny rovnice } V = o$$

$$\Big/^{a\,(1-\sqrt{3})} arc\sin \frac{y-a}{a\sqrt{3}} = arc\sin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Big/^{a\,(1+\sqrt{3})} arc\sin \frac{y-a}{a\sqrt{3}} = arc\sin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Big/^{2\cdot6917\,a} Y = 0\cdot138151\, a^2, \qquad \Big/^{0\cdot59389\,a} Y = 2\cdot835077\, a^2$$

$$\Big/^{2\cdot6917\,a} arc\sin \frac{y-a}{a\sqrt{3}} = arc\sin \frac{1\cdot6917}{\sqrt{3}}$$

$$\Big/^{0\cdot59389\,a} arc\sin \frac{y-a}{a\sqrt{3}} = -arc\sin \frac{0\cdot40611}{\sqrt{3}}$$

oto

$$\frac{6\,a^3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 4\,\pi\, a^3 .\, 2\cdot09781 - 4\,\pi\, a^3 (-0\cdot017116 + 0\cdot314390$$

$$1148 + 0\cdot341885) - \frac{3.4\,\pi\, a^3}{2} \left(arc\sin \frac{1\cdot6917}{\sqrt{3}} + arc\sin \frac{0\cdot40611}{\sqrt{3}}\right)$$

nečně užijeme ještě vzorce

$$arc\sin a + arc\sin b = arc\sin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$$

$$arc\sin \frac{1\cdot6917}{3} + arc\sin \frac{0\cdot40611}{\sqrt{3}} =$$

$$arc\sin \frac{1\cdot6917\,\sqrt{3-0\cdot40611^2} + 0\cdot40611 .\, \sqrt{3-1\cdot6917^2}}{3} =$$

$$arc\,sin\,\frac{2{\cdot}999173}{3} = arc\,sin\,0{\cdot}999727$$

Poněvadž 0·999727 = skoro 1, jest

$$arc\,sin\,1 = \frac{\pi}{2}$$

Plocha tělesa rotačního

$$V = 8\,\pi\,\frac{6a^3}{2}\,.\,\frac{\pi}{2} - 4\,\pi\,a^3.\,0{\cdot}132497 - \frac{3.\,4\,\pi\,a^3}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

aneb

$$V = \pi\,a^3\,(9\,\pi - 0{\cdot}529988).$$

II.

Zprávy školní.

Sestavil ředitel s přispěním učitelského sboru.

A. Sbor professorský ve školním roce 1880.

a) Pro předměty povinné a jazyk německý.

et Hajnovský, c. k. gymnas. ředitel, předseda spolku ku podporování dobrých ch lých studujících, správce sbírky pro zeměpis a dějepis, učil zeměpisu a dějepisu ve třídách I. III. a IV., týdně 9 hodin.

l Brož, c. k. skutečný učitel gymn., jednatel spolku ku podporování dobrých chu- dyn studujících, správce fysik. a chemick. kabinetu, učil zeměpisu a dějepisu ve tř. I., počtářství, fysice a chemii ve tř. III. a IV., krasopisu v tř. I. a II., týdně 18 hod.

tiek Čapek, c. k. skutečný učitel gymnas., správce knihovny professorské i žá- ské, ordinarius tř. I., učil jazykům českému ve tř. I. a latinskému ve tř. I. a IV., ýdně 16 hodin.

nHulakovský, c. k. professor a exhortator gymnas., ordinar. IV. tř., vyučoval nábož̌enství ve tř. I.-IV., jazyku českému ve tř. IV. a jaz. francouzskému ve tř. III. a IV., týdně 17 hodin.

f Kasparides, c. k. skutečný učitel gymnas., správce kreslírny a rýsovny, učil kr lení a rýsování ve tř. I.-IV. a krasopisu ve tř. III., týdně 23 hodin.

a Marek, c. k. suppl. učitel gymnas., ordinarius tř. II., vyučoval jaz. českému, ni eckému a latinskému ve tř. II. a jaz. řeckému ve tř. IV., týdně 17 hodin.

e tyčan, c. k. professor gymnas., ordinarius tř. III., učil jazykům českému, ně- m kému, latinskému a řeckému ve tř. III., týdně 15 hodin.

nVařečka, c. k. professor gymnas., správce kabinetu přírodnického, učil příro- d isu a počtářství ve tř. I. a II. a jaz. německému ve tř. I. a IV., týdně 19 hodin.

b) Pro předměty nepovinné kromě němčiny.

el Brož, c. k. skutečný učitel gymnas., učil tělocviku týdně 4 hod.; mimo to cvi- č il ve hraní na housle 1 hod. týdně z pouhé ochoty.

el Krb, ředitel obecných škol chlapeckých, učil zpěvu týdně 3 hodiny. Týž z pouhé o oty hrával při službách Božích na varhany.

B. Učebný plán.

a) Předměty povinné a jazyk německý.

I. třída.

Třídní professor: **Frant. Čapek.**

Náboženství. Stručný přehled katolické věro- a mravouky.

Latina. Tvarosloví pravidelné. Při tvarosloví jmenném význam a vazba ob předložek; při tvarosloví slovesném užívání infinitivu po některých zvlášť d slovesech a adjektivných výrazech výrokových, a konjunktivu po některých příčinných, účelných, následných a podmínečných. Cvičení v obapolném př Učení se slovům latinským a stručným, příhodným větám z paměti. Pozdě týden školní a každých 14 dní domácí úloha.

Čeština. Tvarosloví, nauka o větě jednoduché, čtení s výkladem mluvnickým a vypravování povídek a krátkých popisů čtených, učení se na paměť menším Každých 14 dní písemní práce, střídavě domácí neb školní.

Zeměpis. Počátky zeměpisu mathematického, pokud ho třeba k porozumění ma povrchu zemského, hledíc k přirozené povaze a k obecnému rozdělení dle a státův.

Arithmetika. Dekadická soustava čísel; čtvero druhů početních s čísly bezej i jmenovanými; dělitelnost; nejmenší společná míra, nejmenší společný zlomky obyčejné i desetinné; poměry a proporce.

Přírodopis. Zoologie. Živočišstvo počínajíc tvary nejdokonalejšími postupn nižším se zvláštním zřetelem k ssavcům.

Měřictví a rýsování. Základní tvary měřické, jich vyvozování, zobrazován statné jejich vlastnosti. Ornament geometrický. Spadající sem cvičení v kre ruky) dle nákresův na tabuli, k nimž použito hlavně prvých 40 předložek An Vysvětlení hlavních útvarů prostorových na modelech drátěných co příprava slení perspektivné.

Krasopis. České a německé písmo ve všech tvarech.

II. třída.

Třídní professor: **Václav Marek.**

Náboženství. Bohoslužebné obřady církve katolické.

Latina. Opakování a doplňování pravidelného tvarosloví s přibíráním všeho toho náměstkách, číslovkách, přídavných jménech a příslovkách v I. tř. se nevzalo videlné sklánění, výjimky rodu, nepravidelné časování; opakování a rozší kladních pravidel skladby, imperativ, gerundium a gerundivum, supina a p Učivo vštěpováno ve škole ústními a písemními překlady, doma pak přípravo ním se na paměť významům a větám jako v I. tř. Vždy za týden jedna ško 14 dní jedna domácí úloha.

Čeština. Opakování a doplňování veškerého tvarosloví s vytýkáním značnějších řeči spisovné a mluvy obecné; věta rozvinutá; čtení, výklad a přednášení vy článků jako v I. třídě. Každých 14 dní práce písemní.

Země- a dějepis. Zeměpis Asie, Afriky, jižní a západní Europy. — Dě rého věku.

Arithmetika. Počet trojčlenný, jednoduchý a složený; počet řetězový, dis lhůtný, podílný a průměrný.

Přírodopis. 1. běh: Mineralogie. Soustavný popis nejdůležitějších druhů ne vzhledem k jich praktickému upotřebení.

2. běh: Botanika. Popis domácích a nejdůležitějších cizích rostlin, spojený s vý-
y na živých neb sušených rostlinách, dle doby jich květu.
í a rýsování. Shodnosť trojúhelníků; čtyř- a mnohoúhelníky; kružnice. Po-
í ploch obrazců přímočárných a kruhů. Počátky měřického rýsování; řešení
nějších konstruktivních úloh.
í. Názorné vysvětlení základních pouček perspektivy; použití jich ku kreslení
i rovinných i prostorových dle modelů drátěných. Symmetrie, proporce a rhytmus
i ornamentálních. Stylisované tvary rostlinné. Plochý ornament v obrysech.
is. Písmo české.

III. třída.

Třídní professor: **Ignác Ryčan.**

Předměty společné:

aství. Dějepis zjevení Božího v starém Zákoně.
Týdně 3 hodiny probírána nauka o pádech s praktickým cvičením a 3 hodiny
ítány Kornelia Nepota životopisy výtečných vojevůdcův se stálým opakováním
plňováním tvarosloví a průpravných pravidel skladebních. V 1. půlletí týdně do-
a každých 14 dní školní práce, v 2. měsíčně 2 školní a 2 domácí úlohy.
Skladba a tvoření slov; čtení a výklad vybraných článků a deklamování pří-
ých básní. Každých 14 dní domácí aneb školní práce písemní.
dějepis. Podrobný popis severní, východní a střední Europy (mimo Ra-
ko-uherské mocnářství) i Ameriky a Australie. — Přehledný dějepis středověku
emž přihlíženo zvlášť k dějinám českým a rakouským.
etika. Čtyři druhy početní s čísly obecnými; základní pojmy mocnin a počí-
v nich. Dvoj- i trojmocnění čísel obecných a desítkových. Odmocňování dru-
a třetího stupně; zkrácené násobení, dělení a odmocňování.
Všeobecné vlastnosti hmot; skupenství, teplo; nejdůležitější část statiky a dyna-
těl pevných, tekutých a plynných.
í a rýsování. Podobnosť obrazců. Tělesoměrství, povrchy a obsahy těles.
ačování v konstruktivním rýsování.
í. Pokračování v kreslení ornamentu plochého dle mono- a polychromických
ložek Andělových; původ a význam forem ornamentálních. O slohu v ornamentice.
z nauky o barvách; použití barev v ornamentice. — Perspektivné kreslení dle
elů dřevěných. Stínování. Základy formy architektonické.

Předmět pouze gymnasijní.

i. Pravidelné tvarosloví jmen a sloves na — ω; ústní a později i písemné pře-
y příslušných partií. Každých čtrnáct dní domácí a každý měsíc školní práce
ní.

Předměty pouze realní.

rancouzský. Pravidla o výslovnosti, přízvuku a čtení; tvarosloví jmen a
s pravidelných; hlavní pravidla skladebná o členu, jméně podstatném a pří-
ém a o zájmeně. Učení se na paměť slovům a řečením a převádění z jedné
do druhé.
Za 14 dní písemní úloha domácí, měsíčně školní.
is. Písmo francouzské a italské.

IV. třída.

Třídní professor: P. **Jan Hulakovský.**

Předměty společné.

aství. Dějepis zjevení Božího v novém Zákoně.
Mluvnice: Krátké opakování nauky o pádech, nauka o užívání časů a spůsobů.

Čtení: Caesaris Com. de bello gallico; v 2. pololetí něco z básní O
Aby žáci latinské básníky čísti mohli, opakována vyložená jim již při tvaro
vidla latinské prosodie a vzaty počátky metriky, obzvláště hexametr a
Doma příprava a učení se na paměť jako v III. třídě. Každý týden dom
dní školní úloha.

Čeština. Opakování celé mluvnice: spůsoby slohu prosaického, hlavní pravi
pech, prosodii a metrice; nauka o slohu listovním a jednacím. Čtení s výkl
klamace. Za 14 dní písemní úloha buď domácí, buď školní, hlavně: popi
dopisy a nejdůležitější v obecném životě listiny.

Země- a dějepis. Dějepis nového věku. Popis mocnářství Rakousko-Uhers

Arithmetika. Cvičení se v počtech v II. III. tř. probraných; rovnice první
počet směšovací, avšak jen s dvěma druhy hmot; přestavy a sestavy.

Fysika. 1. pololetí. Akustika, optika, magnetičnost a elektřina. 2. polou
o chemickém rozdílu látek, slučivosti, rovnomocninách, váhách atomový
nostech; stručný přehled o nekovech, kovech lehkých, těžkých a drahých,
čeninách a nalezišti; přehled lučby organické: o uhlohydrátech, samovolném
tlení, kvašení a hnití; postup při hoření a dýchání s vyloučením všeho
bádání.

Měřictví a rýsování. Theoreticko-konstruktivní cvičení v rýsování hlavní
v rovině. Sestrojování algebraických výrazů.

Kreslení. Nejdůležitější formy slohův klassických: polychromické provedení
řeckých. — Pokračování v perspektivném kreslení dle složitějších modelů
a jich skupin. — Ornament vypouklý.

Předmět pouze gymnasijní.

Řečtina. Dokončení a opakování pravidelného tvarosloví; slovesa na $\mu\iota$; nej
tvary nepravidelné s praktickým cvičením. Hlavní pravidla řecké skladby
latinské se uchyluje. Příprava, písemní práce domácí i školní jako v tř. I

Předmět pouze realní.

Jazyk francouzský. Opakování pravidelných tvarů, k tomu nepravideln
užívané tvary; všecka nepravidelná slovesa; pravidla skladebná. Čtení a p
cvičení se zvláštním zřetelem ku gallicismům a důležitým synonymům. U
paměť nejobyčejnějším spůsobům konversačním, krátkým bájkám, snadný
a pokusy v ústním jich přednášení.

b) Předměty nepovinné.

1. Jazyk německý.

Ve třídě I. Pravidelné tvarosloví. Učivo vštěpováno v paměť překládáním
německého do českého a naopak, zároveň přihlíženo k pravopisu a větosloví.
na paměť významům, přednášení z paměti krátkých článků z čítánky. Každých
semní práce.

Ve třídě II. Pokračování a doplňování tvarosloví, slovesa silná a smíšená
významům; cvičení praktická v mluvení a pravopise, mluvení a přednášení, čtení
článků. Cvičení písemní jako v tř. I.

Ve třídě III. Opakování a doplňování tvarosloví, zvláště části slovesné s p
cvičením. Důkladnější náuka o větě jednoduché. Čtení, překládání, memorován
vování vybraných článků a cvičení se v rozmluvách. Písemní práce jako v I. a

Ve třídě IV. Opakování celého tvarosloví; nauka o užívání časů a spůsobů
cvičením praktickým. Další učení se zvláštním rčením, idiotismům a příslovím. Po
v nauce o tvoření a odvozování slov. Souvětí, periody. Cvičení se v rozmluvách, p
Písemní práce domácí a školní jako v III. tř.

Jazyku německému učili se všickni žáci v čas obyčejných školních hodin.

2. Tělocvik.

viku učilo se v I. pololetí 73 žáků, v II. pololetí 74 žáků 4 hod. týdně. Pro-ocviky, cvičení s činkami, cvičení na hrazdě, bradlech, tyči, kruzích, skok prostý

3. Zpěv.

theoretická: vývoj soustavy liniové, jméno not rozličných klíčů, hodnota not akt. Intervally. Tvoření stupnice tvrdé a měkké, posůvky, toniny. Dynamická ův. Tempo. Ostatní zvláštní znamení v písmě notovém užívaná.

praktická: Ku každému oddílu případná cvičení praktická. Nacvičeno 39 sborů 3 kostelních a 26 světských. Žáků bylo v I. pololetí 48, v II. 40.

Rozvrh předmětův povinných a hodin.

vys. cís. král. ministerstva kultu a vyučování ze dne 1. července 1874 č. 8.316, . nařízením ze dne 15. září 1877 č. 12.341, int. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 21. září 1877 č. 19.545.

edmět	Počet hodin za týden v třídě					
	I.	II.	III. gymnas.	III. real.	IV. gymnas.	IV. real.
ví	2	2	2		2	
azyk	7	7	6		6	
yk	—	—	4	—	4	—
ký jazyk . . .	—	—	—	3	—	4
yk	3	3	2		2	
jazyk	4	3	3		3	
ějepis	3	4	3		3	
. . . .	3	3	3		3	
. . . .	3	3	—		—	
. . . .	—	—	3		v I. pololetí 3	
. . . .	—	—	—		v II. pololetí 3	
. . . .	4	2	2		2	
. . . .	—	4	4		4	
. . . .	1	1	—	1	—	
Úhrnem . . .	30	32	32		32	

C. Učebné knihy.

Předmět	tř. I.	tř. II.	tř. III.	tř. [illegible]
Náboženství	Učení katol. náboženství od J. Hulakovského, 56 kr.	Liturgika od J. A. Frencla, 70 kr.	Stručný dějepis zjevení Božího v star. zákoně od J. Hulakovského, 65 kr.	Stručn[illegible] zjevení [illegible] nov. z[illegible] J. Hula[illegible] 7[illegible]
Jazyk latinský	Latinská mluvnice od J. Kořínka 2. vydání 1·80 zl. - Latinská cvičebná kniha pro I. tř. od Fr. Ot. Novotného. 3. vyd. 60 kr.	Lat. mluvn. jako v I tř. - Lat. cvičebná kniha pro II. tř. od Fr. Ot. Novotného, 1·20 zl.	Lat. mluvn. jako v I. tř. - Cvič. kniha ku překládání z češt. do lat. pro III. tř. od J. K. Klumpara, 3. vyd. 75 kr. - Cornelii Nepotis vitae ed. Teubner.	Lat. ml[illegible] v I. tř. -[illegible] ku překl[illegible] do lat. [illegible] od J. K[illegible] 1 zl. - C[illegible] com. de [illegible] od Hoff[illegible] Ovidii N[illegible] mina [illegible] 6[illegible]
Jazyk řecký	—	—	Mluvn. jaz. řeck. Tvarosloví od J. Niederle, 96 kr. - Řecká cvič. kniha od F. Lepaře, 2. vyd. 1·60 zl.	jako [illegible]
Jazyk český	Mluvn. česká pro nižší tř. gymn. a real. od K. Kunze. I. díl 6. vyd. 72 kr. - Česká čítanka pro I. tř. šk. stř. od F. Bartoše, 80 kr.	Česká mluvnice jako v tř. I. - Česká čítací kniha pro nižší třídy gymnas. od J. L. Čelakovského, 5. vyd. 90 kr.	Skladba jazyka českého od F. Bartoše. - Čítanka pro III. tř. nižš. gymnas. od J. Jirečka, 3. vydání 72 kr.	Česká [illegible] jako v [illegible] III. - O[illegible] kouský[illegible] národů [illegible] od J. [illegible] vyd.[illegible]
Jazyk německý	Učebná a cvič. kniha jaz. něm. pro I. tř. šk. stř. od K. Kunze, 4. vyd. 1·08 zl.	Učebná kniha jako v I. třídě. - Deutsches Lesebuch für die I. Kl. an. Gymn. u. Realsch. von C. A. Madiera, 4. vyd. 66 kr.	Učebná kniha jaz. něm. díl 2. od K. Kunze, 1·80 zl. - Deutsch. Lesebuch jako v třídě II.	Učeb[illegible] jaz. n[illegible] v třídě [illegible] Deutsc[illegible] für die [illegible] C. A. [illegible] 2. vy[illegible]
Jazyk francouzský	—	—	První učení se jazyku franc. od Roth-Ricarda, II. vyd. 80 kr.	První [illegible] jazyku [illegible] Roth-R[illegible] díl [illegible]
Země- a dějepis	Zeměpis pro nižší třídy střed. skol od T. Cimrhanzla 5. vyd. 1·30 zl. - Atlas od Kozena upravený od Jirečka, 2·60 zl.	Děje všeobecné I. díl od Ningra-Nováka 2. vyd. 60 kr. - Zeměpis a atlas jako v I. třídě. - Historisch-geograph. Schulatlas I. Abth. v. Jausz 1·20 zl.	Děje všeobecné II. díl od Ningra-Nováka 2. vydání 60 kr. - Zeměpis a atlas jako v I. třídě.	Děje [illegible] III. díl [illegible] Novák [illegible] Učeb[illegible] zeměp[illegible] sko-u[illegible] sepsal [illegible] 1 zl. -[illegible] v

C. Učebné knihy.

…mět	tř. I.	tř. II.	tř. III.	tř. IV.
…etika	Arithmetika pro nižší třídy střed. škol od Fr. Xav. Fischera, 2 vyd. 1·40 zl.	jako v třídě I.	Arithmetika pro nižší třídy střed. škol, díl II. od Fr. X. Fischera 1·35 zl.	jako v třídě III.
…opis	Názorný přírodopis živočišstva od Dr. A. Pokorného, vzdělaný od P. Jehličky 1·20 zl.	Názorný nerostopis od Dr. A. Pokorného, vzdělaný od Dr. Bořického 70 kr. - Názorný přírodopis rostlinstva od Dra. A. Pokorného, vzdělaný od Dr. L. Čelakovského, 1 zl.	—	—
…ka …mie	—	—	Fysika pro nižší školy od Dr. A. Majera, 3. vydání 1·40 zl.	Fysika jako v tř. III. - Základové chemie od E. Stoklasa.
…tví …vání	Základové měřictví, kreslení a rýsování od Kuchynky, 1·08 zl.	Měřictví a rýsování k potřebě vyučov. v 2., 3., 4. tř. real. gymn., 2. vyd. od Šandy.	Měřictví a rýsování jako v II. tř.	Měřictví a rýsování jako v II. tř.

D. Výkazy žákovstva se týkající.

…ná klassifikací žákův šk. r. 1879 po zkouškách opravných.

…ídy	Obdrželi vysvědčení					Nezkoušen zůstal	Všech žáků bylo
	s vyznamenáním	prvé tř.	druhé tř.	třetí tř.	mimořádné		
…	11	28	3	—	—	—	42
…	7	23	2	—	3	—	35
…I.	3	13	1	—	—	1	18
…	4	11	—	—	—	—	15
…rnem	25	75	6	—	3	1	110

Žákovstvo v letošním šk. r. 1880.

	V třídě			
	I.	II.	III.	IV.
Na konci šk. r. 1879 bylo žáků	42	35	18	15
Na počátku šk. r. 1880 přijato	50	37	29	14
Z těch				
postoupili z předešlé třídy zdejšího realného gymnasia	—	34	29	14
opakovali	1	2	—	—
postoupili, přibyvše odjinud	49	1	—	—
vystoupili během roku	2	2	—	2
zbyli na konci 1880	48	35	29	12
Ze zbylých žáků jsou rodem:				
z Čech	48	34	26	12
z Rakous Dolních	—	1	3	—
bydlištěm rodičů:				
z Třeboně	27	22	13	10
odjinud	21	13	16	2
dle národnosti:				
Češi	48	35	28	12
Němci	—	—	1	—
náboženství:				
římsko-katolického	45	33	29	12
mojžíšského	3	2	—	—
Od školného byli osvobozeni				
v pololetí prvém: a) zcela	—	24	18	9
b) od polovice	—	6	—	—
v pololetí druhém: a) zcela	40	25	17	9
b) od polovice	3	7	—	—
Školné platili				
v prvém pololetí: a) celé	49	7	11	5
b) polovici	—	6	—	—
v druhém pololetí a) celé	5	3	12	3
b) polovici	3	7	—	—
Celoroční obnos školného v zl. činí	444	132	184	64
Stipendistů bylo	—	—	—	—
Roční požitek stipendií obnášel	—	—	—	—
Vysvědčení obdrželi na konci druhého pololetí				
prvé třídy s vyznamenáním	6	8	4	4
prvé třídy	31	24	20	8
druhé třídy	6	—	1	—
třetí třídy	—	—	—	—
prozatimné	5	3	1	—
mimořádné	—	—	3	—
nezkoušeni zůstali	—	—	—	—

Stáří žákův na konci šk. r. 1880.

...třídě	Počet žáků jsoucích v stáří let								Úhrn žáků ve třídě
	11	12	13	14	15	16	17	18	
I.	6	14	22	3	3	—	—	—	48
I.	—	3	9	16	5	2	—	—	35
II.	—	1	2	9	8	7	1	1	29
V.	—	—	—	3	3	5	1	—	12
Úhrnem	6	18	33	31	19	14	2	1	124

Seznam žáků,

kteří až do konce roku 1880 na ústavě byli, s udáním rodiště jejich.

I. třída.

t. Adamec z H. Slovenic.*
Adamec z H. Slovenic.
ek Antony ze Třeboně.
t. Bittermann „ „
Bittermann „ „
l Broukal „ „
David „ „
s Fackenberg z Neuthalu.
. Forst z Malé Hlíny.
Horák z Lutové.
l Jindra z Ledenic.
š Jindra „ „
v Karták z Lomnice n. L.*
. Kazda z M. Hlíny.
Kazda „ „ „
Kopecký z Lomnice n. L.*
v Kreidl „ „ „ „
Kropáč ze Švarzbachu.
Kuthan ze Třeboně.
. Lenc ze Zborova.
Lenc z Ledenic.
nand Martínek ze Třeboně.
Mattas z Rabína.
old Melichar ze Třeboně.
25. Bedřich Micko ze Chlumčan.
26. Josef Mikyška ze Žiče.
27. Václav Mizera z Lomnice n. L.
28 Karel Mostecký ze Třeboně.
29. Karel Nosek z Lomnice n. L.
30. Josef Novotný z Třebechovic.*
31. Tomáš Novotný z V. Hlíny.
32. Emilian Petr z Borovan.
33. Frant. Přibyl z Lomnice n. L.
34. Jan Rosol ze Skřeže.
35. Emanuel Spivák z Lomnice n. L.
36. Vojtěch Stein z Cepu.
37. Karel Šafář ze Třeboně.
38. Ferdinand Šenold ze Třeboně.
39. Vojtěch Šíma ze Branné.*
40. Karel Šírek ze Třeboně.
41. Václav Štícha z Novosedel.
42. Dalemil Vařečka z Jičína.*
43. Josef Vrchota ze Třeboně.
44. Vilém Wimmer z Lomnice n. L.
45. Josef Záruba ze Třeboně.
46. Antonín Zauf „ „
47. Karel Zinnecker z Toužetína.
48, Frant. Zvánovec z Lužnice.

II. třída.

1. Vilém Arnstein ze Třeboně.*
2. Karel Beneš z M. Hlíny.
3. Julius Böhm z Rabšachu v Dolních Rakousích.
4. Josef Burian z Kardaš. Řečice.
5. Josef Čadek ze Třeboně.
6. Frant. Číhal „ „
7. Josef Dvořák z Cepu.*
8. Gustav Ehmig ze Třeboně.*
9. Jan Fabian ze Přeseky.
10. Samuel Fantl ze Třeboně.
11. Karel Fiedler „ „*
12. Frant. Filištein z Kam. Ujezdu.
13. Bohdan Hevrdle z Lomnice n. L.
14. Jaroslav Jaroš ze Třeboně.
15. Jan Jindra „ „*
16. Frant. Köpp „ „
17. Bedřich Langer z Tannwaldu.*
18. Václav Lenc z Dehetní
19. Augustin Lintner ze Tř
20. Bohdan Lokobauer „
21. Jan Menoušek „
22. Josef Michal ze Břilic.
23. Karel Micko ze Chlum
24. Frant. Nevěselý ze Bří
25. Eduard Peukr ze Třeb
26. Ladislav Pokorný z Ve
27. Matěj Pozníček z Vlk
28. Tomáš Řebík ze Přese
29. Karel Řibřid ze Třísk
30. Kar. Schneider z Lomni
31. Karel Šejnoha ze Třeb
32. Adolf Šírek „ „
33. Václav Šula ze Stráže
34. Otakar Švorčík z Nách
35. Matěj Vaněček ze Vra

III. třída.

1. Frant. Beran z Věšína.
2. Jan Fiedler ze Třeboně.
3. Vojtěch Fuxa z Vlkovic.
4. Jan Fürst z Lomnice n. Lužn.*
5. Jarosl. Hajnovský z Kr. Hradce.*
6. Jan Jary ze Třeboně.
7. Josef Jindra ze Lhoty.
8. Josef Jindra ze Třeboně.
9. Rudolf Kabátník ze Bzí.
10. Jaroslav Kaisler z Hluboké.*
11. Josef Kolletzky ze Třeboně.
12. Rudolf Kožíšek z Lužnice.
13. Augustin Linha ze Třeboně.
14. Ferdinand Linha z Libína.
15. Tomáš Ludvík ze Břilic.
16. Martin Martán z Budo
17. Jan Mikyška ze Žiče.
18. Frant. Pavelec ze Břil
19. Frant. Petter ze Třebo
20. Jan Řebík ze Přeseky
21. Václav Řebík ze Přese
22. Frant. Sítta z Vídně.
23. Václav Smolík ze Tře
24. Josef Šput „
25. Antonín Schmidt
26. Albín Schrayer z Vídn
27. Antonín Schwarzmann z
poldova v Dol. Rakou
28. Václav Thier ze Třebo
29. Josef Zíka ze Záblatí.

IV. třída.

1. Josef Antony ze Třeboně.
2. Felix Číhal „ „
3. Josef Jindra ze Břilic.
4. Josef Kohout ze Třeboně.*
5. Ignác Kunstovný „
6. Frant. Lukas „
7. Frant. Menoušek ze T
8. Bohdan Řepa z Lomn
9. Frant. Řepiš ze Třebo
10. Alois Štětka „ „
11. Arnošt Švorčík ze Str
12. Jan Zauf ze Třeboně.

E. Výkaz o podporování chudých studujících v šk. r. 1879—80.

Výkaz příjmů, vydání a jmění (do 2. července 1880).

I. Pokladna pro knihy atd.

Příjem:	
…e státního úpisu . .	4 zl. 20 kr.
…c. k. ředitele při zá-…kův	40 „ 88 „
…ky P. T. pp. údů za-…ích a přispívajících	123 „ 50 „
…	3 „ 18 „
Celkem . .	171 zl. 76 kr.

Vydání:	
1. Za knihy	61 zl. 35 kr.
2. Za vazbu kněh	3 „ 53 „
3. Za papír, péra atd. . . .	34 „ 81 „
4. Příspěvek na školné dvěma žákům	7 „ — „
5. Za dva žáky zaplacena taxa přijímací	4 „ 20 „
6. Za vytištění zprávy z roku 1879, dopisy, porta . . .	3 „ 84 „
7. Sluhovi odměna	4 „ — „
8. 1 žáku koupen letní oblek a botky	5 „ 10 „
9. Do záložny uloženo . . .	40 „ — „
10. Zbytek v pokladně . . .	7 „ 93 „
Celkem . .	171 zl. 76 kr.

II. Pokladna pro obědy.

Příjem:	
…v pokladně z r. 1879	1 zl. 91 kr.
…e státního úpisu . .	4 „ 20 „
…T. pp. dobrodinců .	185 „ — „
Celkem . .	191 zl. 11 kr.

Vydání:	
1. Za 320 obědů	80 zl. — kr.
2. Sluhovi odměna	8 „ — „
3. Vloženo do záložny	100 „ — „
4. Zbytek v pokladně	3 „ 11 „
Celkem . .	191 zl. 11 kr.

Jmění v 8. roce spolkovém (do 2. července 1880).

I. Pro knihy a podobné:

…Jistina z r. 1879 v záložně Třeboňské	513 zl. 75 kr.	
…K tomu uloženo r. 1880	40 „ — „	
…Úrok do 1. července r. 1880	28 „ 66 „	
… úpis státní stříbrné renty č. 118·741	100 „ — „	
…Zbytek v pokladně	7 „ 93 „	
Celkem	690 zl. 34 kr. . .	690 zl. 34 kr.

II. Pro obědy:

…Jistina z r. 1879 v záložně Třeboňské	112 zl. 92 kr.	
…K tomu uloženo r. 1880	100 „ — „	
…Úrok do 1. července 1880	9 „ 48 „	
…1 úpis státní stříbrné renty č. 271.091	100 „ — „	
…Zbytek v pokladně	3 „ 11 „	
Celkem	325 zl. 51 kr. . .	325 „ 51 „
Celkové jmění		1015 zl. 85 kr.

…no to měl spolek letos 718 kněh učebných. Půjčeno bylo 534 exemplářů 77 žá-…cími a kreslícími potřebami bylo poděleno v I. běhu 25, v II. běhu 24 žáků.

P. T. pp. údů má spolek ku podporování chudých studujících c. k. reáln[illegible] v Třeboni do 2. července 1880 130 a sice: a) čestných 1, b) zakládajících 27, c) [illegible]cích domácích 73, d) přispívajících cizích dosud 29, neboť ze 2 míst příspěvk[illegible] nedošly.

P. T. pp. dobrodinců, kteří na obědy peněžitě přispěli, jest 45.

Bližší zpráva podá se po valné hromadě, prozatím zde vytknouti sluší toto

P. T. p. Antonín Ehrendorfer, přednosta centrální kníž. Schwar[illegible] účtárny, založí stipendium pro řádného chudého studujícího.

Slavná městská obec Třeboňská zaplatila za 9 žáků v Třeboni [illegible] 49 zl. školného.

P. T. p. Gustav Heyrovský, c. k. okr. hejtman v Třeboni, a P. T. p[illegible] Kietreiberová, vdova po fabrikantovi ve Vídni, přistoupili jakožto údové z[illegible]

P. T. p. Řehoř Mičko, kníž. Schwarzenbergský správce, odevzdal 2 ž[illegible] obleky jeho péčí zařízené z obětavých sbírek.

P. T. p. Arnošt Švorčík, c. k. okr. soudce, daroval jako jiná léta 2 rysy p[illegible]dým žákům, vedle toho 1 žáku kabát.

P. T. p. Josef Kasparides, c. k. prof., daroval 1 kabát a 2 knihy.

P. T. p. Vinc. Novák, kněhkupec, dar. 25 exempl. kostelních písní.

P. T. p. Jan Hulakovký, c. k. prof., dar. 3 exempl. své Nauky náboženské.

F. Pomůcky vyučovací.

Peněžných příjmů sešlo se dosud jen 460 zl.

I. Knihovny.

a) **Professorská.**

Ve školním roce 1880 přibylo:

I. Darem:

1. Od vys. c. k. místodržitelství: Zákonník zemský na r. 1880.
2. Od pana Karla Jarošky, jub. kníž. Schwarzenbergského centr. účetního [illegible] v 19 sv. a 4 seš., ze kterých vytýkáme: Atlas zu Alex. v. Humboldt's Kosmos; G[illegible] Crispi libri de Catilinae coniuratione et de bello Jugurthino s českým překladem [illegible]vým a Vaníčkovým; Anthologie z literatury české doby střední od Jos. Jirečka; [illegible] Shakespearova v českém překladě; 7 ročníků časopisu „Die illustrierte Welt"; [illegible] časopisu „Illustrierte Chronik der Zeit", a j.
3. Od nakladatele p. Fr. Tempského v Praze:
   a) Chemie zkušebná pro IV. školu real. a ústavy učitelské od dra. Fr. Hejzla [illegible] Hofmanna.
   b) Planského Učebná a cvičebná kniha jazyka českého.
4. Od knihkupce p. Karla Winklera v Brně: Mluvnice jazyka českého o[illegible] Blažka a Fr. Bartoše. Díl I. Tvarosloví.
5. Od sl. knihkupectví Fr. Řivnáče v Praze: Shakespearův Koriolanus, [illegible] od Fr. Douchy.
6. Od sl. spolku „Mittelschule" ve Vídni: Regeln der deutschen Rechtschre[illegible]
7. Od ředitele p. dr. Ant. Majera: Fysika pro nižší školy. IV. vyd. 1880.
8. Od ředitele p. J. Podstatného: Ovidia Nasona vybrané básně.
9. Od prof. p. P. Jana Hulakovského: Ukázka z fraseologie francouzské.
10. Od prof. p. V. Marka: Poetické tradice Thráků i Bulharů, od dr. Leop.[illegible]
11. Od musejního assistenta p. O. K. Taránka: Rozsivky.

II. Koupí:

Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Kultus und Unterhrg. 1880.
Zeitschrift für das Realschulwesen. V. Jahrg.
Listy filologické a paedagogické. Roč. VI. seš. 3.—4. a roč. VII. seš. 1.—2.
Dassenbacher's Professoren- & Lehrer-Kalender 1880.
Germanische Alterthümer mit Text, Übersetzung und Erklärung von Tacitus Ger- von Ad. Holtzmann. Leip. 1873.
Cornelii Taciti De situ ac populis Germaniae liber Frid. Kritzii annotatione illu Berol. 1878.
Sophoklis Antigone. Rec. et. expl. Ed. Wunderus. Editio V. Lip. 1878.
Sophokles' Antigone übers. v. J. J. C. Donner. Leip. 1875.
Časopis Musea království Českého. Roč. 1878. seš. 4. a roč. 1879. seš. 1.—3.
Časopis Matice Moravské. Roč. XI. seš. 2.—4. a roč. XII. seš. 1.—2.
Kottova Slovníku českoněmeckého seš. 27.—35.
Vlčkovy Osvěty roč. IX. seš. 8.—12. a roč. X. seš. 1.—6.
Rostlinstvo a jeho význam v národních písních, od Pr. Sobotky.
Koldína Práva městská, vydaná od J. Jirečka.
Slovník francouzsko-český, od Kašp. Fastra.
Französische Grammatik für Mittelschulen, von A. Bechtel. I. Theil.
Regeln und Wörter-Verzeichnis für die deutsche Rechtschreibung.
Meyer's Konversations-Lexikon. Bd. IX.—XI.
Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien. XXIII. Jahrg.
Dr. A. Petrmanns Mittheilungen aus Justus Perthes' geogr. Anstalt. 26. Bd. 1880.
Jacobs Eisenbahnführer durch Oesterreich-Ungarn. 1880.
Památky archaeologické a místopisné. Díl IV.
Jan Žižka, od V. V. Tomka.
Handbuch der Geschischte Oesterreichs von Dr. Franz Krones. II. Bd.
Grundzüge der ant. u. mod. Algebra, von Lud. Matthiessen.
Přehled silozpytu, od J. Frant. Hromádka.
Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. 1880.
Archiv přírodovědecký. red. od Fr. Rosického a Fr. Vejdovského.
Brehms Thierleben. IV. Theil.
Čelakovského Analytická květena česká.
Čelakovského Květena okolí Pražského.
Synopsis der Mineralogie und Geognosie, von Dr. Ferd. Senft.

b) Žákovská.

školním roce 1880 přibylo:

I. Darem.

Od p. Karla Jarošky, jub. kníž. Schwarzenb. centr. účetního, 7 spisů, ze kterých : Die Vorzeit, dargestellt in historischen Gemälden und Erzählungen (30 seš.); Das Welt (3 sv.); Křížkův statistický atlas rakousko uherské říše, a j.
Od nakladatele p. Masche v Plzni:
nice jazyka německého od K. Kunze. Díl I.
ecká cvičebná kniha pro II. třídu škol středních od K. Kunze.
Od knĕhkupce p. Fr. A. Urbánka v Praze: Eduarda Stoklasa, Základové chemie školy střední a školy měšťanské.

II. Koupí.

Vesmír. Roč. IX.
Světozor. Roč. XIV.
Libuše. Roč. IX. seš. 4.—6. a roč. X. seš. 1.—3.
Kottův Slovník česko-německý. Seš. 27.—35.
Kronika práce. Dílu V. seš. 2.—3.
Zápovy česko-moravské kroniky seš. 64.—65.
Bibliotheky místních dějepisů sv. VII. a VIII.

8. Maškovy Budečské zahrady roč. X.
9. Cimrhanzlovy Mythologie Řeků a Římanů (II. vyd.) seš. 1.—8.
10. Studničkovy Zábavné rozhledy hvězdářské.
11. Křížkovy Dějiny všeobecné a rakouské v přehledu synchronistickém.
12. Čelakovského Sebrané spisy. Svaz. III. a IV.
13. V přírodě. Dle Wagnera vzdělal Kv. D.
14. Jehličkovo Čtení o Jeho Veličenství našem Císaři Pánu Františku Josef I.
15. Český vystěhovalec od Kar. Koblížka.
16. Kongo čili lovecká dobrodružství v Jižní Africe.
17. Nové Knihovny pro mládež řady I. seš. 30., 37., 39., 49., 50., 53.—57., 5… II. seš. 3., 5., 9., 13., 15., 17., 22., 25.—27. (Cestování o prázdninách. Obrázky z… rostův. Obrazy z krajin vzdálených. Ze starověkých povídek. Pohádky a pověs… Krkonošských. Po práci. Skalákův chovanec. Dvě osudné noci. Povídky dobr… Povídky z Krkonoš. Život Petra Velikého. Vycházka do Šumavy. Sever a jih. M… resie. Obrázky ze života Karla IV. Z hlubin mořských. Škola mé štěstí. Cesta … do hor Železných. Wilson, velitel anglické lodi.)
18. Illustrirte Mythologie, von Dr. Herman Göll.
19. Album der Burgen und Schlösser im Königreiche Böhmen, von Fried. … Seš. 1.—11.

Měla	Knihovna professorská						Knihovna žák…		
	spisů	ve svazcích	sešitech	číslech	tabulkách	programatech	spisů	ve svazcích	sešitech
koncem šk. r. 1879	647	1013	373	6	7	955	899	1202	99
koncem šk. r. 1880	683	1072	378	18	7	1053	917	1226	176
Přibylo ve šk. r. 1880	36	59	5	12	—	98	18	24	77

II. Sbírka pro země- a dějepis.

Do sbírky této přibylo koupí: Školní mapa království Českého (horo-vo… Zdělal a kreslil Jarosl. Zdeněk. — Eisenbahnkarte Österreich-Ung. 43. Aufl. 1880. … grafie (5) měsíce od Čecháče.

Sbírku mincí rozmnožili darem: p. t. p. K. Ehmig, kníž. správce, s… penízem z r. 1713; p. A. Wegwart, k. správce pruským stříbrným grošem z r. 1850 … nousek, kupec, 3 k. stříbrných a 2 k. měděných penízků; Fiedler Jan, gymnasista … papírovým desetníkem z r. 1860.

III. Sbírka fysikalní a chemická.

Sbírce fysikální přibylo koupí: Pákostroj, model Brahmova vodn… 3 nádobky ku fluorescenci, 2 obrazy ku kouzelné svítilně, telephon, Henleyův vybí…

Sbírka tato má koncem šk. roku 1880 299 přístrojů a sice v oboru 1) obecný… ností 14, 2) mechaniky 65, 3) akustiky 17, 4) optiky 31, 5) tepla 15, 6) elektřin… magnetičnosti 6. Mimo to 2 stojany.

Sbírce lučebné přibylo koupí: dláto a brousek, vedle toho více lát… čebnin. Darem: od p. Gust. Mikoty, kníž. arcibiskupského správce hutí v Ro… výroba železa v 10 vzorcích a od p. Maurice Brože, adjunkta cukrovaru v … výroba cukru v 25 vzorcích.

Lučebna má koncem šk. roku 1880: 139 přístrojů a náčiní, 3 druhy diagramů. … vzorců ze sklářství, železářství a cukrovarství, konečně mnoho látek a lučebnin.

IV. Sbírka přírodnická.

odnickým sbírkám tímto rokem buď darem, buď koupí značně přibylo. Darem: erminea od O. Kuthana, ž. I. tř., b) Lutra vulg. (ml.) od Melichara, ž. I. tř., ttacus undulatus od p. Fr. Slavingra, kníž. revírníka, d) 600 druhův hmyzův od y, e) 500 dr. rostlin od téhož, f) 30 kusův nerostův od téhož.
upí nabyto: a) 24 kusův geognost., b) 25 obrazův z Lehmannovy sbírky, c) lupa lech.

hrn přírodnin po jednotlivých sbírkách jest tímto rokem tento:

írka zoologická čítá:

. . . .	36 kusův
. . . .	173 „
a obojživelcův . .	14 „
. . . .	17 „
ův	1250 druhův
šův a hvězdýšův . .	172 „
celkem	1662 k. a dr.

o 636 kusův a dr. více.

II. Sbírka mineralogická:

a) mineralií	950 kusův
b) hornin a petrefaktů . . .	200 „
celkem	1150 kusův

III. Sbírka botanická:

a) sušených rostlin	1050 druhův
b) semen	144 „
c) dřev	16 „
celkem	1210 druhův

IV. Pomůcky učebné:

Obrazy, modely atd. . . . . . . 200 čísel.

V. Sbírka pro kreslení a rýsování.

sbírky této přibyly: 1. předlohy: Kunstgewerbliche Vorlageblätter v. J. V. sešit, obsahující 10 listů; Herdtle's Elementarornamente, 24 listy; Carot, cours d'ornament, 10 listů; Zahn und Hübler, Vorlagen für Ornamentmalerei, 12 listů; Farbige Flachornamente; Das polychrome Flachornament von prof. A. Anděl, 6., sešit obsahující 26 listů (36—61); 2. modely: Drátěná koule s dvěma po- třemi rovnoběžníky, kruhová deska, plný kužel dřevěný, dutý hranol dřevěný a né desky.

VI. Sbírka pro krasopis.

této sbírky byly přikoupeny: Sonnecken, Rondeschrift a Reicherter Ronde.

G. Z dějin ústavu 1879—80.

příčinou částečného rozšíření a přestavění budovy gymnasiální zahájen jest školní s dovolením velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 10. září 1879 č. 20532 teprv áří 1879 obvyklým slavným způsobem. Zápis žákův, přijímací i opravné zkoušky ykonaly již od 13.—16. září; ze 132 přihlásivších se žákův přijati jsou do I. třídy 37, do III. 29 a do IV. 14, úhrnem tedy do všech tříd 130 žákův.
učováno bylo dle osnovy již minulého roku platné, služby Boží konaly se měrou em lonským.
ienovitě účastnili se professoři i žáci slavností v den jmenin a svatby **Jejich cís. apoštolských Veličenstev**, v den jmenin Jeho císařské Výsosti, nejjasnějšího prince našeho **Rudolfa**, jenž se dne 7. března 1880 zasnoubil v Brusselu ější princ. **Stefanií Klotildou**, dcerou jejich Veličenstev krále belgického Leopolda II. y Marie Henrietty. Bůh žehnejž, modlíme se zajisté všickni co nejvroucněji, nej- noubencům, nechť z brzkého manželstva plyne jen štěstí též všem národům rakou- kým! Sbor professorský přednesl za tou příčinou svá nejponíženější a nejvřelejší ní, začež mu byly i od Jeho Cís. a Král. Apoštolského Veličenstva i od Jeho Cí- ýsosti nejvyšší díky nejmilostivěji vysloveny.

Úmrtní mše zařídil ústav za zvěčnělého císaře a krále **Ferdinanda Dobrot**
všecky zemřelé dobrodince ústavu, zejména za zvěčnělou pí. M. Jaroschkovou,
basa a žáky.

Ve sboru učitelském staly se tyto změny. Vynesením vysokého c. k. minist
a vyučování ze dne 22. září 1879 č. 12261 přeloženi byli př. V. Vařečka z Jičínsk
gymnasia sem, a př. Josef Bísek, t. č. okresní inspektor školní po víceletém zdá
dování odtud do Jičína; zároveň velesl. c. k. zemská školní rada vynes. ze dne 27.
č. 22627 nařídila, aby suplující učitel M. Menzl př. Bíska i v Jičíně dočasně zastu
loňského roku zde byl činil.

Dne 14. května 1880 jmenoval J. Excellencí pan c. k. ministr kultu a
supplenta při c. k. realném a vyšším realném gymnasiu v Chrudimi Jana Bartáka
učitelem při zdejším real. gymnasii státním; týž úřad svůj nastoupí dnem 1. září

Ode dne 27.—30. května t. r. vykonal inspekcí ústavu p. t. pan c. k. školní
zemský Jan Evang. Kosina — i byl velice spokojen.

Též p. t. vys. důstojný biskupský kommisař a děkan pan P. Frant. Toušek
kráte vyučování náboženství přítomen a z prospěchu žactva potěšen.

Dne 11. ledna 1880 dostalo se ústavu nemalého vyznamenání z výstavy p
v srpnu a září 1879 v Teplicích odbývané, totiž diplomu uznání a velké stříbrn
za „soustavné vyučování kreslení".

Školní rok ukončen jest dne 15. července 1880 slavnými službami Božími
sv. Ambrože, kteréž tak jak na počátku školního roku konali vys. důstojný
kommissař pan děkan P. Fr. Toušek s velebnými pány kaplany.

H. Nařízení vyšších c. k. úřadův školních, pok se týče žákovstva.

1. Vynes. c. k. zemské školní rady ze dne 26. února 1880 č. 4034: Spisel „
und Wörterverzeichniss für die deutsche Rechtschreibung" budiž obecně ujat z
kterouž říditi se jest ve příčině pravopisu všem středním školám českým a to o
školního roku 1880/1.

2. Vynes. vys. c. k. ministeria financí ze dne 3. prosince 1879 č. 29499
30. dubna 1880 č. 9137): Žádosti za osvobození od školného nemusí býti kolková
opatřeny vysvědčením chudoby neb nemajetnosti.

III.

Návěští.

kolní rok 1880-81 počne se ve čtvrtek dne 16. září
avnými službami Božími a vzýváním Ducha svatého.

i, kteří do real. gymnasia přijati býti mají, přihlásí se,
vými rodiči neb jejich zástupci sprovázeni, u ředitele ústavu
14. a 15. září.

i, kteří do I. třídy vstoupiti mají, vykáží se, nebyli-li
ě vyučováni, frekventačním vysvědčením té školy,
chodili, načež připuštěni budou ku zkoušce přijímací,
vyžaduje se, aby žák

áboženství věděl tolik, kolik poskytnouti může obecná
la;

itě četl a psal jazykem českým;

l nejhlavnější pravidla české mluvnice, uměl roze-
ati jednoduché rozvinuté věty, znal nejhlavnější
vidla pravopisu a i znamének rozdělovacích a při dik-
du správně jich užíval;

la celistvá hbitě a správně sečítal, odčítal, násobil
dělil.

oušky přijímací jakož i zkoušky opravné a do-
cí konati se budou od 14.—16. září.

i do ústavu ponejprv vstupující předloží řediteli křestný neb
st a platí po 2 zl. 10 kr. r. m. přijímacích tax.

Žákům z jiných ústavů středních přicházejícím
zati se jest též vysvědčeními školními, předepsaným stvrzen
ditelstva, že odchod svůj z ústavu, na němž dosud studovali,
ohlásili a že není, proč by na jiný ústav přijati býti nesmě
nečně jsou-li od školného osvobozeni neb požívají-li stipendia
loží dotyčné dekrety.

Každý žák bez rozdílu přispěje při zápise 1 zl. r. m.
středky vyučovací.

Rodičům neb poručníkům jest se při zápisu určitě vy
kterým předmětům nepovinným (jazyku německému, zpěvu
cviku) žák učiti se má ovšem zdarma, a vstupuje-li týž do
vysloví se rodiče, má-li vřaděn býti do oddělení gymn. či re

Dobří žáci, jsou-li chudobní, mohou řediteli
hned při zápisu podati žádost o zapůjčení školních kněh,
ku kreslení, o sešity, pera a konečně též o obědy.

**Všem spanilomyslným dámám i všem šlechetným dobrodincům a
cům, kteři chudé studující naše dobrotivě podporovali, sbírky učeb
hatili aneb jakýmkoli způsobem ku zdaru našeho realného gymnasia
přispěli, vzdávají se tímto *díky nejvřelejší.***

Ředitelstvo prosí snažně a uctivě, aby p. t.
a páni dobrodincové veleváženou přízeň svou út
zachovali a udělují-li obědů, u ředitelstva pře
čiti se ráčili, zdali žák žadatel skutečně nuzný
brodiní hoden jest čili nic.

Ředitelstvo cís. král. realného gymnasia

v Třeboni, dne 15. července 1880.

Norbert Hajnovsk
c. k. ředitel.

Die Grundlehren

der

Integral-

und

Differentialrechnung.

Von

Phil. Dr. Karl Bruno,
k. k. Professor am Elisabethgymnasium im V. Bezirke Wiens.

Wien 1908.
Alfred Hölder,
k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler,
I., Rotenturmstraße 13.

Einleitung.

Unter der Kultur eines Volkes muß man wohl alles das verstehen, was es
) eigene Arbeit auf den verschiedenen Betätigungsgebieten menschlichen Schaffens
t. Hiezu bedarf es eines Schatzes von geistigen Werkzeugen und körperlichen
richtungen, den es sich im Verlaufe seiner Geschichte hatte erringen müssen, um
einer gegenwärtigen Kulturmacht zu gelangen. Wer also die Kultur eines Volkes
ehen will — und das soll ja wohl der Gebildete —, der muß wenigstens die
tsächlichsten von diesen Geisteswerkzeugen und äußerlichen Einrichtungen genau
en und in einer wenn auch beschränkten Anzahl von Fällen anwenden gelernt
n. Eine bloß beiläufige Kenntnis nützt ihm nichts, weil die Macht, die ein Werk-
dem, der es führt, verleiht, vor allem durch die genaue Vertrautheit mit
m Werkzeuge bedingt ist. Was nützt denn z. B. ein Gewehr neuester Art einem
e? Es ist nichts als eine ernste Gefahr für dieses selbst, während es in der
) schulgerecht geübter Krieger die Schaffung unserer heutigen Staatsmacht ermöglicht.

Solche grundlegende Geisteswerkzeuge unserer heutigen Kulturmacht sind nun
r anderem die Begriffe des Integrals und des Differentialquotienten. Man
: hiebei nicht immer nur an Maschinen und Bauten, die ohne die Hilfe dieser
riffe überhaupt nicht hergestellt werden könnten; denn es ist doch klar, daß die Art,
im einzelnen mit Hilfe dieser Begriffe solches geistig vorherbestimmt und zweck-
g ausgeführt werden kann, Gegenstand eines eigenen Fachstudiums ist und sein
. Es ist dagegen die Kenntnis der Naturvorgänge, z. B. der Bewegungen der
nelskörper, von der entscheidendsten Bedeutung für unsere ganze Geistesentwicklung
der daraus entspringenden Lebensanschauung geworden. Wie weit nun die
uigkeit und Verläßlichkeit dieser Forschungen geht, davon kann nur der eine
iche Vorstellung haben, der die Begriffe des Integrals und des Differential-
enten, wenn auch in der einfachsten Gestalt, erfaßt hat, weil ja große Erfolge
Forschung und ihrer Überprüfung auf diesen Begriffen beruhen.

Dem Zwecke einer klaren Erfassung des Wesens dieser zwei Begriffe, ihrer
seitigen Beziehung und einiger Anwendungen soll die im Nachstehenden dar-
lte Methodik dienen.

Vorausgesetzt wird außer der Auflösung der Gleichungen 2. Grades die Kenntnis
4 trigonometrischen Funktionen, der Auflösung des rechtwinkeligen Dreieckes und
analytischen Darstellung einer Linie, vor allem der Geraden und der Parabel.

Der Begriff der veränderlichen Größe muß genau erörtert worden sein: ein
die Zahlzeichen 2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{7}$, a, $\frac{a}{b}$ usw. hatten in den bisherigen Betracht
das Gemeinsame, daß jedes Zeichen wenigstens während einer und derselben
nung immer nur eine und dieselbe Zahl bedeutete. $\sqrt{4}$ ist im Gegensatz hie
Zahlzeichen, unter dem man sich gleichzeitig zwei verschiedene Werte zu denke
nämlich $+2$ und -2. Ebenso kann man sich unter einem Zahlzeichen gleic
drei oder noch mehr Zahlen denken. Wenn man sich nun unter einem Zahl
x alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, die auf der Zahlenlinie zur Darst
kommen, gleichzeitig denkt, dann hat man sich das gedacht, was der Mathem
eine unabhängig veränderliche Größe nennt. Unter einer solchen hat man sic
die unendliche Menge aller reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ auf einm
denken, die überhaupt auf der Zahlenlinie zur Darstellung gebracht werden k
Diese Menge hat selbstverständlich gar nichts Veränderliches an sich, sie ist als
vollkommen Feststehendes gegeben. Die in Anbetracht dessen so sonderbar kli
Bezeichnung „veränderliche Größe“ rührt daher, daß es viel leichter ist, di
derung aufzustellen, es soll sich jemand diese unendliche Menge auf einmal d
als diese Forderung selbst zu erfüllen. Um sich dies zu erleichtern, benütz
einen Bewegungsvorgang als geistiges Hilfswerkzeug. Man denkt sich nämlich
Punkt auf einer Geraden von $-\infty$ bis $+\infty$ hin bewegt und denkt in
Augenblicke dieser Bewegung die Maßzahl der Entfernung dieses Punktes von
auf der Geraden von vornherein gewählten Nullpunkt. Hat dann der be
Punkt die ganze Gerade zurückgelegt, so hat man sich der Reihe nach alle
gedacht, die unter einer unabhängig veränderlichen Größe auf einmal zu denke
Und mit Rücksicht auf die veränderliche Lage dieses bewegten Punktes hat d
durch veranschaulichte mathematische Begriff seinen Namen bekommen. Unte
abhängig veränderlichen Größe hat man sich alle Werte auf einmal zu denk
in einem bestimmten Bereich der Zahlenlinie zur Darstellung kommen. Dies
reich kann aus einem streckenförmigen Stücke der Zahlenlinie bestehen od
deren mehreren; er kann aber auch die ganze Zahlenlinie erfüllen, je nach Ums

Den Wert dieser Begriffsangabe erkennt man sofort, wenn man klar
soll, daß durch eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, etwa $y = \frac{1}{3}$
Linie dargestellt wird. Deutet man die Werte der unabhängig Veränderli
als Abszissen und die durch diese Gleichung zugeordneten Werte des y als zug
Ordinaten, so liefert jede solche Abszisse mit der ihr zugeordneten Ordin
mathematische Beschreibung der Lage eines Punktes, dessen Vorstellung ma
durch die Angabe dieser beiden Koordinaten fordern kann. Durch die Gl
wird also die gleichzeitige Vorstellung unendlich vieler Punkte gefordert, der
samtheit wir als die Linie bezeichnen, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}x$ an
dargestellt wird.

Begriff des bestimmten Integrals.

Es seien P_0 (x_0, y_0) und P_n (x_n, y_n) 2 Punkte auf der Geraden G ... $y = \frac{1}{3}x$
s soll der Flächeninhalt F des Trapezes $P_0\,Q_0\,Q_n\,P_n$ berechnet werden. Dieses
also von einem Teile $P_0\,P_n$ der Geraden G, den Ordinaten der beiden
P_0 u. P_n und von einem Teile der Abszissenachse begrenzt. Diese Forderung

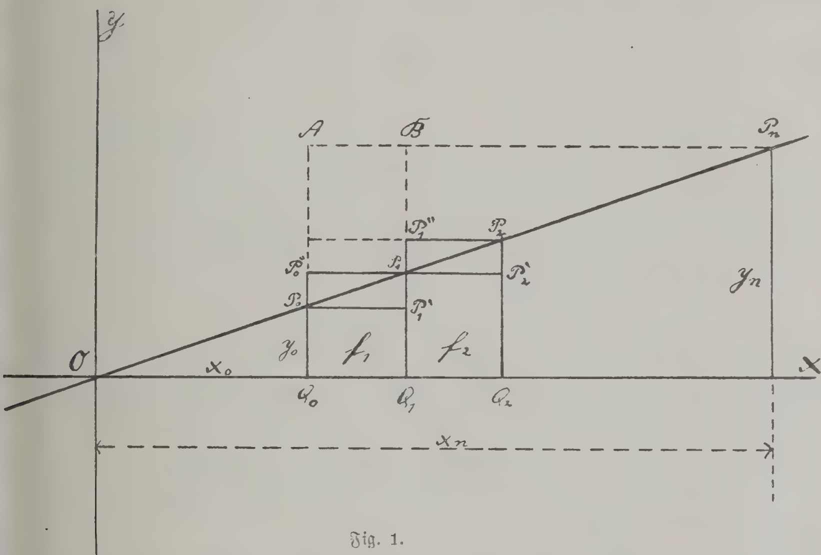


Fig. 1.

hne weiteres mit Hilfe der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes
werden. Also:

$$F = \frac{y_n + y_0}{2}\,(x_n - x_0).$$

Die Maßzahl des Flächeninhaltes F ist hier durch eine endliche Anzahl von Grund-
gsarten $(+, -, \cdot, :)$ mittels der gegebenen Koordinaten der Punkte P_0 u. P_n
llt. Wie man aber eine rationale Zahl, z. B. $\frac{4}{3}$, nicht nur durch eine endliche
von Grundrechnungsarten aus der positiven Einheit entstehen lassen kann
$1 + 1 + 1 + 1) : (1 + 1 + 1)\}$, sondern auch durch eine unendliche Anzahl
Grundrechnungsarten $\left\{\frac{4}{3} = 1{\cdot}\dot{3} = 1 + 3 : 10 + 3 : 100 + 3 : 1000 + \cdots \infty\right\}$,

so kann man auch versuchen, ob man nicht auch die Maßzahl F unseres F
inhaltes durch unendlich viele Grundrechnungsarten darstellen kann. Dies
auf folgende Weise: Man teilt sich zunächst die Strecke $Q_0 Q_n$ in n gleiche
wobei unter n eine positive ganze Zahl zu verstehen ist. Einen solchen Teil bez
man mit Δx, denn seine Länge ist ja die Differenz zwischen den Abszissen
Endpunkte. Durch $x_1, x_2 \cdots$ sollen die Abszissen der aufeinanderfolgenden Tei
punkte dargestellt werden. Dann werden die Ordinaten der zu diesen Abszis
hörigen Punkte $P_1, P_2 \cdots$ unserer Geraden G durch die Gleichungen: $y_1 =$
$y_2 = \frac{1}{3} x_2; \cdots$ gegeben.

Durch diese Ordinaten wird unsere Fläche $\overline{P_0 Q_0 Q_n P_n}$ in n Streifen
Ziehen wir $P_0 P_1' \mathbin{/\!/} Q_0 Q_n$, so erhalten wir ein Rechteck $P_0 Q_0 Q_1 P_1'$,
Flächeninhalt $f_1 = y_0 \cdot \Delta x$ ist. Genau so erhält man:

$$f_2 = y_1 \cdot \Delta x$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_n = y_{n-1} \cdot \Delta x.$$

Die Summe $\overline{F}_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ ist dann kleiner als F. Nehm
nun das n größer als jede noch so große Zahl an, dann ist Δx dem ab
Betrage nach kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Um diese A
auszudrücken, soll dann statt Δx das Zeichen dx gewählt werden, das den
Differentiale von x trägt. Jetzt ist aber

$$\overline{F}_\infty = \lim_{n=\infty} (y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x) =$$
$$= y_0 \, dx + y_1 \, dx + y_2 \, dx + \cdots \infty$$

durch unendlich viele Grundrechnungsarten dargestellt. Wir behaupten nun
gerade dieses $\overline{F}_\infty$ gleich F sein muß. Denn fügen wir zu f_1 das
$\overline{P_0 P_1' P_1 P_0''}$ hinzu, so daß wir erhalten: $f_1 + \overline{P_0 P_1' P_1 P_0''} = f_1'$, und
ebenso $f_2 + \overline{P_1 P_2' P_2 P_1''} = f_2'$ usw., so ist die Summe $\overline{F}_n' = f_1' + f_2'$ -
größer als F. Also: $\overline{F}_n' > F > \overline{F}_n$. $\overline{F}_n' - \overline{F}_n$ wird dabei durch $\overline{AB}$
dargestellt. Nehmen wir jetzt aber $n = \infty$, dann ist der Unterschied
$\overline{F}_\infty'$ und $\overline{F}_\infty$ unangebbar klein, weil ja $\overline{P_0 P_1'} = dx$ ein unangebbar kleine
ist, so daß auch der Unterschied zwischen F und $\overline{F}_\infty$ erst recht unangebbar k
Das heißt aber $F = \overline{F}_\infty$. Auf diese Art ist also F durch unendlich viele
rechnungsarten darstellbar. Drücken wir die y noch durch die zugehörigen
so haben wir:

$$F = \left(\frac{1}{3} x_0\right) \cdot dx + \left(\frac{1}{3} x_1\right) \cdot dx + \left(\frac{1}{3} x_2\right) \cdot dx + \cdots \infty \cdot$$

Eine solche Summe nennt man ein bestimmtes Integral und schreibt kur

$$F = \int_{x_0}^{x_n} \frac{1}{3} x \cdot dx.$$

Das Zeichen $\int$ ist ein langgezogenes S und bedeutet Summe. x_0 und x_n nennt die untere bzw. die obere Grenze des Integrals. Es wird durch diese die e $\overline{Q_0 Q_n}$ begrenzt, über die sich diese Art der Flächensummation, Integration nt, zu erstrecken hat. Ein bestimmtes Integral ist also eine Summe aus un-) vielen Produkten, die je aus einem unendlich kleinen und aus einem end- Faktor bestehen. Dieser endliche Faktor kann durchwegs denselben Wert haben, n aber auch, wie in unserem Beispiel, von Glied zu Glied verschiedene Werte n. Dabei ist, um von einem Integral tatsächlich reden zu können, noch voraus- daß diese Summe eine wirkliche denkbare Zahl gibt. Hievon kann man sich bei unserem Beispiel unmittelbar überzeugen. Denn wegen $x_1 = x_0 + \Delta x$; $x_0 + 2\Delta x; \cdots$ hat man:

$$\frac{1}{3} x_0 \Delta x + \frac{1}{3}(x_0 + \Delta x)\Delta x + \frac{1}{3}(x_0 + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + \frac{1}{3}(x_0 + n\Delta x)\Delta x =$$

$$\frac{1}{3} x_0 (n+1)\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 (1 + 2 + 3 + \cdots + n) =$$

$$\frac{1}{3} x_0 (n\Delta x + \Delta x) + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Da aber $n\Delta x = x_n - x_0$ ist, erhalten wir:

$$\overline{F}_n = \frac{1}{3} x_0 (x_n - x_0 + \Delta x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_0 + \Delta x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x_n - x_0)(2x_0 + x_n - x_0)}{2} + \frac{1}{3} x_0 \Delta x + \frac{1}{6}(x_n - x_0) \cdot \Delta x.$$

wir jetzt Δx unangebbar klein werden, so haben wir $\overline{F}_\infty = F = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_n^2 - x_0^2}{2}$ ir sind noch obendrein in der angenehmen Lage, die Richtigkeit unseres Er- es mit Hilfe der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes zu bestätigen. setzt man dort $y_0 = \frac{1}{3} x_0$ und $y_n = \frac{1}{3} x_n$, so erhält man genau dasselbe.

Begriff des unbestimmten Integrals.

Wir können unser Integral auch so schreiben:

$$\text{a) } F = \int_{x_0}^{x_n} \frac{1}{3} x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_n^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x_0^2}{2}$$

Wir haben nun unsere Rechnung unter der Voraussetzung ausgeführt, x_n eine einzige, wenn auch ganz beliebige Zahl, bedeute. Denken wir uns Rechnung für alle Werte des x_n von $-\infty$ bis $+\infty$ durchgeführt, so erhalte unendlich viele solche Gleichungen (a). Die können wir alle auf einmal anschr wenn wir statt des Zeichens x_n in der Gleichung (a) das Zeichen der unabh Veränderlichen (x) einsetzen, denn darunter haben wir uns ja alle Werte von bis $+\infty$ auf einmal zu denken. Dann hat man:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{3} x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x_0^2}{2}$$

und dieses Integral, bei dem die eine Grenze eine veränderliche Größe ist, man ein unbestimmtes Integral. Man läßt dann die Grenzen in der Regel weg und schreibt:

$$\int \frac{1}{3} x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Das $C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x_0^2}{2}$ ist hier wegen der beliebig zu wählenden Zahl x_0 selbst ganz willkürliche Konstante.

Ferner erkennt man sofort, daß man aus dem unbestimmten Integra bestimmte einfach dadurch erhält, daß man in das unbestimmte Integral sta Veränderlichen x die beiden Grenzen x_n und x_0 einsetzt und von dem für die Grenze erhaltenen Werte den durch die untere Grenze gelieferten abzieht. Konstante C fällt dabei weg.

Schwierigkeit der Berechnung des bestimmten Integrals.

Genau dieselbe Rechnungsanlage läßt sich zur Flächenberechnung in allen anderen
n verwenden, wenn auch die unsere Fläche begrenzende Linie keine Gerade ist.

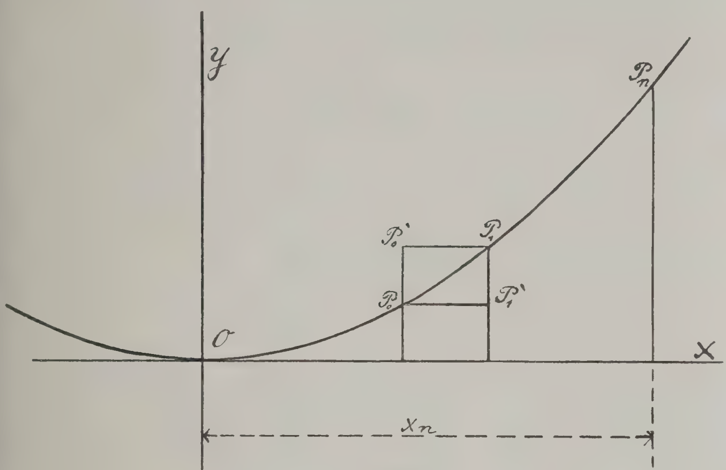


Fig. 2.

Es sei z. B. eine Linie durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben. Diese Gleichung
eine Parabel dar, deren Hauptachse auf der positiven y-Achse des rechtwinkeligen
dinatensystems und deren Scheitel im Ursprung liegt. Es ist also:

$$\ldots{}^{n}\ldots{}^2dx = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ n = \infty}}\{x_0{}^2\Delta x + (x_0+\Delta x)^2\Delta x + (x_0+2\Delta x)^2\Delta x + \cdots + (x_0+n\cdot\Delta x)^2\cdot\Delta x\} =$$

$$\ldots m\{x_0{}^2\cdot n\,\Delta x + 2x_0(\Delta x)^2\{1+2+3+\cdots+n\} + (\Delta x)^3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\}\cdot$$

Addition der Gleichungen

$$\begin{aligned}
1^3 \quad &= 1^3 \\
\ldots 1)^3 = 2^3 \quad &= 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3 \\
\ldots 1)^3 = 3^3 \quad &= 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3 \\
\ldots 1)^3 = 4^3 \quad &= 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 + 1^3 \\
&\vdots \\
\ldots 1)^3 = (n+1)^3 &= n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3 \quad \text{gibt:}
\end{aligned}$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) + 3\,(1+2+3+\cdots+n) + n,$$

also: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - \frac{2}{3}n(n+1) - n - 1\right]$

$$= \frac{1}{3}\left[n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}\right]$$

Wir erhalten daher wegen $n \cdot \Delta x = x_n - x_0$:

$$\int_{x_0}^{x_n} x^2 dx = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ n = \infty}} \left\{ x_0^2 (x_n - x_0) + 2 x_0 (\Delta x)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^3 (\Delta x)^3}{2} + \frac{3}{2} \frac{n^2 \cdot (\Delta x)^3}{3} + \frac{n}{6} (\Delta x)\right.$$

$$= \lim \left\{ x_0^2 (x_n - x_0) + x_0 n \cdot \Delta x \cdot (n \cdot \Delta x + \Delta x) + \frac{1}{3} (n \cdot \Delta x)\right.$$

$$+ \frac{1}{2} (n \Delta x)^2 \Delta x + \frac{(n \cdot \Delta x)}{6} (\Delta x)$$

$$= \lim \left\{ x_0^2 (x_n - x_0) + x_0 (x_n - x_0) (x_n - x_0 + \Delta x) + \frac{(x_n - x_0}{3}\right.$$

$$+ \frac{(x_n - x_0)^2}{2} \cdot \Delta x + \frac{x_n - x_0}{6} \cdot (\Delta x$$

Für lim $\Delta x = 0$ bekommen wir daraus:

$$\int_{x_0}^{x_n} x^2 dx = x_0^2 (x_n - x_0) + x_0 (x_n - x_0)^2 + \frac{(x_n - x_0)^3}{3}$$

und durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\int_{x_0}^{x_n} x^2 dx = \frac{x_n^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}.$$

Setzt man wieder für x_n die unabhängig Veränderliche x, so erhält man unbestimmte Integral $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, genau so wie bei dem ersten Bei Wieder kann man auf dieselbe Weise wie früher aus dem unbestimmten Inte das bestimmte erhalten, indem man die Werte subtrahiert, die man bekommt, man in dem unbestimmten Integrale statt der Veränderlichen x die Werte x_n un einsetzt. An diesem Beispiel kann man schon erkennen, welche Schwierigkeiten bei der Auswertung eines bestimmten Integrals einstellen können. Es erscheint d als dringend geboten, eine andere Berechnungsweise des Integrals aufzufinden, wenigstens in sehr vielen Fällen eine raschere Durchführung gestattet.

Der Differentialquotient.

Zu Integralen gelangt man nicht nur bei der Flächenberechnung, sondern
ı anderen Fällen. Es sei z. B. die Gleichung einer Linie L . . . $y = \frac{1}{3} \cdot x^3$
ı und es soll der Unterschied der Ordinaten (Höhenunterschied) der beiden

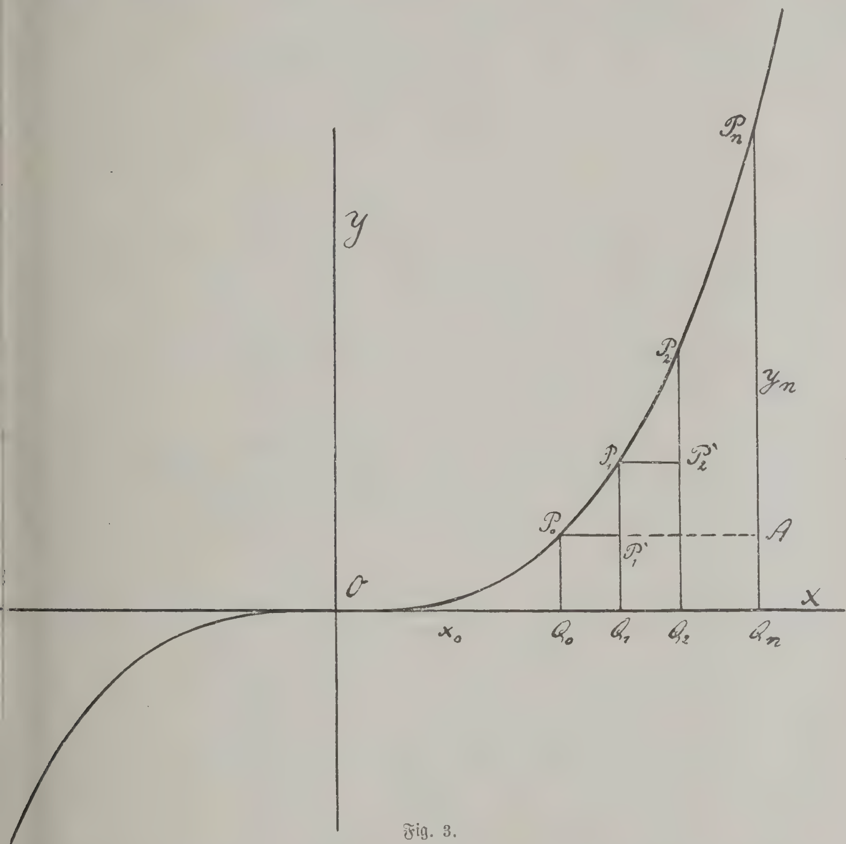


Fig. 3.

t P_0 und P_n auf ihr gefunden werden. Unsere Linie L berührt die x-Achse im
ıng und hat dort einen Wendepunkt. Der Höhenunterschied $\overline{A\,P_n} = y_n - y_0$
ı ittelbar bekannt, er kann aber wieder durch unendlich viele Grundrechnungs-
ı argestellt werden. Denn nehmen wir wieder $\Delta x = \frac{1}{n}(x_n - x_0) = \overline{Q_0\,Q_1}$, so ist
$y_0 = (\Delta y)_1 + (\Delta y)_2 + (\Delta y)_3 + \cdots + (\Delta y)_n$. Dabei bedeutet $(\Delta y)_1 = y_1 - y_0$;
$) = y_2 - y_1 ; \cdots (\Delta y)_n = y_n - y_{n-1}$. Wenn wir nun n ins Unendliche wachsen

lassen, ohne die Lage der P_0 und P_n zu ändern, so ist $y_n - y_0$ durch unendlich
Grundrechnungsarten dargestellt. Diese Darstellung ist aber noch kein Inte
wenigstens ist sie nicht unmittelbar als solches zu erkennen. Denn es müßte
die Glieder dieser Summe Produkte aus je einem unendlich kleinen Faktor
einem Faktor endlicher Größe sein. Es läßt sich aber jedes Δy als sold
Produkt darstellen. Ziehen wir nämlich die Strecke $\overline{P_0 P_1}$ und bezeichnen
Neigungswinkel zur positiven x-Richtung, d. i. $\sphericalangle P_1 P_0 P_1'$ mit α_1, so ist:

$(\Delta y)_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \Delta x$ und in derselben Weise:

$(\Delta y)_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \Delta x$ usw. Wir haben also:

$$y_n - y_0 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \Delta x + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \Delta x + \cdots + \operatorname{tg} \alpha_n \cdot \Delta x.$$

Denken wir uns jetzt das Δx kleiner als jede noch so kleine positive ange
Zahl, so haben wir $y_n - y_0$ als ein Integral dargestellt.

$$y_n - y_0 = \lim_{\substack{n = \infty \\ \Delta x = 0}} (\operatorname{tg} \alpha_1 \quad \Delta x + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \Delta x + \cdots + \operatorname{tg} \alpha_n \cdot \Delta x) = \int_{x_0}^{x_n} \operatorname{tg} \alpha \cdot d\, x.$$

Hier ist das Integral $y_n - y_0$ bekannt, denn aus der Gleichung fü
Linie L ergibt sich sofort: $y_n - y_0 = \frac{x_n^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}$; aber die Funktion $\operatorname{tg} \alpha$, di
der Integration von x_0 bis x_n dieses Integral gibt, ist nicht von vornherein bek
sie läßt sich jedoch leicht bestimmen. Man braucht ja nur z. B. für den Punk
das Verhältnis $\frac{(\Delta y)_1}{\Delta x}$ zu bilden und das Δx unendlich klein werden zu lassen.
wird, wie die Zeichnung lehrt, auch das $(\Delta y)_1$ unendlich klein, die durch die P
$P_0 P_1$ bestimmte Sekante unserer Linie L nimmt dabei eine gewisse Lage an
der man sie die im Punkte P_0 an die Linie L gezogene Tangente nennt.
Tangente hat einen ganz bestimmten Neigungswinkel zur positiven x-Richtung.
Ausdruck $\frac{(\Delta y)_1}{\Delta x}$ hat also, auch wenn wir Δx unendlich klein werden lassen, einen
bestimmten Wert, er ist nichts anderes als die trigonometrische Tangente des
gungswinkels (α_1') der im Punkte P_0 an die Linie L gezogenen geometrischen Tan
Dabei ist der begriffliche Unterschied zwischen der trigonometrischen Tangente
Winkels und der geometrischen Tangente, die an eine Linie in einem ihrer P
gezogen werden kann, wohl zu beachten, da der sprachliche Gleichklang in der ei
üblichen Ausdrucksweise zu Verwechslungen Anlaß geben kann. Die tatsächliche
stimmung dieses Grenzwertes ist einfach genug. Es ist doch: $\operatorname{tg} \alpha_1' = \lim_{\Delta x = 0}$
oder wegen $(\Delta y)_1 = y_1 - y_0$ $\quad \operatorname{tg} \alpha_1' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}$. Aus der Gleichung unserer Li
ergibt sich sofort: $y_1 = \frac{x_1^3}{3}$ und $y_0 = \frac{x_0^3}{3}$ und mit Rücksicht auf $x_1 = x_0 + \Delta x$ hat

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{1}{3}(x_0 + \Delta x)^3 - \frac{1}{3} x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{x_0^2 \Delta x}{\Delta x} + \frac{x_0 (\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{\frac{1}{3} (\Delta x)^3}{\Delta x} \right.$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left[x_0^2 + x_0 \Delta x + \frac{1}{3} (\Delta x)^2 \right].$$

Wird Δx unangebbar klein, dann ist eben $\mathrm{tg}\,\alpha_1' = x_0^2$. Führt man diese
achtung für alle zwischen P_0 und P_n liegenden Punkte der Linie L durch, so
t man unendlich viele Werte $\mathrm{tg}\,\alpha'$. Denkt man sich alle diese Werte auf ein-
so hat man damit eine von x abhängige veränderliche Größe gedacht. Diese
mit y' oder mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet und heißt der Differentialquotient der Funktion
$\frac{x^3}{3}$ nach x in dem Bereiche $x_n - x_0$. Die Auffindung des Differentialquotienten
Funktion ist wie bei diesem Beispiel auch sonst sehr häufig weitaus einfacher
die Ermittlung des Integrals, man hat ja bloß den Grenzwert des Verhält-
s aus der Änderung der abhängig Veränderlichen zur zugehörigen Änderung
unabhängig Veränderlichen zu bestimmen, der sich ergibt, wenn man die letztere
rung ihrem absoluten Werte nach kleiner als jede noch so kleine positive Zahl
t. Diesen Differentialquotienten einer Funktion haben wir aber nach

$$y_n - y_0 = \int_{x_0}^{x_n} \mathrm{tg}\,\alpha \cdot dx = \int_{x_0}^{x_n} y'\,dx$$

die Funktion von x kennen gelernt, deren Integral von x_0 bis x_n gleich der
renz ist, die man aus den Werten der gegebenen Funktion für $x = x_n$ und
x_0 erhält. Das heißt aber nichts anderes, als daß die gegebene Funktion bis
eine zu addierende willkürliche Konstante C das unbestimmte Integral ihres
rentialquotienten ist. Also: $y = \int y'\,dx + C$. Man kann dasselbe auch so
rücken: Die unangebbar kleine Änderung einer Funktion y, die zu einer unan-
r kleinen Änderung dx der unabhängig Veränderlichen gehört, ist als Produkt
dem Differentialquotienten y' und dem Differentiale dx der unabhängig Ver-
lichen darstellbar. Dieses Produkt nennt man das Differentiale dy der Funktion.
diese Eigenschaft des Differentialquotienten ist von grundlegender Wichtigkeit.
man nämlich irgend eine Funktion zu integrieren, so kann man folgendermaßen
hen:

Man bestimmt für alle überhaupt bekannten Funktionen die zugehörigen
rentialquotienten und sieht nach, ob einer davon mit der zu integrierenden
tion übereinstimmt. Ist dies der Fall, dann ist die Funktion, zu der dieser
rentialquotient gehört, schon das unbestimmte Integral der zu integrierenden
tion. Das bestimmte Integral ergibt sich dann, wie schon gezeigt, durch die
ung der Differenz aus den Werten, die das unbestimmte Integral für die
grationsgrenzen annimmt. Findet man aber unter allen gebildeten Differential-
enten keinen, der mit der zu integrierenden Funktion übereinstimmt, dann hilft
Sträuben nichts, dann muß man die Bestimmung des Integrals unmittelbar
r zuerst besprochenen Art vornehmen. Die Integraltheorie lehrt allerdings noch
e Mittel zur Bestimmung eines Integrals, doch kann hier von diesen noch
gesprochen werden.

Zur Klarstellung der Beziehung zwischen dem Integrieren und Differenzi sei noch auf Folgendes aufmerksam gemacht: Ist z. B. $z = \frac{x^3}{3}$ eine analyt Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und z, so ist bei der gewöh Schreibweise x als die unabhängig Veränderliche gedacht und z als die abhä Veränderliche. Man sagt statt dessen auch, z ist eine Funktion von x. Unter Umkehrung dieser Funktion versteht man nun die Funktion, die man erhält, w man x zur abhängig Veränderlichen macht und z zur unabhängig Veränderli Also: $x = \sqrt[3]{3z}$. Das unbestimmte Integral von $y = x^2$ ist nun, wie schon gez $z = \frac{x^3}{3}$ und der Differentialquotient von $z = \frac{x^3}{3}$ ist x^2, also von $x = \sqrt[3]{3z}$ gr verschieden. Man darf deshalb nicht sagen, daß der Differentialquotient Umkehrung des Integrals ist. Dies drückt sich schon äußerlich dadurch aus, bei dem unbestimmten Integrale einer Funktion so gut wie bei ihrem D rentialquotienten die unabhängig Veränderliche dieselbe ist. Ebensowenig man sagen, daß das Differenzieren die dem Integrieren entgegengesetzte Rechnu operation ist. Denn haben wir z. B. $y = x^2$ und bilden $\frac{dy}{dx}$, so gibt das w $\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$:
$\frac{dy}{dx} = 2x$; also $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$. Die Funktion y differenzieren heißt also in di Falle, die Quadratwurzel aus ihr doppelt nehmen. Bilden wir dagegen

$$J = \int y\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

so haben wir: $J = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{y})^3 + C$. Die Funktion y integrieren heißt also in di Falle, die dritte Potenz ihrer Quadratwurzel durch 3 dividieren und überdies eine willkürliche Konstante C addieren. Wir haben damit in diesem Beispiele das D renzieren und das Integrieren durch bekannte Rechnungsvorschriften ausgedrückt, mit der zu differenzierenden beziehungsweise zu integrierenden Funktion vorzuneh sind, um den Differentialquotienten beziehungsweise das unbestimmte Integral zu halten. Wäre nun wirklich das Differenzieren die dem Integrieren entgegenge Rechnungsvorschrift, so müßte ich wieder y bekommen, wenn ich aus $y = x^2$ zunächst $J = \frac{1}{3}(\sqrt{y})^3 + C$ bilde und dann die Quadratwurzel aus J doppelt ne Dann bekomme ich aber: $z = 2\sqrt{\frac{1}{3}(\sqrt{y})^3 + C}$. Daß das aber von $y = x^2$ gr verschieden ist, braucht wohl nicht weiter auseinandergesetzt zu werden. Es ist nicht richtig, das Differenzieren und Integrieren als Rechnungsvorschriften anzus die auf die gegebene Funktion anzuwenden sind, wie man deutlich erkennt, w man etwa $z = \frac{x^3}{3}$ differenziert. Das gibt $\frac{dz}{dx} = x^2$, heißt also hier wegen $x^2 = (\sqrt[3]{\ldots}$ aus dem Dreifachen von z die dritte Wurzel ziehen und das Erhaltene quadrieren.

, das Differenzieren bedeutet gar keine ein- für allemal feststehende Rechnungs-chrift, sondern die Ableitung einer neuen Funktion aus einer gegebenen durch n Grenzübergang, bei dem das Angebbare von dem unangebbar Kleinen getrennt). Die neue Funktion ist aber keineswegs aus der gegebenen durch eine all-ein gültige Rechnungsvorschrift zu erhalten. Und genau dasselbe gilt für das egrieren. Man kann eben bloß das aussagen, was schon früher ausgesprochen de: Sucht man zu einer gegebenen Funktion den Differentialquotienten und zu r neuen Funktion das unbestimmte Integral, so ist dieses letztere bis auf eine uzählende willkürliche Konstante gleich der ursprünglich gegebenen Funktion.

Bildung des Differentialquotienten.

$y = \frac{1}{3}x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^3$ sind drei verschiedene Funktionen von x. Wir ıten noch beliebig viele solche verschiedene Funktionen von x hinschreiben. Man ı nun die Forderung aufstellen, sich beliebig viele dieser Funktionen auf einmal denken. Diese Forderung drückt man durch das Zeichen $y = f(x)$ oder $y = \varphi(x)$ r $y = \psi(x)$, kurz dadurch aus, daß man zu irgend einem gewählten Buchstaben $\varphi, \psi \ldots$), der gleichsam den Namen der Funktion vorstellt, die unabhängig änderliche in der Klammer hinzusetzt. Diese Bezeichnungsweise wendet man allem bei Betrachtungen an, bei denen es auf die besondere Art der Funktion t weiter ankommt. Man wird also beispielshalber die Bildungsweise des Diffe-tialquotienten einer Funktion $y = f(x)$ folgendermaßen ausdrücken können: $= \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert eine nge wirklich denkbarer Zahlen liefert. Ist z. B. (x) eine konstante Zahl, so ist Differentialquotient von f(x) wegen des Verschwindens des Zählers gleich Null. eine andere Funktion $z = A \cdot f(x)$, wobei A eine konstante Zahl bedeutet, so nnt man sofort, daß $\frac{dz}{dx} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{A\,f(x + \Delta x) - A\,f(x)}{\Delta x} = A \cdot \frac{dy}{dx}$ ist. Der Diffe-tialquotient eines Produktes aus einer konstanten Zahl und irgend er Funktion y ist also gleich dem Produkt aus dieser konstanten hl und dem Differentialquotienten dieser Funktion y. Ist eine nktion die Summe zweier anderen Funktionen $y = f(x) + \varphi(x)$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x) - [f(x) + \varphi(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right\} = \frac{d\,f(x)}{dx} + \frac{d\,\varphi(x)}{dx}.$$

Es ist also der Differentialquotient einer Summe aus einer dlichen Anzahl von Summanden gleich der Summe der Differential-otienten der einzelnen Summanden.

Ebenso ist der Differentialquotient einer Differenz gleich Differenz aus dem Differentialquotienten des Minuenden und des Subtrahenden.

Ist das Produkt zweier Funktionen $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ zu differenzieren, so hat

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot}{\Delta x}$$

und das gibt: $\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$, wenn $\varphi(x)$ die Eigenschaft daß es sich für unangebbar kleine Änderungen des x auch nur um unange Kleines ändert. Man sagt dann: $\varphi(x)$ ist eine stetige Funktion von x.

Der Differentialquotient eines Produktes zweier Faktoren ist die Summe zweier Produkte. Das eine entsteht durch Multiplikation einen Faktors mit dem Differentialquotienten des anderen und zweite Produkt durch Multiplikation des zweiten Faktors mit Differentialquotienten des ersten. Hat man einen Quotienten $y = \frac{f(x}{\varphi(x}$ differenzieren, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{\varphi(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) \varphi(x) - f(x) \varphi(x + \Delta x)}{\varphi(x + \Delta x) \cdot \varphi(x) \cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) \varphi(x) - f(x) \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \cdot \varphi(x)}{\varphi(x + \Delta x) \cdot \varphi(x) \cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x + \Delta x) \cdot \varphi(x)} = \frac{\varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} - f(x) \cdot \frac{d}{d}}{[\varphi(x)]^2}$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist also ein Bruch, des Nenner gleich dem Quadrate des gegebenen Nenners und dessen Zäh die Differenz zweier Produkte ist. Der Minuend ist das Produkt dem gegebenen Nenner und dem Differentialquotienten des gegebe Zählers und der Subtrahend ist das Produkt aus dem gegebenen Zäh und dem Differentialquotienten des gegebenen Nenners.

Mit Hilfe dieser Sätze läßt sich sofort der Differentialquotient von y= entwickeln, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

Es ist ja für $y = x$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 1$,

„ $y = x^2$ „ „ $\frac{dy}{dx} = 2x$,

„ $y = x^3$ „ „ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

Bezeichnen wir nun die Zahl 3 mit dem Zeichen p, so schreibt sich die l Zeile folgendermaßen:

$y = x^p$ hat den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1}$.

Wir bekommen also den Differentialquotienten dieser Potenz x^p, wenn wir Exponenten p mit der Potenz von x multiplizieren, deren Exponent um ner ist als p. Wir können uns aber leicht überzeugen, daß dieser Satz auch e Aufstellung des Differentialquotienten der Potenz von x gilt, deren Exponent größer ist als p. Haben wir nämlich die Potenz $y = x^{p+1}$ zu differenzieren, nen wir sie ja folgendermaßen als Produkt zweier Funktionen von x be- n: $y = x^p \cdot x$.

Nach unserer Regel über die Differentiation eines Produktes bekommen wir dann: $p\,x^{p-1} \cdot x + x^p \cdot 1 = (p+1) \cdot y^p$. Damit ist schon gezeigt, daß unser Satz die Differenzierung einer Potenz für jeden Fall gilt, bei dem der Exponent eine e ganze Zahl ist.

Ist der Exponent aber eine negative ganze Zahl, also $y = x^{-n}$, dann ist ja $\frac{}{n}$. Jetzt ist x als Quotient der Konstanten 1 und der Funktion x^n dargestellt. der bezüglichen Differenzierungsregel ist also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

Um den Satz für die Differenzierung einer Potenz auch für den Fall nach- zu können, daß der Exponent eine gebrochene Zahl ist, müssen wir vorerst Kenntnisse bezüglich der Differentiation im allgemeinen erweitern. Zu diesem e betrachten wir die Funktion $z = y^2 + y + 3$ oder allgemein bezeichnet: (y). Ihren Differentialquotienten nach y können wir auf Grund der voran- den Sätze sofort hinschreiben: $\frac{dz}{dy} = 2y + 1$, das ist in allgemeiner Bezeich- weise: $\frac{dz}{dy} = \lim\limits_{\Delta y = 0} \left[\frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}\right]$.

Wenn nun y selbst wieder eine Funktion von x ist, etwa $y = x^2 + 1 = f(x)$, wir f(x) als allgemeines Zeichen für die Funktion $(x^2 + 1)$ verwenden, so auch eine Funktion von x, die wir erhalten, wenn wir in $\varphi(y)$ statt des y unktion f(x) einsetzen. Also $z = \varphi[f(x)]$. Wir haben hier den Fall, daß eine gig Veränderliche z als eine Funktion einer Funktion von x dargestellt ist önnen uns jetzt die Aufgabe stellen, den Differentialquotienten dieser Funktion x zu bestimmen. Wir können das so durchführen, daß wir in z tatsächlich den Ausdruck $x^2 + 1$ einsetzen und dann nach x differenzieren. Also $= x^4 + 2x^2 + 1 + x^2 + 1 + 3 = x^4 + 3x^2 + 5$ und $\frac{dz}{dx} = 4x^3 + 6x$.

Wir können aber auch den allgemeinen Weg gehen. Es ist ja $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\varphi[f(x + \Delta x)] - \varphi[f(x)]}{\Delta x}$. Wenn wir hier Zähler und Nenner mit der Änderung multiplizieren, die zur Änderung Δx gehört, d. i. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, ben wir wegen $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left\{\frac{\varphi[y + \Delta y] - \varphi(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right\},$$

das ist aber: $\frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Wir bekommen also den Differentialquotienten v
nach x, wenn wir seinen Differentialquotienten nach y mit dem von y n
multiplizieren. Die Überprüfung dieses Satzes ist hier sehr leicht durchzuführe
ist ja $\frac{dz}{dy} = 2y + 1$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$, also $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (2y + 1) \cdot 2x$. Setzen
hierin $y = x^2 + 1$, so bekommen wir: $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (2x^2 + 3)\, 2x = 4x^3 + 6x$
das ist tatsächlich $\frac{dz}{dx}$.

Es verdient aber auch noch der Fall eine besondere Beachtung,
durch das Beispiel $z = xy + x + y$ veranschaulicht werden möge. Hier ist z
Funktion von x und von y und y selber soll wieder eine Funktion
x sein, sagen wir: $y = x^2 + 1$. Es soll nun der Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$ ge
werden. Wir können wieder für y einsetzen und den Differentialquotienten unmit
ausrechnen. Dann erhalten wir: $z = x(x^2+1) + x + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + 2x +$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2x + 2.$$

In allgemeinen Zeichen schaut der Fall jetzt so aus: $z = \psi[x, f(x)]$ un

a) $\frac{dz}{dx} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \left\{ \ldots \frac{\psi[x + \Delta x, f(x + \Delta x)] - \psi[x, f(x)]}{\Delta x} \right\}$. Für unser Beispiel gib

b) $\frac{dz}{dx} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) + x + \Delta x + y + \Delta y - xy - x - y}{\Delta x} \right\}$, und

Zusammenfassung:

c) $\frac{dz}{dx} = \lim\limits_{x = 0} \left\{ \frac{(y + 1)\Delta x + (x + 1 + \Delta x)\Delta y}{\Delta x} \right\}$, also:

d) $\frac{dz}{dx} = (y + 1) + (x + 1) \cdot \frac{dy}{dx}$.

Die beiden Klammerausdrücke $(y + 1)$ und $(x + 1)$ geben den Anlaß zu
wichtigen Bemerkung. Wenn man in $z = xy + x + y$ statt der Veränderlic
eine konstante Zahl, sagen wir Y, einsetzt, so bekommt man eine andere Fun
die mit (z) bezeichnet werden möge. Also: $(z) = Y \cdot x + x + Y$. Bildet man
für diese Funktion den Differentialquotienten nach x, so hat man eine Betrac
durchzuführen, die mit der Betrachtung b genau übereinstimmt, nur ist stat
dortigen y hier Y zu schreiben und das $\Delta y = 0$ zu nehmen, weil eben Y
Konstante ist. Dann bekommt man aber im Zähler der Gleichung c bloß das
Glied. Man sieht, der Ausdruck $(y + 1)$ in der Gleichung d ist die Funktion
man erhält, wenn man $z = xy + x + y$ so nach x differenziert, als ob y
konstante Größe wäre. Man nennt die dadurch erhaltene Funktion den par
Differentialquotienten von z nach x und bezeichnet sie mit $\frac{\partial z}{\partial x}$. Genau so sieht
ein, daß der Faktor des $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung d, also $(x + 1)$, nichts ander
als der mit $\frac{\partial z}{\partial y}$ zu bezeichnende partielle Differentialquotient von z nach y, de

ebildet wird, als ob das y die unabhängig Veränderliche und das in dem Aus-
e $z = xy + x + y$ vorkommende x eine konstante Zahl bedeutete. Man hat also:

e) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Zwecks Überprüfung dieser Formel hat man bloß für $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 1$, für $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 1$ für $\frac{dy}{dx} = 2x$ einzusetzen. Dann bekommt man mit Rücksicht auf $y = x^2 + 1$: $1 + (x + 1) \cdot 2x = x^2 + 2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 2x + 2$ und das ist $\frac{dz}{dx}$. Um be Betrachtung in allgemeinen Zeichen durchzuführen, brauchen wir bloß die hung a nochmals vorzunehmen und im Zähler ihrer rechten Seite $\psi[x, f(x + \Delta x)]$ ddieren und zu subtrahieren. Also:

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{\psi[x + \Delta x, f(x + \Delta x)] - \psi[x, f(x + \Delta x)] + \psi[x, f(x + \Delta x)] - \psi[x, f(x)]}{\Delta x} \right\}.$$

Das ist aber:

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{\psi[x + \Delta x, f(x + \Delta x)] - \psi[x, f(x + \Delta x)]}{\Delta x} + \frac{\psi[x, f(x + \Delta x)] - \psi[x, f(x)]}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\},$$

i wir beim zweiten Gliede zugleich mit Δy multiplizieren und dadurch dividieren. en wir uns nun Δx unangebbar klein, so erhalten wir:

g) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \psi[x, f(x + dx)]}{\partial x} + \frac{\partial \psi[x, f(x)]}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, indem wir bei dem zweiten Gliede sichtigen, daß $f(x) = y$ und $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ ist.

Soll nun die Gleichung g die einfache Gestalt der Gleichung e annehmen, ıß die Funktion $f(x)$ die Eigenschaft haben, sich bei einer unangebbar kleinen rung des x auch nur um unangebbar Kleines zu ändern, und ebenso muß die ion $\frac{\partial \psi[x, f(x)]}{\partial x}$ die Eigenschaft haben, sich nur um unangebbar Kleines zu n, wenn $f(x)$ sich um etwas unangebbar Kleines ändert. Man sagt dann $f(x)$ etig in bezug auf x und $\frac{\partial \psi[x, f(x)]}{\partial x}$ ist **stetig** in bezug auf $f(x)$. Diese schaft der Stetigkeit ist aber bei unserem Beispiel vorhanden, denn es ist ja $dx) = x^2 + 1 + [2x\,dx + (dx)^2]$ und der Ausdruck in der eckigen Klammer ist ebbar klein, wenn dies für dx gilt. Dasselbe trifft auch für $\frac{\partial \psi[x, f(x)]}{\partial x} = y + 1$, $(x) + 1$, in bezug auf $f(x)$ zu. Wenn aber diese Eigenschaft der Stetigkeit nden ist, dann ist eben $\frac{\partial \psi[x, f(x + dx)]}{\partial x}$ bis auf etwas unangebbar Kleines $\frac{\partial \psi[x, f(x)]}{\partial x}$ und wir haben:

h) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, indem wir bei dem Funktionszeichen ψ die Klammer r Angabe der veränderlichen Größen der Kürze wegen weglassen, was man tut, wenn dadurch keine Undeutlichkeit der Darstellung verursacht wird.

Damit ist nun folgendes gezeigt: Ist eine Veränderliche z eine Funktion unabhängig Veränderlichen x und einer selbst wieder von x ab-

hängigen Veränderlichen y, so kann der Differentialquotient vo nach x in jedem Falle als die Summe zweier Summanden dargest werden. Der eine Summand ist der partielle Differentialquoti von z nach x und der andere ist das Produkt aus dem partiellen Di rentialquotienten von z nach y und dem vollständigen Different quotienten von y nach x. Dieser Satz gilt immer dann, wenn die betrach Funktionen und ihre partiellen Differentialquotienten in dem zur Verwend kommenden Bereich der unabhängig veränderlichen Größe Mengen denkbarer Za vorstellen und stetig sind. Die Eigenschaft der Stetigkeit kommt z. B. allen Pote mit positiven ganzen Exponenten für alle endlichen Werte der Veränderlichen Für $y = x^2$ haben wir uns hievon bereits überzeugt. Bezeichnen wir nun den ponenten 2 allgemein mit p, so können wir uns sofort darüber klar werden, daß der Stetigkeit von $y = x^p$ schon die Stetigkeit von $z = x^{p+1}$ folgt. Denn es $z = x^p \cdot x$, also $z + \Delta z = (x+\Delta x)^p \cdot (x + \Delta x) = (x+\Delta x)^p \cdot x + (x+\Delta x)^p \cdot$ Wird nun Δx unangebbar klein, so wird das zweite Glied unangebbar klein, erste Glied unterscheidet sich aber von x^{p+1} bloß um etwas unangebbar Kle da sich ja $(x + dx)^p$ von x^p wegen der vorhandenen Stetigkeit nur um e unangebbar Kleines unterscheidet. Betrachten wir dagegen die Funktion $y = \frac{1}{x-a}$, wir unter a eine konstante Zahl denken, so läßt sich sehr leicht zeigen, daß durchaus nicht für alle Werte des x die Behauptung gilt, daß zu einer unange kleinen Änderung des x auch eine unangebbar kleine Änderung der Funkti gehört. Es ist ja $\Delta y = \frac{1}{x - a + \Delta x} - \frac{1}{x - a} = \frac{-\Delta x}{(x - a + \Delta x)(x - a)}$. Indem Zähler und Nenner durch Δx dividieren, erhalten wir: $\Delta y = \frac{-1}{\left(\frac{x-a}{\Delta x} + 1\right)(x -}$

Ziehen wir nun solche Werte des x in Betracht, die sich von a um etwas A bares unterscheiden, dann wird $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{x-a}{\Delta x}$ über alle Größen wachsen und de $\lim\limits_{x=0} \frac{-1}{\left(\frac{x-a}{\Delta x} + 1\right)(x - a)}$ unangebbar klein werden. Für alle Werte des x, di von a um etwas Angebbares unterscheiden, ist also unsere Funktion y stetig. die Stetigkeitsverhältnisse unserer Funktion auch für Werte des x zu untersu die sich von a um unangebbar Kleines unterscheiden, setzen wir zunächst $x -$ $= A \cdot \Delta x$, wobei A irgend eine konstante Zahl bedeutet. Dadurch drücken aus, daß wir jetzt die Stetigkeitsverhältnisse für Werte des x untersuchen w die sich von a um ein bestimmtes Vielfaches von Δx unterscheiden. Setze das in den Ausdruck für Δy ein, so bekommen wir: $\Delta y = \frac{-1}{(A + 1) \cdot A}$ Denken wir uns jetzt Δx unangebbar klein werdend, so gibt uns Δy die Änd der Funktion y, die zu der unangebbar kleinen Änderung des x gehört, für des x, die sich von a um die Größe $x - a = A \cdot dx$ unterscheiden, also für

die sich von a um unangebbar Kleines unterscheiden. Alle diese Werte des
mmengenommen nennt man die Umgebung von a.

Wir sehen nun unmittelbar, daß für solche Werte des x zu einer unangebbar
en Änderung des x unangebbar große Änderungen des y gehören, weil
$_0 \frac{-1}{(A+1)\,A\cdot\Delta x}$ über alle angebbaren Größen wächst. Setzen wir ferner noch
-1, so heißt das, wir betrachten die Änderung der Funktion für einen Wert
der um Δx kleiner ist als a. Dann ist der Faktor $(A+1)$ gleich Null, das
ber: das Δy ist für einen solchen Wert des x sinnlos, sowie ja die Funktion
t für den Wert $x = a$ keine denkbare Zahl liefert. Den Wert $x = a$ nennt
egen der auf die Änderung der Funktion bezüglichen Eigenschaft seiner Um-
eine Unstetigkeitsstelle oder singuläre Stelle der Funktion y, indem man
n Worte „Stelle“ daran denkt, daß ja jeder Zahlenwert a durch eine be-
e Stelle der Zahlenlinie geometrisch veranschaulicht wird. Man nennt eine
$x = a$ übrigens auch dann eine Unstetigkeitsstelle einer vorliegenden Funktion,
in ihrer Umgebung die zu unangebbar kleinen Änderungen der unabhängig
erlichen gehörigen Funktionsänderungen angebbare endliche Werte haben.
ntersuchung der Stetigkeitsverhältnisse der Funktionen und insbesondere ihrer
gkeitsstellen ist für die Entwicklung des mathematischen Denkens von der aller-
Bedeutung, muß aber dem Fachstudium vorbehalten bleiben.

Von der zuletzt erläuterten Art, den Differentialquotienten einer Funktion z zu
nen, kann man nun eine besondere Anwendung machen. Es sei wieder
$+x+y$ oder allgemein $z = \psi[x, y]$ und das y abermals eine Funktion von x,
en aber nicht welche, sondern bestimmen das z als eine Funktion von x. Dann
diese Gleichung auch y als eine Funktion von x bestimmt. Der einfachste Fall
der, daß wir z als eine konstante Zahl voraussetzen. Dann ist $\frac{dz}{dx} = 0$ und
ben $0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$ und daraus ergibt sich: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}$ oder in unserem
l $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x+1}$. Dieses Verfahren können wir anwenden, um den Diffe-
uotienten einer Potenz mit gebrochenem Exponenten zu bestimmen. Es sei

, wobei p und q positive ganze Zahlen bedeuten. Das heißt aber $x^p = y^q$.
trachten nun den Ausdruck $x^p - y^q = 0$ und bilden seinen Differential-
ten, der den Wert Null haben muß, da ja der Ausdruck selbst einen kon-
Wert hat, nämlich gleich Null ist. Das gibt: $p\,x^{p-1} - q\cdot y^{q-1}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$.
$\frac{y}{x} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$. Setzen wir hier für y den Ausdruck $x^{\frac{p}{q}}$ ein, so erhalten wir:
$= \cdot x^{p-1}\cdot x^{-\frac{p}{q}(q-1)} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$.

Auf diese Art sieht man ein, daß die Formel für die Differenzierung
Potenz $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ für alle positiven und negativen, ganzen und gebroch
Werte des n gilt.

Einiges über die Bildung von Integralen.

Hat man das unbestimmte Integral $J = \int x^p \, dx$ zu bilden, so hat man
zu bedenken, daß $z = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ gerade die Funktion ist, deren Differentialquotient
x gleich x^p ist, es ist also z bis auf eine beizuzählende willkürliche Konsta
das unbestimmte Integral J. Also: $J = \int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, dabei kann
irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein. Ausgenomm
bloß der Fall, daß $p = -1$ ist, denn dann bekommen wir: $\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{-1+1} +$
$= \frac{1}{0} + C$, die Division durch 0 ist aber sinnlos. Und das ist auch ganz i
Ordnung, denn das unbestimmte Integral kann keine konstante Zahl sein, da
sein Differentialquotient 0 und nicht $\frac{1}{x}$ wäre; es muß also eine veränd
Größe sein. Wir führen aber hier die Integration einer Potenz (x^p) dadurch
daß wir aus den Potenzen von x eine (x^{p+1}) heraussuchen, deren Differentialqu
bis auf einen konstanten Faktor $\left(\frac{1}{p+1}\right)$ gerade gleich der zu integrierenden
x^p ist. Nun ist aber die Potenz von x, für die ihr um 1 verminderter Exp
gleich (-1) ist, d. i. x^0, gar keine veränderliche Größe, sondern die Konstan
es kann also auch aus ihr durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor
keine veränderliche Größe erhalten werden, die ja das unbestimmte Integra
muß. Es macht sich hier eben die Tatsache geltend, daß das Integrieren kein
stehende Rechnungsvorschrift ist, sondern daß es sich hiebei um die Bildung
neuen Funktion handelt. Tatsächlich gibt es eine Funktion, die gleich $\int \frac{dx}{x}$ ist,
dies aber keine Potenz von x, sondern der natürliche Logarithmus hievon, do
auf die bezüglichen Betrachtungen hier nicht weiter eingegangen werden.

Ist das Integral eines Produktes aus einem konstanten Faktor A und
Funktion f(x) zu bilden, so hat man:

$$J = \lim_{\Delta x = 0} \left[A \cdot f(x_0) \cdot \Delta x + A f(x_1) \Delta x + \cdots + A f(x_{n-1}) \cdot \Delta x\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x = 0} A \cdot \left[f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x\right].$$

Da sich aber das A als konstante Zahl beim Kleinerwerden des Δx nicht können wir schreiben:

$J = A \cdot \lim [f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x]$. Das ist aber:

$$J = A \cdot \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx.$$

Es ist also das bestimmte Integral eines Produktes aus einem nten Faktor A und einer Funktion f(x) gleich dem Produkte aus Faktor A und dem bestimmten Integrale der Funktion f(x).

Hat man die Summe zweier Funktionen zu integrieren, so ist:

$$J = \int_{x_0}^{x_n} [f(x) + \varphi(x)] dx =$$

$$\{[f(x_0) + \varphi(x_0)] \Delta x + [f(x_1) + \varphi(x_1)] \Delta x + \cdots + [f(x_{n-1}) + \varphi(x_{n-1})] \Delta x\} =$$

$$\{f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + \varphi(x_0) \Delta x + \varphi(x_1) \cdot \Delta x + \\ + \cdots + \varphi(x_{n-1}) \cdot \Delta x\}$$

$$\{f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \Delta x\} +$$

$$\varphi(x_0) \cdot \Delta x + \varphi(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + \varphi(x_{n-1}) \cdot \Delta x\} = \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) \cdot dx.$$

also das bestimmte Integral der Summe zweier Funktionen der Summe der Integrale dieser Funktionen.

Ebenso sieht man ein, daß das bestimmte Integral der Differenz Funktionen gleich der Differenz aus dem Integrale des Minuenden em des Subtrahenden ist.

Daß dieselben Sätze auch für das unbestimmte Integral gelten, ist aus dessen ohne weiteres klar.

Die Regel über die Differenzierung eines Produktes läßt uns für das Inte- einen wichtigen Satz gewinnen. Dort hatte es für $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ geheißen:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \frac{d f(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{d \varphi(x)}{dx}.$$

Hier steht links vom Gleichheitszeichen eine Funktion von x und rechts die zweier Funktionen von x. Bildet man die bestimmten Integrale der beiden zwischen denselben Integrationsgrenzen, so muß man beiderseits dasselbe er- Also:

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) \cdot \frac{d f(x)}{dx} \cdot dx + \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot \frac{d \varphi(x)}{dx} \cdot dx.$$

Es müssen daher die unbestimmten Integrale der beiden Teile unserer Gleichung eine beizuzählende willkürliche Konstante übereinstimmen. Es ist also:

$$\int \frac{dy}{dx} \cdot dx + C = \int \varphi(x) \cdot \frac{d f(x)}{dx} \cdot dx + \int f(x) \cdot \frac{d \varphi(x)}{dx} \cdot dx,$$

wir die drei willkürlichen Konstanten zu einer einzigen zusammenziehen. Nach

der grundlegenden Eigenschaft des Differentialquotienten einer Funktion ist $\int \frac{dy}{dx} \cdot dx = y = f(x) \cdot \varphi(x)$. Man bekommt also:

$$f(x) \cdot \varphi(x) + C = \int \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot dx + \int f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot dx.$$

Daraus erhält man:

$$\int f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot dx = f(x) \cdot \varphi(x) - \int \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot dx + C.$$

Hat man demnach eine Funktion $z = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$ zu integrieren, die als Produkt aus einer Funktion $f(x)$ und dem Differentialquotienten einer an Funktion $\varphi(x)$ ist, so kann man das Integral bis auf eine beizuzählende wil liche Konstante C als eine Differenz darstellen. Der Minuend ist das Pro aus dem ersten Faktor $f(x)$ der zu integrierenden Funktion und j Funktion $\varphi(x)$, deren Differentialquotient $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ der zweite Faktor zu integrierenden Funktion ist, also dem unbestimmten Integrale di zweiten Faktors; der Subtrahend ist ein Integral, dessen Integ funktion $\varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$ das Produkt aus dem unbestimmten Integrale zweiten Faktors der ursprünglichen Integralfunktion und dem D rentialquotienten ihres ersten Faktors ist. Die Anwendung dieses Satzes n man „partielle Integration". Es sei z. B. das Integral $\int (4x + 5)\, x^2\, dx$ zu bi

Da nehmen wir $4x + 5 = f(x)$ und $x^2 = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, dann ist wegen $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$ - die Funktion $\varphi(x) = \frac{x^3}{3}$ und $\frac{df(x)}{dx} = 4$, indem wir aus Bequemlichkeitsrücksi das willkürliche C_1 gleich Null nehmen. Wir haben also:

$$\int (4x + 5) \cdot x^2\, dx = (4x + 5)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot 4 \cdot dx + C =$$

$$= (4x + 5)\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}\int x^3\, dx + C =$$

$$= (4x + 5)\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{4}{3}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x^4}{3} + C =$$

$= x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$. Die Richtigkeit dieses Ergebnisse leicht zu erproben. Es ist ja:

$$\int (4x + 5) \cdot x^2\, dx = \int (4x^3 + 5x^2)\, dx = \int 4x^3\, dx + \int 5x^2\, dx =$$

$$= x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C.$$

Anwendungen.

Tangentenproblem.

Bei der Einführung des Begriffes des Differentialquotienten haben wir schon n, daß der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ die trigonometrische ente des Neigungswinkels der geometrischen Tangente an die durch die hung $y = f(x)$ vorgestellte Linie zur positiven x-Richtung angibt.

Hat man also z. B. für den Kreis mit der Gleichung $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ichtungskonstante einer geometrischen Tangente zu bilden, so betrachtet man $p)^2 + (y-q)^2$ als eine Funktion $z = \varphi[x, f(x)]$, wobei das z eine Konstante, ch r^2, ist. Man hat dann: $2(x-p) + 2(y-q)\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-p}{y-q}$. lso für irgend einen Punkt $(x_1\, y_1)$ unseres Kreises die Richtungskonstante der örigen geometrischen Tangente zu bestimmen, so hat man bloß die Koordinaten Punktes $(x_1\, y_1)$ in dem Ausdruck für den Differentialquotienten einzusetzen, ß die Gleichung der Kreistangente lautet: $Tg \cdots y - y_1 = -\frac{x_1-p}{y_1-q}(x - x_1)$.

Genau so verfährt man bei anderen Kurven. Für die Ellipse hat man:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Also: $Tg \cdots y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$.

Für die Hyperbel ergibt sich: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$;

$\cdots y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$.

Im Falle der Parabel bekommt man:

$^2 - 2px = 0$; $2y\frac{dy}{dx} - 2p = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, $Tg \cdots y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$.

Flächenberechnung.

Die Anwendung des Integrierens zur Flächenberechnung wurde bei der A stellung des Integralbegriffes bereits gezeigt. Dort haben wir eine Parabel benü deren Hauptachse mit der positiven y-Achse und deren Scheitel mit dem Urspr des Koordinatensystems zusammenfällt. Nehmen wir jetzt eine Parabel, deren Hau achse mit der positiven x-Achse und deren Scheitel wieder mit dem Ursprung sammenfällt, so lautet deren Gleichung $y^2 = 2p \cdot x$ oder $y = \sqrt{2px}$, wenn man Flächenberechnung für den Teil der Parabel durchführen will, der im ersten Quadran liegt. Dann ist die Fläche, die von den Koordinaten $x_1 y_1$ eines Parabelpunktes u von dem Parabelbogen begrenzt wird, der durch den Ursprung und den Punkt $(x_1,$ bestimmt ist, durch folgendes Integral gegeben:

$$J = \int_0^{x_1} \sqrt{2px} \cdot dx = \sqrt{2p} \cdot \int_0^{x_1} x^{1/2}\, dx = \sqrt{2p} \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)_0^{x_1}.$$ Setzt man die Integratio grenzen tatsächlich ein und subtrahiert, so hat man:

$$J = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x_1^{3/2} = \frac{2}{3} x_1 \cdot \sqrt{2p \cdot x_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1.$$

Um auch für die Ellipse die Flächenberechnung durchführen zu können, m man die Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen und ihrer U kehrungen, der sogenannten zyklometrischen Funktionen, kennen.

Für $y = \sin x$ bekommen wir als Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}\right].$$

Nun wird aber $\cos \Delta x$ für ein unangebbar kleines Δx von 1 unangeb wenig verschieden und $\sin \Delta x$ selbst unangebbar klein. Denken wir uns d Winkel x im Bogenmaß gemessen, dann fällt $\sin \Delta x$ mit Δx für ein unangeb kleines Δx zusammen, ihr Verhältnis $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$ ist also gleich 1 und wir erhalte

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Für die Funktion $y = \cos x$ bekommen wir:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}\right] = -\sin$$

Um für die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ den Differentialquotienten zu bilden, könn wir $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ setzen und die Regel für die Differenzierung eines Quotienten a wenden. Es ist dann:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sim}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Für $y = \operatorname{cotg} x$ können wir es gerade so machen. Also:

$\frac{\cos x}{\sin x}$; $\frac{d \operatorname{cotg} x}{d x} = \frac{\sin x \cdot - \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = - \frac{1}{\sin^2 x}$.

Ist wieder $y = \sin x$, dann ist x der Bogen auf dem Einheitskreis, dessen y ist. Man schreibt:

$x = \operatorname{arc} \sin y$ und spricht: x ist der Arcussinus von y.

Bei dieser Darstellungsweise ist y die unabhängig Veränderliche und x die ige. Mit welchem Zeichen wir die unabhängig Veränderliche bezeichnen, ist ltig, denn man hat sich darunter immer dasselbe, nämlich alle Werte $-\infty$ bis $+\infty$ auf einmal zu denken, die auf der Zahlenlinie überhaupt zur lung kommen. Wir bezeichnen darum die unabhängig Veränderliche auch hier mit x und die abhängig Veränderliche zum Unterschied von früher mit u. $u = \operatorname{arc} \sin x$; dann ist $x = \sin u$ und $x - \sin u = 0$. Jetzt wenden wir die Differentiationsweise an, die wir für den Fall $z = \varphi[x, f(x)]$ kennen haben. Dann erhalten wir: $1 - \cos u \cdot \frac{d u}{d x} = 0$; also $\frac{d u}{d x} = \frac{1}{\cos u}$. Wegen $= x$ haben wir $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$, somit $\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Für $u = \operatorname{arc} \cos x$ haben wir: $x = \cos u$; $x - \cos u = 0$; $1 + \sin u \cdot \frac{d u}{d x} = 0$; $-\frac{1}{\sin u}$, also: $\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{d x} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Für $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ erhält man: $x = \operatorname{tg} u$; $x - \operatorname{tg} u = 0$; $1 - \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{d u}{d x} = 0$; $\cos^2 u$. Daraus folgt nun wegen $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}$: $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Und für $u = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ bekommt man: $x = \operatorname{cotg} u$; $x - \operatorname{cotg} u = 0$; $\frac{}{u} \cdot \frac{d u}{d x} = 0$; $\frac{d u}{d x} = - \sin^2 u$, also wegen $\sin u = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 u}}$: $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x}{d x} = \frac{1}{+ x^2}$. $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ nennt man zyklo-e Funktionen von x.

Hat man nun etwa für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ das zwischen den Ordinaten y_n zweier Punkte P_0 und P_n der Ellipse gelegene Flächenstück zu berechnen, wir annehmen wollen, daß y_0 und y_n gleich bezeichnet sein sollen, etwa positiv, wegen $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$$F = \int_{x_0}^{x_n} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot d x = a b \int_{x_0}^{x_n} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot d \left(\frac{x}{a}\right).$$

Setzen wir $\frac{x}{a} = y$, so nimmt y für den Wert $x = x_0$ den Wert $y_0 = \frac{x_0}{a}$ r den Wert $x = x_n$ den Wert $y_n = \frac{x_n}{a}$ an. Es ist also für die neue rliche y das bestimmte Integral von $y_0 = \frac{x_0}{a}$ bis $y_n = \frac{x_n}{a}$ zu erstrecken.

$F = ab\int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x_n}{a}} \sqrt{1-y^2}\cdot dy$. Durch partielle Integration bekommen wir: $\int\sqrt{1-y^2}$

$= y\sqrt{1-y^2} - \int y \cdot \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$, und durch Addition und Subtraktion vo

Zähler der Integralfunktion: $= y\sqrt{1-y^2} - \int\frac{(1-y^2-1)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$. So erhält

$\int\sqrt{1-y^2}\cdot dy = y\sqrt{1-y^2} - \int\sqrt{1-y^2}\,dy + \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Addiert man beid

$\int\sqrt{1-y^2}\,dy$ und dividiert durch 2, so gibt das wegen: $\frac{d \arc \sin y}{dy} = \frac{}{\sqrt{1}}$

$\int\sqrt{1-y^2}\cdot dy = \frac{1}{2}\left\{y\sqrt{1-y^2} + \arc\sin y + C\right\}$. Setzen wir nun in den

druck für F ein, so ist:

$$F = \frac{ab}{2}\cdot\left\{\frac{x_n}{a}\sqrt{1-\frac{x_n^2}{a^2}} + \arc\sin\frac{x_n}{a} - \frac{x_0}{a}\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} - \arc\sin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Nimmt man $x_0 = -a$ und $x_n = +a$, so bekommt man, da der

dessen sin gleich 1 ist, bekanntlich gleich $\frac{\pi}{2}$ und der, dessen sin gleich —

gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist: $F = \frac{ab\pi}{2}$. Für die ganze Ellipse ist dann der Fläche

$2F = ab\pi$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Um die Maxima und Minima einer Funktion mit Hilfe ihres Differential-
nten bestimmen zu können, muß man den Mittelwertsatz der Differential-
ung kennen.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Linie L, die in dem durch die Punkte
ıd P_n begrenzten Bereiche der unabhängig Veränderlichen so verlaufe, wie es
ntenstehende Figur anzeigt. Dann gibt es auf dieser Linie zwischen P_0 und P_n

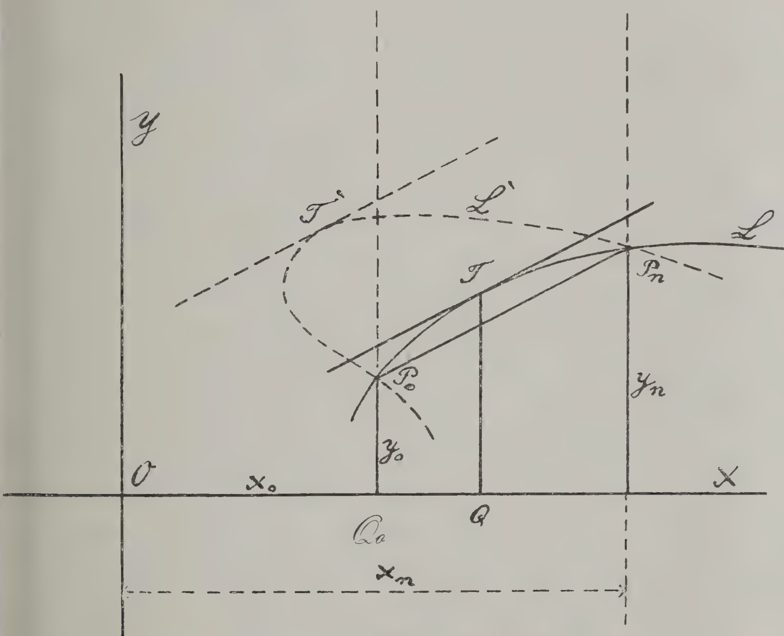


Fig. 4.

Punkt T von der Art, daß die durch ihn an die Linie gezogene Tangente
Sehne $P_0 P_n$ parallel ist. Die Richtungskonstante dieser geometrischen Tangente
r durch den Differentialquotienten $f'(x)$ gegeben, wenn wir in ihm für die unab-
ıg Veränderliche die Abszisse des Punktes T einsetzen. Diese ist größer als x_0 und
r als x_n. Wir können sie deshalb dadurch zur Darstellung bringen, daß wir zu x_0
Wert (Q_0Q) addieren, der kleiner als die Differenz $x_n - x_0 = h$ ist. Dieses (Q_0Q)
en deshalb als ein Produkt aus h und einer gewissen positiven Zahl ϑ dar-

stellbar, die kleiner ist als 1. Da wir uns nun die Tangente zur Sehne P_0
parallel gezogen denken, muß die Richtungskonstante dieser Tangente, d. i. $f'(x_0 + \vartheta$
gleich der Richtungskonstante der Sehne, d. i. $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{h}$, sein. Setzen wir
Zähler noch statt x_n den Ausdruck $(x_0 + h)$ ein, so bekommen wir:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta \cdot h).$$

Links vom Gleichheitszeichen steht der Quotient aus der Differenz der dinaten und der der Abszissen der Begrenzungspunkte unseres Linienstückes, nennt ihn den „Differenzenquotienten" des betrachteten Linienstückes. Rechts Gleichheitszeichen steht der Differentialquotient der Funktion, durch die unsere analytisch dargestellt wird, und es ist in ihm statt der Veränderlichen ein zwischen Abszissen der Begrenzungspunkte unseres Linienstückes liegender mittlerer $(x_0 + \vartheta h)$ eingesetzt. Den dadurch erhaltenen Wert nennt man einen „Mittel des Differentialquotienten" für das betrachtete Linienstück. Die obige Gleich lautet dann in Worten: Für ein derartiges Linienstück ist der Differenzenquo seiner Endpunkte gleich einem Mittelwert des Differentialquotienten der Funk durch die die bezügliche Linie dargestellt wird. Diesen Satz nennt man den Mi wertsatz der Differentialrechnung. Er gilt durchaus nicht für jedes wirkliche Li stück, das von P_0 bis P_n gezogen werden kann. Betrachten wir z. B. die gestric Linie L' unserer Figur, so sehen wir, daß es auf ihr allerdings einen Punkt zwischen P_0 und P_n gibt, für den die durch ihn gezogene Kurventangente zur S $P_0 P_n$ parallel ist, die Abszisse dieses Punktes T' liegt aber nicht zwischen Werten x_0 und x_n. Dies kommt daher, weil der Punkt T' außerhalb des Strei liegt, der durch die zwei zur y-Achse parallelen Geraden gebildet wird, die durch die Punkte P_0 und P_n ziehen kann. Diesen Fall können wir durch die Vor setzung ausschließen, daß unsere Funktion in dem betrachteten Bereiche eindeutig Denn dann kann die hierdurch dargestellte Linie den durch die Punkte P_0 und bestimmten, zur y-Achse parallelen Streifen nirgends verlassen, weil ja sonst einem wirklichen, im Endlichen verlaufenden Linienzug von P_0 nach P_n wegen notwendigen Wiedereintrittes in diesen Streifen zur Abszisse x_0 beziehungsweise mindestens zwei Ordinatenwerte gehören müßten. Die Worte „wirklicher, im lichen verlaufender Linienzug" beinhalten, daß die bezügliche Funktion in dem reiche $x_n - x_0$ reelle endliche Werte haben und stetig sein muß. Es kann aber Funktion in dem betrachteten Bereiche überall eindeutig endlich und stetig ohne daß der Mittelwertsatz gilt.

Wenn nämlich die durch die Funktion dargestellte Linie eine Ecke hat, dann der Fall eintreten, daß sich kein Punkt T finden läßt, für den die durch ihn gezo Kurventangente zur Sehne $P_0 P_n$ parallel wäre, wie die nachstehende Figur z

In der Umgebung der Ecke R ist zwar die Funktion f(x) selbst stetig, für ihren Differentialquotienten gilt es nicht mehr, daß er sich für unangel kleine Änderungen des x auch nur um unangebbar Kleines ändert. Denn

t R nimmt bezüglich der Lage der geometrischen Kurventangente eine Aus-
sstellung ein. Für alle anderen Kurvenpunkte P zwischen P_0 und R und
jen R und P_n ist es nämlich richtig, daß sich die beiden geometrischen Tan-
n, die man in den beiden ihnen unendlich benachbarten Punkten P' und P''

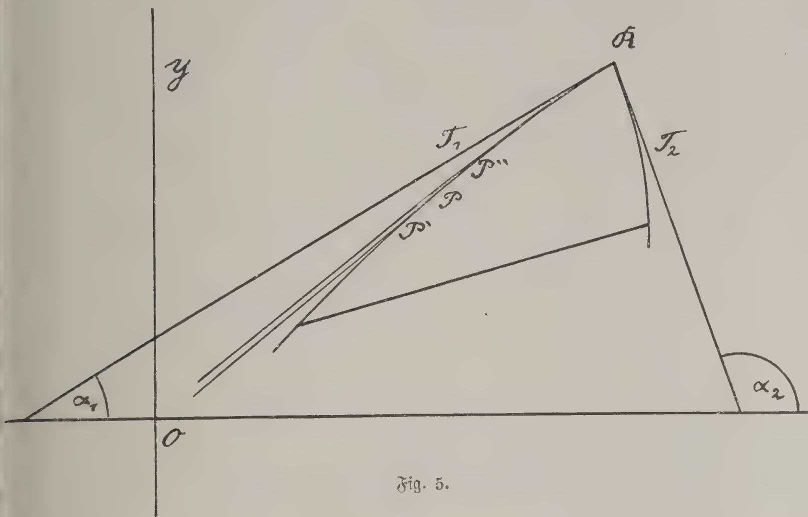


Fig. 5.

die Kurve ziehen kann, ihrer Lage nach nur unangebbar wenig voneinander
scheiden, so daß sich die Werte des Differentialquotienten, durch die ja die
ungskonstanten dieser geometrischen Tangenten vorgestellt werden, für die
te P' und P'' auch nur um unangebbar wenig unterscheiden, für den Punkt R
das aber nicht, denn der zu R gegen P_0 hin benachbarte Punkt ergibt $R\,T_1$
Kurventangente mit der Richtungskonstante $\operatorname{tg} \alpha_1$ und der gegen P_n hin zu R
chbarte Kurvenpunkt ergibt $R\,T_2$ als Tangente mit der Richtungskonstante $\operatorname{tg} \alpha_2$.
e beiden Richtungskonstanten $\operatorname{tg} \alpha_1$ und $\operatorname{tg} \alpha_2$ sind aber um einen endlichen
ag voneinander verschieden und können beide als zum Punkte R gehörig be-
tet werden — man sagt dann: „der Differentialquotient ist im Punkte R
deutig" —, oder sie können auf die gegen T_1 beziehungsweise T_2 hin gelegenen
barpunkte der Stelle R bezogen werden; dann sind also die Kurvenpunkte, zu
n sie gehören, nur um unangebbar wenig voneinander entfernt, so daß sich
Abszissen auch nur um unangebbar wenig voneinander unterscheiden. Es hat
der Differentialquotient der Funktion, durch die unsere Kurve dargestellt wird,
Eigenschaft, daß er für Kurvenpunkte, deren Abszissen sich voneinander um
ngebbar wenig unterscheiden, um einen endlichen, angebbaren Betrag ver-
dene Werte hat, wenn der Punkt R zwischen den beiden betrachteten Kurven-
ten liegt. Der Differentialquotient ist also unstetig für jenen Wert seiner unab-
igen Veränderlichen, der gleich der Abszisse des Punktes R ist. Eine solche Ecke
: Kurve kommt demnach mathematisch dadurch zum Ausdruck, daß der Diffe-

rentialquotient der Funktion, durch die unsere Kurve vorgestellt wird, fü Abszisse des Eckpunktes zweideutig und unstetig wird. Setzen wir also vo daß die Funktion und ihr Differentialquotient für alle Punkte des betrach Kurvenstückes $P_0 P_n$ wirklich angebbare Werte haben und beide eindeutig und sind, dann kann eben keine solche Ecke in dem betrachteten Kurvenstück vorkon und dann gilt hiefür der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Man könnte freilich einwenden, daß ein Eckpunkt R auch so beschaffen könnte, daß die beiden Tangenten $T_1 R$ und $T_2 R$ in eine einzige zusammenf die mit R T bezeichnet werden soll, dann wäre $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$, also der Differentialquotient scheinbar stetig. Man hätte es dann mit einem sogenannten Rückkehrpunkt der Kurve zu tun. Aber auch dieser Fall ist durch unsere Voraussetzungen bereits ausgeschlossen. Denn ist die Tangente R T zur x-Achse geneigt, dann muß die Funktion wenigstens in der Umgebung des Punktes R zwei- oder mehrdeutig sein, weil ja dann zu derselben Abszisse x_1 minde 2 Ordinaten y_1 und y_1' gehören müssen.

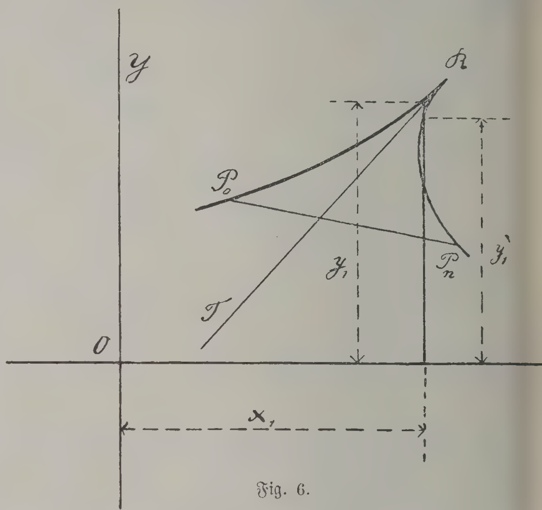


Fig. 6.

Steht aber die Tangente R T auf der Abszissenachse senkrecht, dann wieder zwei Fälle zu untersche Es können nämlich die dem Pun benachbarten Kurventeile beide derselben Seite der Tange R T auf entgegengesetzten Seiten d Geraden liegen. In dem ersten müßte die Funktion in der Umge des Punktes R zwei- oder mehrd sein (Fig. 7), im zweiten Falle ist zwar die Funktion von P_0 bis P_n deutig, aber ihr Differentialquotie für die Abszisse ξ des Punktes R un (Fig. 8). Denn für Punkte zwisch und P_0 ist er wegen $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \mathrm{tg}\,\alpha$ positiv und wächst bei der Annäherung a über alle Grenzen und für Punkte zwischen R und P_n ist er negativ und n

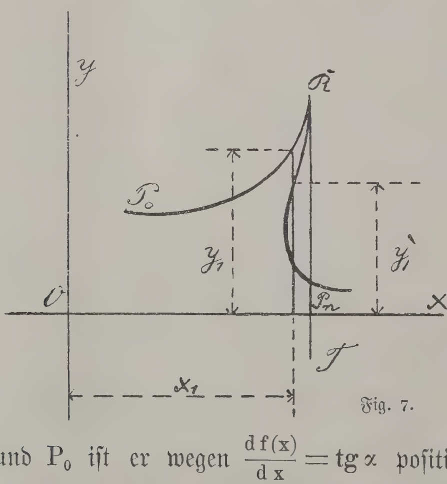


Fig. 7.

:r Annäherung an R dem absoluten Betrage nach gleichfalls über alle
:n, so daß also der Unterschied zwischen den Werten des Differential-
:uten unserer Funktion für zwei Punkte der Umgebung von R jedenfalls

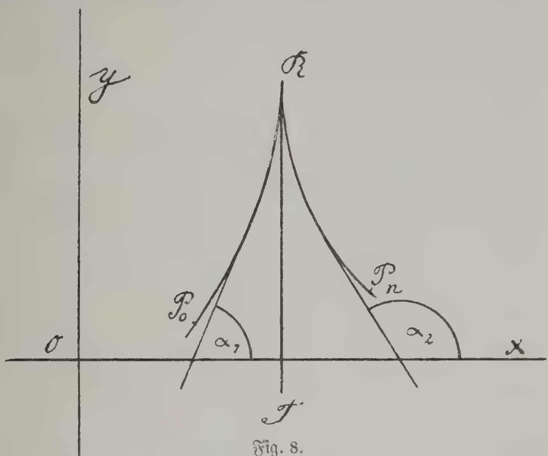


Fig. 8.

unendlich groß ist, wenn der eine Punkt von R aus gegen P_0 hin und
:dere gegen P_n hin liegt. Es sind also durch die obigen Voraussetzungen für
:nktion und ihren Differentialquotienten alle Fälle ausgeschlossen, in denen
:ittelwertsatz möglicherweise ungiltig ist.

Maxima und Minima.

Man sagt, eine Funktion hat an einer Stelle x_1 ein Maximum oder
:num, wenn die Funktionswerte für alle Werte aus der Umgebung der
x_1 kleiner beziehungsweise größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_1.
sieht, das Wort Maximum besagt nicht, daß der betreffende Funktionswert
:upt der größte aller Werte unserer Funktion ist, sondern bloß, daß die
:enz aus einem Funktionswert, der zu irgend einem Werte der unabhängig
:derlichen aus der Umgebung der Maximum- beziehungsweise Minimumstelle
und dem als Maximum beziehungsweise Minimum bezeichneten Funktions-
negativ beziehungsweise positiv ist.

Die Abszissen der Umgebungsstellen des Wertes x_1 bezeichnen wir mit $x_1 + h$,
wir unter h alle positiven und negativen Werte auf einmal denken, die dem
:ten Betrage nach kleiner als eine beliebig klein gegebene positive Zahl sind.
:t nun für eine Funktion $y = f(x)$ und für ihren Differentialquotienten die
:ssetzungen für das Zutreffen des Mittelwertsatzes, dann ist:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = h \cdot f'(x_1 + \vartheta h) \text{ und}$$

$$f'(x_1 + \vartheta h) - f'(x_1) = \vartheta \cdot h \cdot f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta h),$$ wenn wir
:ittelwertsatz auch auf den Differentialquotienten $f'(x)$ anwenden, mit $f''(x)$

den Differentialquotienten von $f'(x)$ und mit ϑ_1 wieder eine gewisse positi
bezeichnen, die kleiner ist als 1.

$f''(x)$ nennt man den zweiten Differentialquotienten von $f(x)$. Da
zweite Gleichung gilt, muß auch $f''(x)$ in dem betrachteten Bereiche ei
endlich und stetig sein. Setzt man in der ersten Gleichung für $f'(x + \vartheta h)$
zweiten Gleichung ein, so hat man:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = h \cdot f'(x_1) + \vartheta \cdot h^2 \cdot f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot h).$$

Soll nun die Differenz $f(x_1 + h) - f(x_1)$ für positive und negative
des h dasselbe Vorzeichen haben, so muß $f'(x)$ an der betrachteten Stelle x
Null sein, weil ja sonst das erste Glied der rechten Seite mit h zugleich sei
zeichen wechselt und gerade dieses erste Glied über das Vorzeichen der
rechten Seite bei genügend kleinem h entscheidet. Es ist ja:

$$h f'(x_1) + \vartheta h^2 \cdot f''(x_1 + \vartheta_1 \vartheta \cdot h) = h \cdot [f'(x_1) + \vartheta \cdot h \cdot f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot$$

und man könnte nun h dem absoluten Betrage nach jedenfalls so klein wähl
das zweite Glied der eckigen Klammer absolut genommen kleiner ist als d
Glied $f'(x_1)$, wenn dieses einen von Null um Angebbares verschiedenen W
Es muß also, soll x_1 eine Maximum- oder Minimumstelle sein, $f'(x_1)$ glei
sein. Man hat dann:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \vartheta \cdot h^2 f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot h).$$

Ist nun $f''(x_1)$ von Null um Angebbares verschieden, so haben die
$f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot h)$ und $f''(x_1 - \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot h)$ mit $f''(x_1)$ für ein genügend kle
dasselbe Vorzeichen, da sich die Werte $f''(x_1 + \vartheta_1 \cdot \vartheta \cdot h)$ und $f''(x_1 - \vartheta_1$
von dem Wert $f''(x_1)$ wegen der für $f''(x)$ vorausgesetzten Stetigkeit bei
gebbar kleinem h nur um unangebbar Kleines unterscheiden können. Wi
also die Maximum- und Minimumstellen einer Funktion $f(x)$ finden, so b
man durch Auflösung der Gleichung $f'(x_1) = 0$ jene Werte der unabhängi
änderlichen x, für die der erste Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet. Von
Stellen sind nun diejenigen solche der gesuchten Art, für die der zweite Diffe
quotient $f''(x)$ einen von Null verschiedenen angebbaren Wert hat. Ist diese
positiv, so haben wir es mit einem Minimum zu tun, ist er negativ, mit
Maximum. Man kann diese Untersuchungen in ähnlicher Weise für den Fall
ausführen, daß $f''(x_1)$ selbst gleich Null ist, doch soll hievon an dieser
Umgang genommen werden.

Es ist z. B. beim lotrechten Wurf nach aufwärts

$s = ct - \frac{gt^2}{2}$, wobei x die Maßzahl des Weges,
c „ „ der Anfangsgeschwindigkeit,
g „ „ der Fallbeschleunigung
und t „ „ der Zeit bedeutet.

Soll nun die größte Höhe bestimmt werden, bis zu der der geworfene
emporsteigt, so bildet man den ersten und den zweiten Differentialquotienten
$s' = c - gt$, $s'' = -g$.

Sucht man jetzt den Wert t_1, für den $s' = 0$ ist, so bekommt man $t_1 = \frac{c}{g}$, [z]weite Differentialquotient s'' ist für diesen wie für jeden anderen Wert des t [=] $-g$. Also ist s für $t = t_1$ ein Maximum und man bekommt hiefür $s_1 = \frac{c^2}{2g}$.

Bei der Gelegenheit sei bemerkt, daß man den zweiten Differentialquotienten [der] Funktion $y = f(x)$ auch mit $\frac{d^2 y}{d x^2}$ bezeichnet. Es ist nämlich

$$\frac{d f'(x)}{d x} = \frac{f'(x + d x) - f'(x)}{d x} = \frac{\frac{d f(x + d x)}{d x} - \frac{d f(x)}{d x}}{d x}.$$

Denkt man sich die Grenzübergänge zur Bildung der im Zähler vorkommenden Differentialquotienten noch nicht durchgeführt, so haben wir im Zähler zwei [Glieder] mit dem Nenner d x, und wenn wir uns die Freiheit nehmen, mit unendlich [kleinen] Größen wie mit endlichen zu rechnen, so bekommen wir:

$$\frac{d f'(x)}{d x} = \frac{d f(x + d x) - d f(x)}{(d x)^2} = \frac{d [y + d y] - d y}{(d x)^2}.$$

[d(y +] dy) bedeutet die Änderung der Summe $y + dy$, wenn das x um dx wächst. [Diese] Änderung ist die Summe aus der Änderung, die hiebei das erste Glied y [erfährt], d. i. dy, und aus der des zweiten Gliedes dy, d. i. d(dy) oder wie [man a]uch schreibt $d^2 y$. Also haben wir:

$$\frac{d f'(x)}{d x} = \frac{d y + d^2 y - d y}{d x^2} = \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Auswertung unbestimmter Ausdrücke.

Eine wichtige Anwendung findet die Differentialrechnung bei der Auswertung [von A]usdrücken, die für einen gewissen Wert der unabhängig Veränderlichen [die un]bestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. So nimmt der Ausdruck $y = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}$ [für de]n Wert $x = 3$ die Form $\frac{0}{0}$ an, die keinen bestimmten Zahlensinn hat.

Nun kann man allerdings für die Ausdrücke im Zähler und im Nenner [durch] Kettendivision das größte gemeinsame Maß suchen, Zähler und Nenner hie[mit] dividieren und so für y den Ausdruck $y = \frac{x + 4}{x + 2}$ erhalten, der für $x = 3$ [den W]ert $\frac{7}{5}$ hat. Dabei hat man freilich Zähler und Nenner durch $x - 3$ zu divi[dieren] gehabt und das ist ein Vorgang, der für den Wert $x = 3$ keinen Sinn hat. [Man] ist aber einfach übereingekommen, unter dem für $x = 3$ sinnlosen Zahlzeichen [$\frac{9 + 3}{9 - 3}$]$\frac{-12}{-6}$ die Zahl zu verstehen, die man erhält, wenn man in dem Ausdruck, [der du]rch die sogenannte Abkürzung entsteht, für x die Zahl 3 einsetzt. Was diese

Festsetzung aber eigentlich bedeutet, das lehrt uns die Differentialrechnung. Üb… läßt sie uns den dem erwähnten Übereinkommen entsprechenden Wert viel leichter fi…

Es sei $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ eine gebrochene Funktion, bei der für $x = x_1$ Z… und Nenner verschwinden, also $\varphi(x_1) = 0$ und $\psi(x_1) = 0$. Man ist nun üb… gekommen, als den Wert der Funktion $f(x)$ für $x = x_1$ denjenigen anzusehen… dem sich die Funktionswerte $f(x_1 + h)$ um unangebbar Kleines untersch… wenn h unangebbar klein ist. Wir stellen deshalb die Funktion $f(x)$ in der… gebung der Stelle x_1 folgendermaßen dar: $f(x_1 + h) = \frac{\varphi(x_1 + h)}{\psi(x_1 + h)}$ und schr… mit Rücksicht auf den Mittelwertsatz: $f(x_1 + h) = \frac{\varphi(x_1) + h \cdot \varphi'(x_1 + \vartheta_1 \cdot h)}{\psi(x_1) + h \cdot \psi'(x_1 + \vartheta_2 \cdot h)}$. Da… Voraussetzung die ersten Glieder im Zähler und im Nenner gleich Null… haben wir: $f(x_1 + h) = \frac{\varphi'(x_1 + \vartheta_1 \cdot h)}{\psi'(x_1 + \vartheta_2 \cdot h)}$. Lassen wir h unangebbar klein w… und sind die vorkommenden Funktionen eindeutig endlich und stetig, so ergibt… $f(x_1) = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$. Wir haben also bloß für den Zähler und für den Nenner die … rentialquotienten zu bilden, ihre Werte für $x = x_1$ zu bestimmen und zu divid…

Bei unserem Beispiele haben wir also: $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{7}{5}$. Die Übereinstim… der beiden Ergebnisse lehrt uns, daß das als zweites erwähnte Übereinkomme… die Festsetzung des Wertes einer Funktion, die an einer Stelle eine unbest… Form annimmt, das zuerst angeführte Übereinkommen in sich enthält. Ist auc… so erhaltene Ausdruck für $x = x_1$ noch unbestimmt, so wiederholt man das Verf…

Wir hätten z. B. den Wert des Ausdruckes $z = \frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24…}{x^3 - 4x^2 - 3x + …}$ für $x = 3$ zu bestimmen. Der Quotient aus dem Differentialquotienten des Z… und dem des Nenners lautet: $\frac{4x^3 - 18x^2 + 26x - 24}{3x^2 - 8x - 3}$. Für $x = 3$ nimmt da… Gestalt $\frac{0}{0}$ an. Wendet man das Verfahren noch einmal an, so ergibt sich $\frac{12x^2 - 36x…}{6x - 8…}$ und das nimmt für $x = 3$ die Form $\frac{13}{5}$ an. Dasselbe bekommt man, wenn… Zähler und Nenner des Ausdruckes z durch das größte gemeinsame Maß… $(x-3)^2$, dividiert und dann für x die Zahl 3 einsetzt.

Hat man eine Funktion $y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, bei der der Zähler und der Nenn… einen Wert $x = x_1$ unangebbar groß werden, so daß also die Funktion y für x… keinen bestimmten Sinn hat, so versteht man laut Übereinkommen unter dem… der Funktion y für $x = x_1$ den Grenzwert, dem sich die Funktionswerte für… Werte der unabhängig Veränderlichen unbegrenzt nähern, die von dem We… nur um etwas unangebbar Kleines verschieden sind. Hier kann man abe… Mittelwertsatz nicht in derselben Weise anwenden wie früher, weil ja die … tionen φ und ψ für $x = x_1$ unendlich groß werden, und das widerspricht der… aussetzungen des Mittelwertsatzes. Man kann sich aber dadurch helfen, daß…

ist den Wert $f(x_1+\varepsilon+h)=\frac{\varphi(x_1+\varepsilon+h)}{\psi(x_1+\varepsilon+h)}$ betrachtet, indem man unter ε n zwei angebbare Größen denkt, die dem absoluten Betrage nach genügend sind, so daß in dem Bereiche von $x_1+\varepsilon$ bis $x_1+\varepsilon+h$ die Funktionen φ und ψ) verschieden und endlich sind. Dann kann man den Mittelwertsatz in folgender anwenden: $f(x_1+\varepsilon+h)=\frac{\varphi(x_1+\varepsilon)+h\,\varphi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_1\cdot h)}{\psi(x_1+\varepsilon)+h\,\psi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_2\cdot h)}$. Dividiert man r und Nenner durch $\varphi(x_1+\varepsilon)\cdot\psi(x_1+\varepsilon)$, so erhält man:

$$f(x_1+\varepsilon+h)=\frac{\frac{1}{\psi(x_1+\varepsilon)}+h\cdot\frac{\varphi'(x_1+\varepsilon+\vartheta\cdot h)}{\varphi(x_1+\varepsilon)\cdot\psi(x_1+\varepsilon)}}{\frac{1}{\varphi(x_1+\varepsilon)}+h\cdot\frac{\psi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_2\cdot h)}{\varphi(x_1+\varepsilon)\cdot\psi(x_1+\varepsilon)}}.$$

Um den Wert des $f(x_1)$ nach dem erwähnten Übereinkommen zu bestimmen, ian den Grenzwert zu bestimmen, der sich ergibt, wenn man ε und h unan: klein werden läßt. Denkt man zunächst bloß ε unangebbar klein, so sind die ersten Glieder im Zähler und im Nenner unangebbar klein. Man erhält t als Grenzwert des ganzen Bruches denselben Betrag, wie wenn man für lusdruck $\frac{h\cdot\frac{\varphi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_1\cdot h)}{\varphi(x_1+\varepsilon)\cdot\psi(x_1+\varepsilon)}}{h\cdot\frac{\psi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_2\cdot h)}{\varphi(x_1+\varepsilon)\cdot\psi(x_1+\varepsilon)}}=\frac{\varphi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_1\cdot h)}{\psi'(x_1+\varepsilon+\vartheta_2\cdot h)}$ den Grenzwert für ein ebbar kleines ε bestimmt. Demnach ist $f(x_1+h)=\frac{\varphi'(x_1+\vartheta_1\cdot h)}{\psi'(x_1+\vartheta_2\cdot h)}$. Sind nun und $\psi'(x)$ für $x=x_1$ stetige Funktionen, so erhält man für ein unangebbar werdendes h als Funktionswert $f(x_1)$ den Ausdruck: $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$. — Es gilt hier ieselbe Regel wie in dem früheren Falle.

Ist eine Funktion y als Produkt zweier Funktionen $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ gegeben, so dieser Ausdruck für einen Wert $x=x_1$ die unbestimmte Form $0\cdot\infty$ ann, indem z. B. $\varphi(x_1)=0$ und $\psi(x_1)=\infty$ ist. Setzt man $y=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$, so ist der uf den ersten zurückgeführt.

Für $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ ergeben sich die unbestimmten Formen: 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, Aus diesen ergeben sich für den Logarithmus von y wegen $\log y=$ $\log[f(x)]$ die unbestimmten Formen:

$$\begin{aligned}
0\cdot\log 0 &= 0\cdot-\infty = -0\cdot\infty\\
0\cdot\log\infty &= \ 0\cdot\infty\\
\pm\infty\log 1 & = \pm 0\cdot\infty\\
\pm\infty\log 0 &= \mp\infty\cdot\infty = \mp\infty.
\end{aligned}$$

Die Art ihrer Auswertung ist schon im Vorhergehenden behandelt. Aus dem timmten Wert des $\log y$ ergibt sich dann y, indem man die Basis b des thmensystemes mit dem gefundenen $\log y$ potenziert.

Anwendungen in der Stereometrie.

Wenn die Stereometrie erst in der 7. Klasse zu nehmen wäre, könnte die Ableitungen der Formeln für den Rauminhalt der Körper in der nachstehen Weise durchführen und ihnen dadurch die so wünschenswerte Übereinstimmung der Form des Gedankenganges geben.

Ist für eine Pyramide B die Grundfläche h die Höhe, f der Flächeninhalt e zur Grundfläche parallelen Schnittes und x dessen senkrechter Abstand vom Sch der Pyramide, dann ist wegen $f : B = x^2 : h^2$ der Rauminhalt durch das Inte

$$V = \int_0^h \frac{B x^2 \, dx}{h^2} = \left[\frac{B}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{B\,h}{3}$$ dargestellt.

Die Formel für den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ergibt sich demselben Grundgedanken. Bezeichnet man mit b die kleinere Grundfläche und h_1 ihren senkrechten Abstand vom Scheitel der Pyramide, so hat man für

Rauminhalt: $V = \int_{h_1}^{h} \frac{B x^2 \, dx}{h^2} = \left[\frac{B}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\right]_{h_1}^{h} = \frac{B(h^3 - h_1{}^3)}{3 h^2}$. Werden B, b und $h' = h$-
als gegeben betrachtet, so folgt aus $h : h_1 = \sqrt{B} : \sqrt{b}$:

$$h = \frac{h'\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \text{ und } h_1 = \frac{h'\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Mit Berücksichtigung von $h^3 - h_1{}^3 = (h - h_1)(h^2 + h\,h_1 + h_1{}^2)$ ergibt

$$V = \frac{B(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2 \cdot h'}{3h'^2 \cdot B} \cdot \frac{h'^2 B + h'^2 \sqrt{B\,b} + h'^2 b}{(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2} = \frac{h'}{3} \cdot (B + \sqrt{B\,b} + b).$$

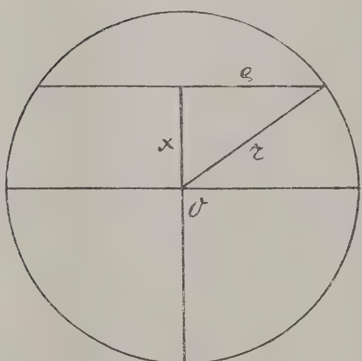


Fig. 9.

Der Rauminhalt einer Kugel mit Halbmesser r ist durch $V = \int_{-r}^{+r} \rho^2 \pi \cdot dx$ geg

ρ ist dabei der Halbmesser eines Kugelkr dessen senkrechter Abstand vom Kugelmittelp mit x bezeichnet wird. Wegen $\rho^2 = r^2$-

ist $V = \int_{-r}^{+r} \pi \cdot (r^2 - x^2)\,dx = \Big[r^2 \pi x - \pi \frac{x^3}{3}$

$= 2 r^3 \pi - 2 \pi \frac{r^3}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$

Den Rauminhalt eines Kugelabschnittes der Höhe h erhält man als das Integral:

$$V_{Sgm} = \int_{r-h}^{r} \pi (r^2 - x^2)\,dx = \left[r^2 \pi x - \pi \frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r} =$$

$$= r^3 \pi - \frac{r^3 \pi}{3} - \left[r^2 \pi (r - h) - \frac{\pi}{3}(r - h)^3\right] =$$

$$= r^2 \pi h - \pi \cdot r^2 h + \pi r h^2 - \frac{h^3 \pi}{3} = \frac{h^2 \pi}{3}(3 r - h).$$

Hat man eine Kugelschichte mit der Höhe h und den Werten r_1 und r_2 als nessern ihrer Begrenzungskreise, für die wieder d_1 beziehungsweise d_2 die senk-

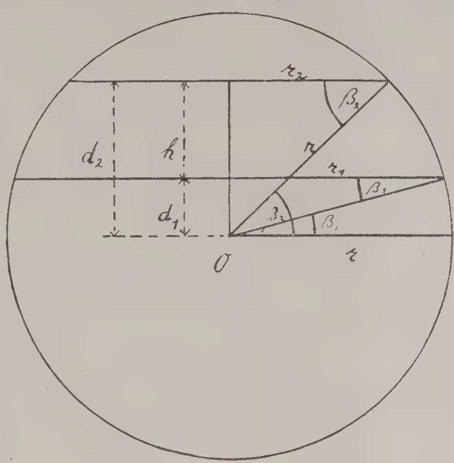


Fig. 10.

n Abstände von dem Mittelpunkte der l mit dem Halbmesser r sein sollen, t das schon mehrfach erwähnte Inte- den Rauminhalt der Kugelschichte, wir die Integration von d_1 bis strecken. Also:

$$= \int^{d_2} \pi (r^2 - x^2)\, dx = \left[r^2 \pi x - \pi \frac{x^3}{3} \right]_{d_1}^{d_2}$$

nit Rücksicht auf $d_2 - d_1 = h$ und $-d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)$:

$$r^2 \pi h - \frac{\pi}{3} h (d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2).$$

Man kann dieses Ergebnis in die Form bringen, in der Rauminhalt einer Kugelschichte gewöhnlich angegeben wird, wenn man kt, daß:

$$r^2 = d_1^2 + r_1^2 \text{ und}$$
$$r^2 = d_2^2 + r_2^2, \text{ also:}$$
$$r^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + r_1^2 + r_2^2}{2} \text{ ist.}$$

So bekommt man:

$$V_{sch} = h \pi \cdot \left\{ \frac{d_1^2 + d_2^2 + r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2}{3} \right\}$$
$$= \frac{h \pi}{6} \cdot \{ (d_3 - d_1)^2 + 3 (r_1^2 + r_2^2) \} = \frac{h^3 \pi}{6} + \frac{h \pi (r_1^2 + r_2^2)}{2}.$$

Um die Oberfläche einer Kugelzone zu berechnen, führen wir zur Bestimmung 'age eines Punktes auf der Kugeloberfläche genau so wie auf der Erdoberfläche ographischen Zwecken Längen und Breiten ein und bezeichnen sie mit λ bezw. β. ist nach Fig. 10 der Halbmesser ρ eines Parallelkreises mit der Breite β ge- durch: $\rho = r \cdot \cos \beta \cdot$ $\rho \cdot d\lambda$ ist dann das Bogenstück, das zur Längen- ung $d\lambda$ auf dem Parallelkreis gehört. $r \cdot d\beta$ ist das Bogenstück, das auf einem dian zur Breitenänderung $d\beta$ gehört. Diese zwei Bogenstücke stehen aufeinander cht und bestimmen ein unangebbar kleines Quadrat, das in der Kugelober- liegt und dessen Flächeninhalt durch $\rho\, d\lambda \cdot r\, d\beta = r^2 \cos \beta\, d\beta \cdot d\lambda$ dargestellt Integriert man über λ von 0 bis 2π, so erhält man $2 \pi r^2 \cos \beta\, d\beta$ und tellt den Flächeninhalt des unendlich schmalen Streifens vor, der sich längs ur Breite β gehörigen Parallelkreises hinzieht. Integriert man nun über β β_1 bis β_2, so erhält man den Flächeninhalt der Kugelzone, die zwischen den und β_2 gehörigen Parallelkreisen liegt.

Also: $F_{\mathfrak{z}} = 2r^2\pi\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\,d\beta = 2r^2\pi(\sin\beta_2 - \sin\beta_2)$. Wegen $\sin\beta_1 = \frac{d_1}{r}$ ı $\sin\beta_2 = \frac{d_2}{r}$ hat man: $F_{\mathfrak{z}} = 2r^2\pi\cdot\frac{d_2 - d_1}{r} = 2r\pi\cdot h$, wenn h wieder die Differ $d_2 - d_1$ bedeutet.

Anwendungen in der Naturlehre.

Dynamik eines Punktes.

Die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke einer ungleichförmigen wegung eines Punktes ist das Verhältnis der Wegzunahme zur zugehörigen Zei nahme, wenn diese letztere unangebbar klein genommen wird, also gerade das, man den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nennt. Die schleunigung in irgend einem Augenblick einer ungleichförmigen Bewegung e Punktes ist das Verhältnis aus der Geschwindigkeitszunahme zur zugehörigen Z zunahme, wenn diese letztere unangebbar klein genommen wird, also gerade das, man als den ersten Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit auch als den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit bezeich Eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist nun eine solche, bei der Beschleunigung einen unveränderlichen Wert g hat. Bezeichnet man die Maß des Weges mit s, die der Zeit mit t, die der Geschwindigkeit mit v oder auch und die der Beschleunigung mit $\frac{dv}{dt}$ oder auch $\frac{d^2s}{dt^2}$, dann gilt für die gleichför beschleunigte Bewegung die Gleichung $\frac{dv}{dt} = g$. Multiplizieren wir beider mit dt und integrieren von t_1 bis t_2, also: $\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dv}{dt}\cdot dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} g\,dt$, so gibt $v_2 - v_1 = g(t_2 - t_1)$, wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten bedeuten, die t_1 bzw Sekunden nach dem Beginne der Zeitzählung vorhanden sind. Wir haben d die zu den unangebbar kleinen Zeitzunahmen dt gehörigen Geschwindigkeitszunahmen addiert, die während $t_2 - t_1$ Sekunden eintreten. Bezeichnen wir nun die Geschwi keit im Anfangsaugenblick der Zeitzählung, für den also $t_2 = 0$ ist, mit c, so h wir: $c - v_1 = -gt_1$, also $v_1 = c + gt_1$. Setzen wir diesen Ausdruck für v_1 in Gleichung für ein beliebiges v_2 ein, so erhalten wir: $v_2 = gt_2 + c$. Diese Gleich gilt für jeden Wert des t_2 und den zugehörigen Wert des v_2. Um auszudrü daß wir uns alle diese unzählig vielen Gleichungen auf einmal denken wo lassen wir den Stellenzeiger weg und haben dann: $v = gt + c$.

Mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$ können wir dasselbe Verfahren zur Berechnung des ꝫ anwenden, denn der während der Zeit $(t_2 - t_1)$ zurückgelegte Weg ist ja nichts ꝫs als die Summe der Wegzunahmen, die in den einzelnen unangebbar kleinen ilchen dt der Zeit $(t_2 - t_1)$ eintreten, also durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$ gegeben:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} g\, t\, dt + c \int_{t_1}^{t_2} dt.$$

Bezeichnen wir die in den Zeiten t_1 und t_2 zurückgelegten Wege mit s_1 ungsweise s_2, so haben wir: $s_2 - s_1 = \frac{g}{2} \cdot (t_2{}^2 - t_1{}^2) + c\,(t_2 - t_1)$.

Setzen wir nun fest, daß im Anfangsaugenblicke der Zeitzählung, für den $_2 = 0$ ist, der bereits zurückgelegte Weg s_2 gleich Null sein soll, d. h. mit en Worten, messen wir den Weg von dem Punkte an, in dem das Bewegliche nfangsaugenblicke der Zeitzählung ist, so erhalten wir für s_1 aus unserer ung den Ausdruck: $s_1 = \frac{g\, t_1{}^2}{2} + c\, t_1$. Setzen wir diesen in die Gleichung für ein t_2 und das zu ihm gehörige s_2 ein, so ergibt sich: $s_2 = \frac{g}{2} \cdot t_2{}^2 + c\, t_2$. können wieder zum Ausdrucke bringen, daß wir uns alle Gleichungen für die lich vielen verschiedenen Werte des t_2 auf einmal denken wollen, indem wir stellenzeiger weglassen. Wir erhalten dann $s = \frac{g}{2} t^2 + c\,t$.

Für $c = 0$ haben wir es mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung n, bei der die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist, wie dies z. B. beim Fall zutrifft. Ist c von 0 verschieden und mit g gleichbezeichnet, so beschreibt ie Gleichung einen Wurf nach abwärts, sind c und g entgegengesetzt bezeichnet, Wurf nach aufwärts.

Die dynamische Grundgleichung schaut in den hier angeführten Zeichen folgender- i aus: $m \frac{d^2 s}{dt^2} = p$, wobei m die Trägheitsmasse des Punktes bedeutet, der eschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ bekommt, und p die hiefür in der Richtung der Bewegung erliche Kraft vorstellt. Setzt man statt $\frac{d^2 s}{dt^2}$ $\frac{dv}{dt}$, multipliziert beiderseits mit dt ntegriert von t_1 bis t_2, so hat man: $m\,(v_2 - v_1) = \int_{t_1}^{t_2} p\, dt$. Das Produkt $m\,v$ man die Bewegungsgröße des Massenpunktes und das Integral rechter Hand ntrieb, den der Körper während der Zeit $(t_2 - t_1)$ erfährt. Man erhält so Satz: die Änderung der Bewegungsgröße eines Massenpunktes während einer ist dem Antriebe in der Bewegungsrichtung während derselben Zeit gleich. e Kraft p von der Zeit unabhängig, dann nimmt der Antrieb die einfache $p\,(t_2 - t_1)$ an.

Multipliziert man die dynamische Grundgleichung beiderseits mit $\frac{ds}{dt}$ und integriert von t_1 bis t_2, so bekommt man wegen $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ und $v =$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\,v\,\frac{dv}{dt}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} p \cdot \frac{ds}{dt}\cdot dt.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\left(\frac{m\,v^2}{2}\right)}{dt} = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dt$, also ist: $\int m\,v\,\frac{dv}{dt}\cdot$ $= \frac{m\,v^2}{2} + C$, wobei C die willkürliche Integrationskonstante bedeutet. Es ist da $\int_{t_1}^{t_2} m\,v\,\frac{dv}{dt}\cdot dt = \frac{m\,{v_2}^2}{2} - \frac{m\,{v_1}^2}{2}$, wenn wir mit v_1 und v_2 die Geschwindig werte für die Zeiten t_1 beziehungsweise t_2 bezeichnen. Der Ausdruck $\frac{m\,v^2}{2}$ führ Namen „lebendige Kraft des mit der Geschwindigkeit v bewegten Massenpunktes $\frac{ds}{dt}\cdot dt$ stellt die Verschiebung ds des Massenpunktes während der unangebbar kl Zeit dt vor. Das Integral rechter Hand nennt man die während der Zeit (t_2 - für die Bewegung aufgewendete Arbeit. Es ist die Summe der Produkte au Kraftwerten in den Punkten der Verschiebungsbahn und den bezüglichen unang kleinen Bogenstückchen dieser Bahn. Man hat also den Satz: Die Änderun lebendigen Kraft eines Massenpunktes während einer Zeit ($t_2 - t_1$) ist glei für die Bewegung während derselben Zeit aufgewendeten Arbeit. Ist p eine kon Größe, so nimmt der Ausdruck für die aufgewendete Arbeit die einfache Form p (s_2 an, wenn man mit ($s_2 - s_1$) die Verschiebung des Massenpunktes währen Zeit ($t_2 - t_1$) bezeichnet. Hier fällt die Kraftrichtung in die Verschiebungsric Schließen die beiden aber einen Winkel φ miteinander ein, dann ist die Kra in der Verschiebungsrichtung beschleunigend wirkt, nicht mehr p, sondern p · Es heißt dann die Grundgleichung $m\frac{d^2 s}{dt^2} = p \cdot \cos\varphi$ und die Gleichung fü lebendige Kraft:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\,v\,\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} p \cdot \cos\varphi \cdot \frac{ds}{dt}\cdot dt \text{ oder}$$

$$\frac{m\,{v_2}^2}{2} - \frac{m\,{v_1}^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} p \cdot \cos\varphi \cdot \frac{ds}{dt}\cdot dt \text{ oder}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} p \cos\varphi \cdot ds,$$ wenn wir mit s_1 und s_2 die zu den t_1 beziehungsweise t_2 gehörigen Wege bezeichnen. Das Integral rechter Hand wieder die bei der Verschiebung aufgewendete Arbeit. Sie wird gefunden, man die in die Verschiebungsrichtung fallende Normalkomponente der Kraft den bei der Verschiebung zurückgelegten Teil der Verschiebungsbahn integrier

Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Angriffspunkt der Resultierenden Schwerkräfte, die auf die Teilchen des Körpers wirken. Dabei ist vorausgesetzt, das Kraftfeld der Schwere innerhalb des betrachteten Körpers homogen, also stark und gleich gerichtet ist.

Die Resultierende zweier oder mehrerer Kräfte ist diejenige, die für sich allein be Wirkung hervorbringt wie diese anderen zusammengenommen. Ist der Körper, em die Kräfte angreifen, um eine Achse drehbar befestigt, so kann eine Kraft eine drehende Wirkung ausüben. Diese drehende Wirkung wird durch das ungsmoment der Kraft in bezug auf die Achse mathematisch beschrieben und Drehungsmoment ist für den Fall, daß die Kraftrichtung auf einer durch rehungsachse gelegten Ebene senkrecht steht, durch das Produkt aus der Kraft ihrem theoretischen Hebelarm gegeben. Der theoretische Hebelarm ist hiebei enkrechte Abstand der Drehungsachse von der Kraftrichtung. Legt man durch rehungsachse eine zur Kraftrichtung parallele Ebene, so ist die Entfernung Punkte in der Richtung der betreffenden Kraft von dieser Momentenebene nten Ebene gleich dem theoretischen Hebelarm dieser Kraft. Dies gilt also für den Angriffspunkt der Kraft, dessen Entfernung von der erwähnten Ebene mit x_1 und dessen Masse wir mit m_1 bezeichnen wollen. Auf diesen Punkt demnach seitens der Schwere die Kraft $p_1 = m_1 \cdot g$, wenn wir mit g die eschleunigung bezeichnen, und ihr Drehungsmoment in bezug auf die gewählte ist $\mathfrak{D}_1 = m_1 g \cdot x_1$. Ebenso findet man für die anderen Massenpunkte des ers mit den Massen $m_2, m_3, m_4 \cdots$ und den Abständen $x_2, x_3, x_4 \cdots$ von der hnten Momentenebene die Drehungsmomente $\mathfrak{D}_2 = m_2 g x_2$, $\mathfrak{D}_3 = m_3 g x_3 \cdots$ den Hebelgesetzen üben alle Kräfte zusammen das Drehungsmoment $(m_1 \cdot g x_1 + \ g x_2 + \cdots)$ aus und dieses muß dem Drehungsmoment ihrer Resultierenden sein.

Die Resultierende ist aber gleich der Summe der Komponenten, da diese alle ander parallel sind; bezeichnen wir also die Entfernung des Schwerpunktes, Angriffspunktes, von der Momentenebene mit ξ, so besteht die Gleichung:

$$(m_1 g + m_2 g + m_3 g + \cdots) \cdot \xi = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \cdots,$$

us findet man:

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}.$$

Wenn wir die Lage des Körpers, den wir uns mit der Momentenebene verbunden denken, irgendwie verändern, so wird sich im allgemeinen auch die der Ebene im Raume ändern. Der Ausdruck für ξ ändert sich dabei aber gar weil ja die Massenpunkte des Körpers und ihre Entfernungen von der Ebene ändert bleiben. Man erkennt daraus, daß die Formel für ξ auch dann gültig wenn die Ebene, auf die sie sich bezieht, nicht lotrecht steht. Führt man nun

die Berechnung des ξ für 3 aufeinander senkrecht stehende Ebenen durch, s dadurch die Lage des Schwerpunktes bestimmt. Es ist aber gewöhnlich gar n notwendig, die Berechnung des ξ wirklich für drei Ebenen durchzuführen, sehr genügt mit Rücksicht auf das, was man sonst von dem zu betrachtenden Kö weiß, die Berechnung eines ξ. Wir hätten z. B. den Schwerpunkt eines ger Kegels zu berechnen, der mit Masse von der Dichte ρ gleichmäßig erfüllt Mit r bezeichnen wir den Halbmesser seiner Grundlinie und mit h seine H Zerlegt man diesen Kegel durch ebene Schnitte, die zur Grundfläche parallel in lauter unendlich dünne Schichten, so erhält man lauter kreisförmige Blä von denen jedes seinen Schwerpunkt in seinem Mittelpunkt liegen hat. Ersetzt also die Schwerkräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte einer solchen Sch wirken, durch ihre Resultierende, so hat man sie durch eine Kraft ersetzt, deren griffspunkt in der Achse des Kegels liegt. Führt man dies für alle Schichten Kegels durch, so hat man alle die unendlich vielen Kräfte, die auf die Massenpu des Kegels wirken, durch andere Kräfte ersetzt, deren Angriffspunkte alle in Achse des Kegels liegen. Deshalb muß auch der Angriffspunkt der Resultiere dieser letzteren Kräfte, und das ist der Schwerpunkt des ganzen Kegels, in Achse liegen. Wenn man jetzt noch das ξ des Schwerpunktes in bezug auf durch den Scheitel gehende und zur Grundfläche parallele Ebene E berechnet, s die Lage des Schwerpunktes bestimmt. Zunächst berechnet man $\Sigma m x$ für eine Grundfläche parallele Schichte, deren fernung vom Scheitel des Kegels m und deren unangebbar kleine Dicke dx bezeichnet wird. Da das x für Punkte dieser Schichte dasselbe ist, kö wir es als Faktor herausheben un der Klammer bleibt dann die Masse d Schichte stehen. Diese ist gegeben $\frac{x^2 \cdot r^2 \pi}{h^2} \cdot dx \cdot \rho$, weil ja die Größe Schnittfläche, die in der Entfernu parallel zur Grundfläche geführt w durch $\frac{x^2 \cdot r^2 \cdot \pi}{h^2}$ ausgedrückt wird. E also der Ausdruck $\Sigma m x$ für diese Sch

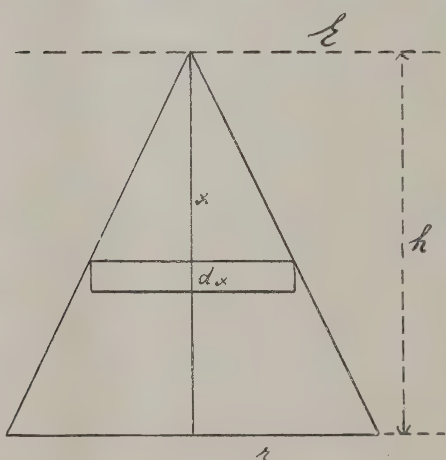


Fig. 11.

$\frac{r^2 \pi \cdot \rho}{h^2} \cdot x^3 dx$. Integriert man diesen Ausdruck über x von 0 bis h, so hat den Ausdruck $\Sigma m x$ für den ganzen Kegel. Das gibt: $\frac{r^2 \pi \rho}{h^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h^2}{4}$. man das noch durch die Masse des Kegels $\frac{r^2 \pi \cdot h \cdot \rho}{3}$ dividiert, so erhält man d Also: $\xi = \frac{r^2 \pi \rho \cdot h^2 \cdot 3}{4 \cdot r^2 \pi h \rho} = \frac{3}{4} h$.

Das Trägheitsmoment.

Ein Punkt mit der Masse m_1 habe von einer mit ihm fest verbundenen Achse
ͅnkrechten Abstand r_1. Er kann sich also nur in einem Kreise mit dem Halb-
: r_1 bewegen. Es soll nun eine solche Kraft p_1 in der Richtung der Tangente
sen Kreis gefunden werden, daß durch sie der Punkt m_1 eine gegebene Winkelbe-
nigung γ erfährt, d. h. es soll hiebei der Punkt, der in der Entfernung 1 *cm*
er Achse auf der Strecke r_1 liegt, eine Bahnbeschleunigung γ bekommen. Somit
der Punkt m_1 die Bahnbeschleunigung $r_1 \cdot \gamma$ erhalten. Also muß $p_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot \gamma$
Diese Kraft übt ein Drehungsmoment $\mathfrak{D}_1 = m_1 r_1{}^2 \cdot \gamma$ aus. Soll demnach der
m_1 nicht durch eine in ihm selbst angreifende Kraft, sondern durch irgend eine
Kraft K, die in einem mit der Achse fest verbundenen Punkte angreift, die
lbeschleunigung γ erhalten, so muß das Drehungsmoment dieser Kraft K in
auf die gewählte Achse gleich $\mathfrak{D}_1$ sein. Sind mit der Achse noch mehrere andere
e mit den Massen $m_2 m_3 \ldots$ und den Abständen $r_2, r_3 \ldots$ fest verbunden, so
die drehende Kraft zur Erzeugung der Winkelbeschleunigung γ auch noch die
ungsmomente

$$\mathfrak{D}_2 = m_2 r_2{}^2 \gamma$$
$$\mathfrak{D}_3 = m_3 r_3{}^2 \gamma$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ingen, ihr Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ muß infolgedessen gleich der Summe der
ungsmomente $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3 \ldots$ sein. Also:

$$= m_1 r_1{}^2 \gamma + m_2 r_2{}^2 \gamma + m_3 r_3{}^2 \gamma + \cdots = \gamma \cdot [m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + \cdots].$$

können auch unzählig viele Massenpunkte vorhanden sein, wie dies z. B. bei
wirklichen Körper der Fall ist. Der Klammerausdruck wird das Trägheits-
nt T des Körpers genannt und gibt uns die Masse an, die in der Entfernung
von der Achse für sich allein durch das gleiche Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ dieselbe
lbeschleunigung erhält wie unser Körper. Die Winkelbeschleunigung, die ein
r durch ein Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ erfährt, ist also durch die nachstehende Be-
ig gegeben: $\gamma = \frac{\mathfrak{D}}{T}$.

Zur tatsächlichen Berechnung des Trägheitsmomentes eines Körpers braucht
wieder den Integralbegriff. Es sei z. B. das
heitsmoment einer kreisförmigen Scheibe mit
Halbmesser R und der Dicke a zu berechnen,
die Dichte überall gleich ρ ist und als Dre-
achse die Senkrechte auf die Scheibenfläche
lt wird, die durch deren Mittelpunkt geht.
t man zunächst $\Sigma m r^2$ für alle Punkte einer
rischen Röhre mit der Drehungsachse als
trischer Achse, dem inneren Halbmesser r, der
a und der unangebbar kleinen Wanddicke dr,
das r^2 für alle Glieder dasselbe. Man kann

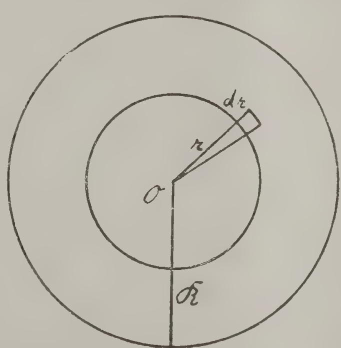


Fig. 12.

o herausheben und behält in der Klammer den Ausdruck für die Masse der

zylindrischen Röhre. Es ergibt sich dann: $r^2 \cdot 2 r \pi \cdot a \cdot d r \cdot \rho$. Integriert man über r von 0 bis R, so hat man das gewünschte Trägheitsmoment T. Das

$$T = \int_0^R 2 \pi a \rho \cdot r^3 d r = \frac{\pi a \rho R^4}{2}.$$

Die einfache schwingende Bewegung.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Beschleunigung 0, bei der g förmig beschleunigten Bewegung hat die Beschleunigung einen unveränderl Wert. Der nächst einfache Fall ist der, bei dem die Beschleunigung zu Weg in geradem Verhältnis steht. Also: $\frac{d^2 s}{d t^2} = k \cdot s$.

Es soll nun eine Bewegung gefunden werden, die dieser Bedingung ge Man weiß aber, daß $\frac{d \sin x}{d x} = \cos x$ und $\frac{d^2 \sin x}{d x^2} = \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x$ ist. also $k = -1$ ist, dann beschreibt die Gleichung $s = \sin t$ eine Bewegung gesuchten Art. Um aber auch Fälle betrachten zu können, bei denen das k anderen Wert hat, bilden wir zur Funktion $s = a \sin b t$ den ersten und zweiten Differentialquotienten: $\frac{d s}{d t} = a b \cos b t$; $\frac{d^2 s}{d t^2} = -a b^2 \sin b t$.

Versuchen wir nun, ob wir mit dieser Funktion die obige Beziehung erf können, so erhalten wir: $-a b^2 \sin b t = k \cdot a \cdot \sin b t$. Es muß also $k =$ sein. Da b^2 als Quadrat einer reellen Zahl, denn nur auf solche wollen wir einlassen, positiv ist, so folgt, daß das k eine wesentlich negative Zahl sein, die Beschleunigung im Vergleich zum Wege entgegengesetzt bezeichnet sein damit die Bewegung, für die $s = a \sin b t$ ist, die Bedingung $\frac{d^2 s}{d t^2} = k s$ er Eine solche Bewegung nennt man eine einfache schwingende Bewegung. Zur $t = 0$ ist das Bewegliche wegen $s = 0$ in dem Punkte, von dem an die gemessen werden, man nennt diesen Punkt die Ruhelage. Wenn das t vom We an bis zum Werte $\frac{2\pi}{b}$ wächst, so nimmt s zunächst bis zum Werte $+a$ zu, bis $-a$ ab und erlangt schließlich wieder den Wert 0. Die Bewegung, die Bewegliche hiebei vollführt, nennt man eine Schwingung, die Gerade, in d vor sich geht, Schwingungsrichtung und die hiezu erforderliche Zeit Schwing dauer T. a heißt die Schwingungsweite. Es ist also: $\frac{2\pi}{b} = T$; und darnach: $b =$ Wir finden daher: $k = -\frac{4\pi^2}{T^2}$ und $s = a \sin \frac{2\pi \cdot t}{T}$. Aus der Gleichung $\frac{d^2 s}{d t^2} =$ erkennt man, daß das k die Beschleunigung bedeutet, die das Bewegliche e wenn seine Entfernung (s) von der Ruhelage gleich der Längeneinheit ist. man also von einer Bewegung, daß sie eine einfache schwingende Bewegun kennt man ferner die Beschleunigung $k = -\varkappa$, die bei ihr das Bewegli der Entfernung 1 von der Ruhelage erfährt, so kennt man wegen $-\varkappa = -$

auch ihre Schwingungsdauer. Diese ist: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$. Für ein einfaches
l von der Länge l ist nun die Beschleunigung b gegen die Ruhelage hin
dermaßen ausdrückbar: $b = g \cdot \frac{y}{l}$, wenn man
weiligen senkrechten Abstand des Pendelkörpers
er Ruhelage der Pendellänge mit y bezeichnet.
ie Schwingungsweite so klein, daß wir die
ogenförmige Bahn des Beweglichen als mit y
menfallend betrachten können, dann ist die
gung des Pendelkörpers eine einfache schwingende
gung, weil ja dann seine Beschleunigung zu
Entfernung von der Ruhelage in geradem
ltnisse steht, aber im Vergleich zu dieser Ent-
ng y entgegengesetzt bezeichnet ist, und weil
ahn eine Strecke ist. Die Beschleunigung für
ist hier $\varkappa = \frac{g}{l}$, also $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

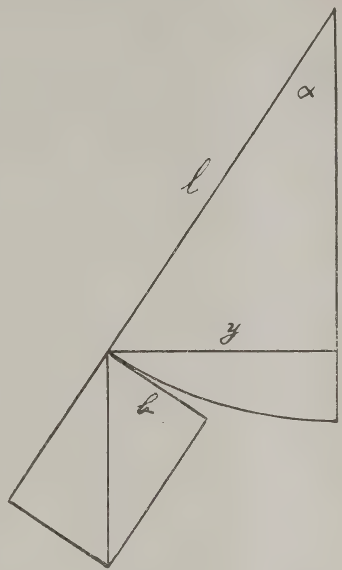


Fig. 13.

Ein solches Pendel ist aber ein Massenpunkt m,
it einer Drehungsachse fest verbunden ist. Des-
nuß die Winkelbeschleunigung, die es bei einem
hlagswinkel α erfährt, gleich dem Quotienten aus
Drehungsmoment und dem Trägheitsmoment bezüglich der Umdrehungsachse
sein. Also: $\gamma = \frac{m\,g \cdot l \sin\alpha}{m\,l^2} = \frac{g \sin\alpha}{l}$. Hat man ein
zusammengesetztes Pendel von der Masse M und
mit a als Abstand seines Schwerpunktes S von
der wagrechten Drehungsachse, dann findet man
bei gleichem Ausschlagswinkel α für die Winkel-
beschleunigung: $\gamma' = \frac{M\,g\,a \sin\alpha}{K}$. Dabei wird mit K
das Trägheitsmoment bezüglich der Umdrehungs-
achse bezeichnet. Wenn man also die Pendellänge l
des einfachen Pendels so groß gewählt hat, daß
$\frac{g}{l} = \frac{M\,g\,a}{K}$ ist, dann erfahren die beiden Pendel
bei gleichem Ausschlagswinkel stets die gleiche Winkel-
beschleunigung. Stellt man bei beiden Pendeln
gleiche Ausschlagswinkel her und erteilt ihnen
gleiche Winkelgeschwindigkeiten, z. B. O, — das heißt
läßt sie ruhig aus —, dann müssen sie sich vollkommen übereinstimmend
en, also auch gleiche Schwingungsdauer haben. Aus $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ findet man
lb für das zusammengesetzte Pendel $T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M\,g\,a}}$.

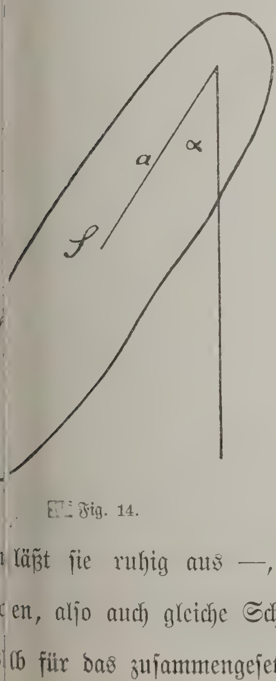


Fig. 14.

Potential.

Wirken Massen m_1 und m_2 in der gegenseitigen Entfernung r nach dem ($p = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ abstoßend aufeinander, so versteht man unter dem Potential einer ſ Masse m_1 in bezug auf einen Punkt die Arbeit, die man leisten muß, wenn m Masseneinheit aus unendlicher Entfernung bis zu diesem Punkte verschiebt. — die Massen anziehend aufeinander, so muß man bei der Begriffsangabe für das Po die entgegengesetzte Verschiebungsrichtung verwenden. — Läßt man umgekeh

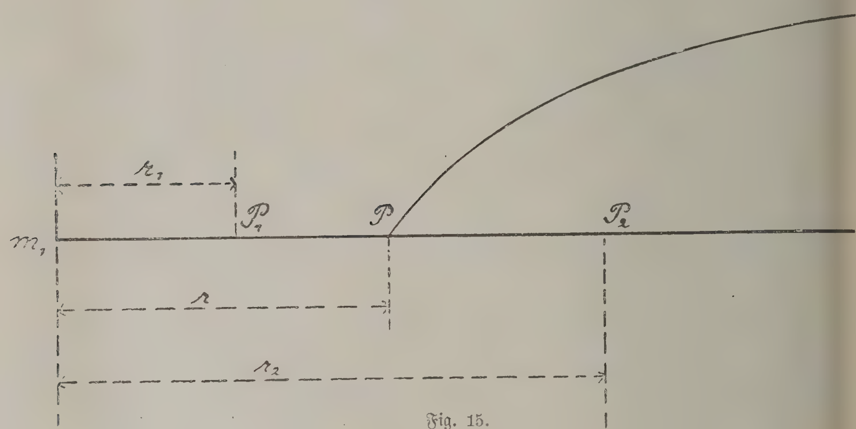


Fig. 15.

Masseneinheit von dem Punkt P aus auf derselben Bahn ins Unendliche wandern, so leisten die Kräfte des Feldes dieselbe Arbeit, die früher geg hatte aufgebracht werden müssen. Wegen des Satzes von der Erhaltun Arbeit muß die auf zwei verschiedenen Bahnen XP, KP zur Heranbringun Masseneinheit aus unendlicher Entfernung nach P aufzuwendende Arbei selbe sein. Denn wären diese Arbeitswerte verschieden, so könnte man di Bahn zur Heranbringung der Masseneinheit verwenden, die hiebei den geren Arbeitsaufwand erfordert, und auf der anderen die Masseneinhei Unendliche fortwandern lassen und dabei den dieser Bahn eigentümlichen gr Arbeitsbetrag gewinnen. Man hätte dann bei der ganzen Verschiebung KPX Überschuß an Arbeit aus nichts gewonnen und das ist unmöglich. Wir n nun als Bahn diejenige, bei der in jedem Punkte die Kraftrichtung in die Ta an diese Bahn fällt. Eine solche Bahn nennt man eine Kraftlinie. Für u Fall ist das die Gerade PK. Zunächst denken wir uns die Masseneinhe P_1 bis P_2 fortwandernd und berechnen die hiebei von den elektrischen Kräften ge Arbeit. Laut unserer begrifflichen Festsetzung ist dies das Integral der die darstellenden Funktion über die ganze Verschiebungsstrecke, falls diese wie h die Kraftrichtung fällt.

Wir bekommen daher den Ausdruck für den gesuchten Arbeitswert:

$$\mathfrak{A} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{m_1}{r^2}\, d\, r = \left[m_1 \, \frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{m_1}{r_2} + \frac{m_1}{r_1},$$

wir mit r_1 und r_2 die bezüglichen Entfernungen der Punkte P_1 und P_2 von m_1 nen. Denken wir uns r_2 unangebbar groß, so erhalten wir das Potential V_1 Masse m_1 in bezug auf den Punkt P_1. $V_1 = \int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{m}{r}\, d\, r = \frac{m_1}{r_1}$. Diese Gleichung n wir für jeden Punkt der Geraden (m_1 K) aufstellen. Um auszudrücken, daß lle diese unendlich vielen Gleichungen auf einmal denken wollen, lassen wir und r den Stellenzeiger weg und haben dann: $V = \frac{m_1}{r}$. r ist hier die unab- g Veränderliche und V die davon abhängige Funktion, die den Namen Potential- on oder schlechtweg Potential führt. Sie hat die wichtige Eigenschaft, daß ihr rentialquotient nach r dem mit -1 multiplizierten Werte der Feldstärke gleich Denn es ist ja: $\frac{d\left(\frac{m_1}{r}\right)}{d\, r} = -\frac{m_1}{r^2}$.

Diese Entwicklung gilt nicht nur für die Punkte der Geraden (m_1 K), sondern lle Punkte des Raumes, weil ja jeder Punkt P mit m_1 auf einer Geraden die für diesen Punkt P die durch ihn hin- zehende Kraftlinie ist. Haben wir zwei e mit den Massen m_1 und m_2, deren Po- l in bezug auf einen Punkt P zu bestimmen können wir nicht so vorgehen wie früher, jetzt die Kraftlinien im allgemeinen keine den sind. Da denken wir uns die Massen- lt auf irgend einer Geraden (P X), die durch m_1 noch durch m_2 geht, aus un- her Ferne nach P verschoben. r ist der nd des Punktes P von irgend einem auf als Nullpunkt gewählten O, ρ_1 und ρ_2 die Entfernungen des Punktes P von m_1 ungsweise m_2 und φ_1 und φ_2 sind deren liche Neigungswinkel zur Verschiebungs- ng, p_1 und p_2 die bezüglichen Kräfte auf Masseneinheit in P. Alle diese Größen sind verständlich veränderliche Größen. Die in Verschiebungsrichtung fallenden Normal- menten der Kräfte sind $p_1 \cos \varphi_1$ und $p_2 \cos \varphi_2$, also ist die in die Ver- ungsrichtung fallende Normalkomponente der Resultierenden von p_1 und p_2 den Ausdruck ($p_1 \cos \varphi_1 + p_2 \cos \varphi_2$) gegeben.

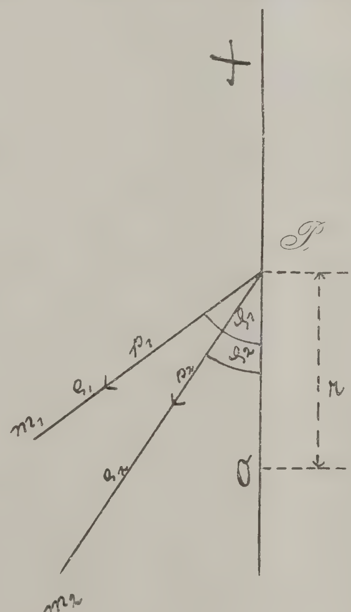


Fig. 16.

Das gesuchte Potential ist jetzt:

$$V=\int_r^{\infty}(p_1\cos\varphi_1+p_2\cos\varphi_2)\,dr.$$ Das ist aber:

$$=\int_r^{\infty}p_1\cos\varphi_1\,dr+\int_r^{\infty}p_2\cos\varphi_2\,dr.$$

Das erste Glied ist hier das Potential der Masse m_1 allein in bezu den Punkt P und das zweite Glied ist das Potential der Masse m_2 allein i in bezug auf P. Dasselbe können wir auch für drei oder mehr Massen durchführen und erhalten so den Satz:

Das Potential mehrerer Massen in bezug auf einen Punkt P ist glei Summe ihrer Einzelpotentiale in bezug auf denselben Punkt.

Jetzt läßt sich leicht zeigen, daß das Potential einer beliebigen auf Kugelfläche mit dem Halbmesser r gleichmäßig verteilten Masse in bezug a Punkte im Innern der Kugel einen und denselben Wert hat, während es für außerhalb der Kugel liegenden Potentialpunkt genau so zu berechnen ist, die ganze Masse im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre. Die Dichte der M belegung unserer Kugelfläche sei σ, der Abstand des zunächst im Innern der angenommenen Potentialpunktes P vom Kugelmittelpunkt heiße a. Also: a

Wir führen jetzt zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf der oberfläche ein Koordinatensystem ein, in dem die eine Koordinate wie b

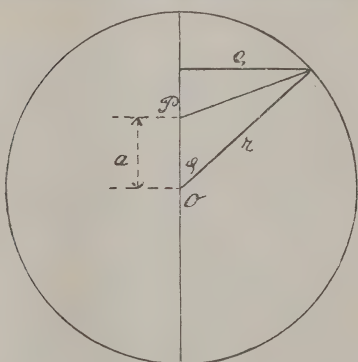


Fig. 17.

Oberflächenberechnung die Länge ist un zweite Koordinate der Winkel φ verwendet den der zu einem Punkte der Kugelobe gezogene Halbmesser mit dem durch P gez einschließt. Dann wird ganz ähnlich wie b Oberflächenberechnung durch $r\sin\varphi\cdot d\lambda$ ein unangebbar kleines Stück der Kugelobe ausgedrückt. Multipliziert man mit σ, so man den Ausdruck für die darauf li Masse und ihre Entfernung von P wird $\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}$ gegeben. Ihr Einzelpo in bezug auf P ist also: $\frac{r\sin\varphi\cdot d\lambda\cdot r\,d\varphi\cdot\sigma}{\sqrt{a^2+r^2-2\,ar\cos\varphi}}$. Diesen Ausdruck hat man fü Flächenstückchen der Kugeloberfläche zu bilden und hieraus die Summe zu

Bilden wir diese Summe zunächst für alle Flächenteilchen, die an der Winkel φ gehörigen Parallelkreis liegen, so haben wir $\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cdot\sigma\cdot\sin\varphi\,d\varphi\cdot d\lambda}{\sqrt{a^2+r^2-2\,ar\cos\varphi}}$ zu wobei λ als einzige Veränderliche anzusehen ist. Da erhalten wir: $\frac{2\pi r^2\sigma\sin}{\sqrt{a^2+r^2-2}}$

…mmen wir jetzt $\int\limits_0^\pi \frac{2\pi r^2 \sigma \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}}$, so haben wir diese Summe für die ganze …oberfläche berechnet und damit das gewünschte Potential gefunden. Wenn wir …adikanden des Nenners 2 ar addieren und subtrahieren, a + r herausheben … im Zähler sin φ durch den halben Winkel ausdrücken, so erhalten wir:

$$J = \int\limits_0^\pi \frac{2\pi r^2 \sigma \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}} = 2\pi r^2 \sigma \cdot \int\limits_0^\pi \frac{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{(a+r)\sqrt{1-\frac{4ar\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(a+r)^2}}}$$

…ja $-2ar-2ar\cos\varphi = -2ar(1+\cos\varphi) = -4ar\cos^2\frac{\varphi}{2}$ ist. Der für ein …ves a und r selbst positive Faktor $\frac{4ar}{(a+r)^2}$ ist entweder gleich 1 oder kleiner …dieses. Denn ist $r = a$, so ist $\frac{4ar}{(a+r)^2} = \frac{4a^2}{4a^2} = 1$; ist $r > a$, also $r = a + \rho$, …t $\frac{4ar}{(a+r)^2} = \frac{4a^2+4a\rho}{4a^2+4a\rho+\rho^2} < 1$; und ist $r < a$, also $r = a - \rho$, so ist $\frac{4ar}{(a+r)^2} =$ $\frac{4a^2-4a\rho}{a^2-4a\rho+\rho^2} < 1$, deshalb ist $\frac{4ar}{(a+r)^2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}$ jedenfalls positiv und kleiner als 1, …können es daher dem Quadrate des sin eines reellen, spitzen Winkels ψ gleich-… . Also: $\frac{4ar\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(a+r)^2} = \sin^2\psi$. Es ist dann: $\frac{2\sqrt{ar}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{a+r} = \sin\psi$ oder: $\cos\frac{\varphi}{2} =$ $\frac{(a+r)\sin\psi}{2\sqrt{ar}}$, und durch Differenzierung: $-\sin\frac{\varphi}{2}\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{(a+r)\cos\psi\, d\psi}{2\sqrt{ar}}$. Dividiert …jetzt in dem Integral dφ durch 2 und multipliziert zugleich mit 2, um den … des Ganzen ungeändert zu erhalten, so bekommt man durch Einführung des …kels ψ:

$$J = 4\pi r^2 \sigma \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{2}{a+r}\cdot\frac{(a+r)\sin\psi}{2\sqrt{ar}\cdot\cos\psi}\cdot\frac{-(a+r)}{2\sqrt{ar}}\cdot\cos\psi\, d\psi =$$

$$= -\frac{4\pi r^2 \sigma (a+r)}{2ar}\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}\sin\psi\, d\psi = \frac{2\pi r \sigma (a+r)}{a}(\cos\psi_2 - \cos\psi_1).$$

ψ_1 bedeutet dabei den Wert, den das ψ annimmt, wenn $\varphi = 0$ ist, also …$_1 = \frac{2\sqrt{ar}}{a+r}$ und $\psi_1 = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{ar}}{a+r}\right)$; und ψ_2 ist der zu $\varphi = \pi$ zugeordnete …, also $\psi_2 = 0$. Setzt man diese Werte ein, so hat man:

$$J = \frac{2\pi r \sigma (a+r)}{a}\left\{1 - \sqrt{1-\frac{4ar}{(a+r)^2}}\right\}.$$

…i muß der Wert der Wurzel wesentlich positiv genommen werden, weil er …Kosinus eines spitzen Winkels vorstellt. Wegen $1 - \frac{4ar}{(a+r)^2} = \frac{(r-a)^2}{(a+r)^2}$ hat man

$$J = \frac{2\pi r \sigma (a+r)}{a}\left\{1 - \frac{r-a}{a+r}\right\}.$$

Beim zweiten Gliede des Klammerausdruckes darf man nicht etwa $-\frac{a}{a}$
schreiben, weil man sonst mit Rücksicht auf $r > a$ die Quadratwurzel negativ genom
hätte. Daraus erhält man: $J = 4\pi r \sigma$. Es ist also tatsächlich das gesuchte Pote
von der Lage des Potentialpunktes im Innern der Kugel ganz unabhängig.

Liegt der Potentialpunkt außerhalb der Kugelfläche, ist also $a > r$, so
die Rechnung genau so durchgeführt werden, doch muß jetzt, weil ja $\cos\psi_1$ w
wesentlich positiv ist, $\sqrt{1 - \frac{4ar}{(a+r)^2}} = \frac{a-r}{a+r}$ genommen werden, so daß man er
$J' = \frac{4\pi r^2 \sigma}{a}$. Der Zähler ist die ganze auf der Kugelfläche verteilte Masse. E
also das Potential genau demjenigen gleich, das eine gleich große in dem M
punkt der Kugel vereinigte Masse für sich allein in bezug auf einen Punkt in
Entfernung a ergibt. Da der Differentialquotient einer konstanten Zahl gleich
ist, ist auch die Stärke des Kraftfeldes im Innern der Kugel gleich Null. D
dürfen außer den auf der Kugeloberfläche gleichmäßig verteilten Massen keine
Kraftfeld erregenden Massen vorhanden sein.

Die Anwendungen dieses Ergebnisses auf die Erscheinungen der Schwe
Bergwerken und auf elektrische Zustände sollen hier nicht weiter verfolgt we
weil es sich dabei um keine Integralrechnung handelt.

Das Gesetz von Biot und Savart.

Die Gleichung $p = \frac{\mu i \lambda \sin\vartheta}{r^2}$ gibt die Kraft in Dynen an, die ein
langes Stromelement mit der Stromstärke i auf die magnetische Masse μ in
Entfernung r ausübt, wenn der Winkel zwischen der Stromrichtung und
Richtung vom Stromelement zur magnetischen Masse ϑ ist und die Maßzahlen sic
absolute Einheiten beziehen. Es steht also nach diesem Gesetze die Kraft, die
Stromelement auf eine magnetische Masse ausübt, unter übrigens gleichen
ständen zu dem Quadrate der Entfernung zwischen beiden in verkehrtem Ve
nisse. Man kann nun folgenden Versuch machen: Ein recht langer gerader Leit
draht wird lotrecht gehalten und ungefähr in seiner Mitte in einem Punkt
drei Schnüren versehen. An diesen befestigt man einen Ring aus starkem Pa
deckel so, wie man eine Wagschale an ihren Schnüren anbringt. Der Ring sc
dabei wagrecht und der Leiter geht mitten durch ihn hindurch. Nun legt man
geraden Magnetstab so auf den Ring, daß seine magnetische Achse mit dem
in einer Ebene liegt. Der Nordpol möge etwa dem Leiter zugekehrt sein.
passendes, unmagnetisches Gegengewicht sorgt dafür, daß der Ring hiebei wa
bleibt. Schickt man nun einen konstanten elektrischen Strom, etwa von unten

durch den Leiter, so bemerkt man keine Verdrehung des Ringes, er bleibt
mmen ruhig.

Es müssen sich also die Drehungsmomente, die der Strom auf den Ring
en Leiter als Achse ausübt, gerade aufheben, da der Ring durch ein solches sehr

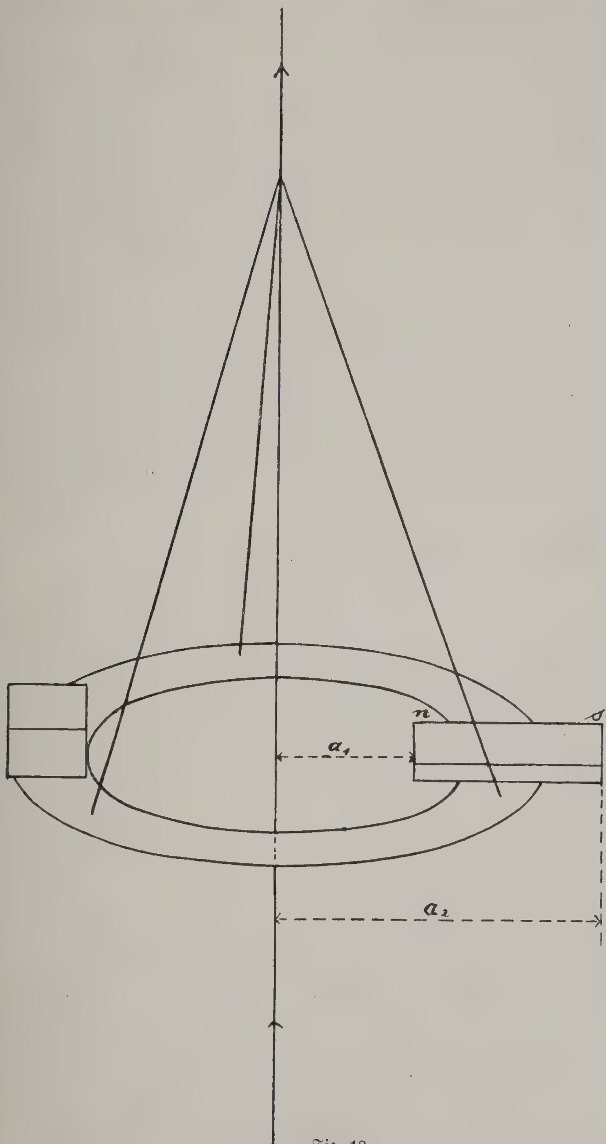


Fig. 18.

bewegt werden kann. Die auf den Nordpol n ausgeübte Kraft p_1 ist dabei
das Blatt gerichtet, die auf den Südpol s wirkende Kraft p_2 vor dieses.
men wir mit a_1 und a_2 die bezüglichen Entfernungen der Pole n und s von

dem geraden Leiter, so sind $p_1 a_1$ und $p_2 a_2$ die bezüglichen Drehungsmon
deren Sinn offenbar einander entgegengesetzt ist. Der Versuch lehrt uns nun
diese beiden Drehungsmomente gleich groß sind, da keine anderen Drehungsmo
auf den Ring ausgeübt werden. Es ist also: $p_1 a_1 = p_2 a_2$ oder $p_1 : p_2 = a$
Da die magnetischen Massen $+\mu$ und $-\mu$ der beiden Pole dem abs
Betrage nach gleich sind, erkennen wir, daß die Kräfte, die ein solche
Vergleich zur Größe des Ringes so gut wie unendlich langer Leiter auf
magnetische Massen in verschiedenen Entfernungen ausübt, zu den ersten Pote
dieser Entfernungen im verkehrten Verhältnisse steht. Das scheint dem Gese
Biot und Savart zu widersprechen. Es läßt sich aber durch eine Integration
daß sich diese scheinbar widersprechende Tatsache aus dem Gesetz von Bio
Savart notwendigerweise ergibt. Zu diesem Zwecke berechnen wir die Kraft,
unendlich langer, vom Strome i durchflossener Leiter auf eine magnetische M
in der Entfernung a ausübt. Zur Lagenbeschreibung verwenden wir für die
des geraden Leiters ihre Entfernung x von dem Fußpunkte (A) der Senkrechte
man von dem die Masse μ enthaltenden Punkte O auf den geraden Leiter
kann, wobei wir die Stromrichtung als positive Richtung benützen.

Dann ist wegen $r = \sqrt{a^2 + x^2}$, $\sin\vartheta = \sin(180^0 - \vartheta) = \frac{\mathrm{tg}\,(180^0 - \ldots}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,(180\ldots}}$

und $\mathrm{tg}\,(180^0 - \vartheta) = \frac{a}{x}$, also $\sin\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,

$$p = \frac{\mu\, i\, \lambda \sin\vartheta}{r^2} = \frac{\mu\, i\, dx \cdot a}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\mu\, i\, a \cdot dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Diese Kraft ist auf das Blatt senkrecht und nach vorne gerichtet. D
hier für die Kraftwirkung aller Stromelemente gilt, findet man die Resulti
aus den Einzelkräften beliebig vieler Stromelemente durch Addition der
kräfte. Man findet also die Gesamtkraft, die ein von $Q'(-r_1)$ bis $Q(+r$
erstreckendes Leiterstück auf die Masse μ ausübt, durch das Integral $J = \int_{-r_1}^{+r} \frac{\mu\, i \ldots}{(a^2 \ldots}$

Hebt man aus der Basis des Nenners a^2 heraus, so erhält man:

$$J = \int_{-r_1}^{+r_1} \frac{\mu\, i\, a\, dx}{a^3 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}} = \frac{\mu\, i}{a} \int_{-r}^{+r} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Setzt man nun $\frac{x}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$, also $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, so hat man:

$$J = \frac{\mu\, i}{a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^3\varphi\; d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\mu\, i}{a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi\; d\varphi = \frac{\mu\, i}{a} \left[\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right].$$

Als φ_1 muß dabei der Wert verwendet werden, den φ für $x = -$
nimmt; es muß also: $-\frac{r_1}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi_1$ und ebenso $\frac{+r_1}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi_2$ sein. Desha

$$\sin\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_2}} = \frac{r_1}{\sqrt{a^2+r_1^{\,2}}} \text{ und } \sin\varphi_1 = \frac{-r_1}{\sqrt{a^2+r_1^{\,2}}}, \text{ also}$$

$$J = \frac{\mu\, i}{a}\cdot\frac{2\, r_1}{\sqrt{a^2+r_1^{\,2}}} = \frac{2\,\mu\, i}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a_2}{r_1^{\,2}}+1}}.$$

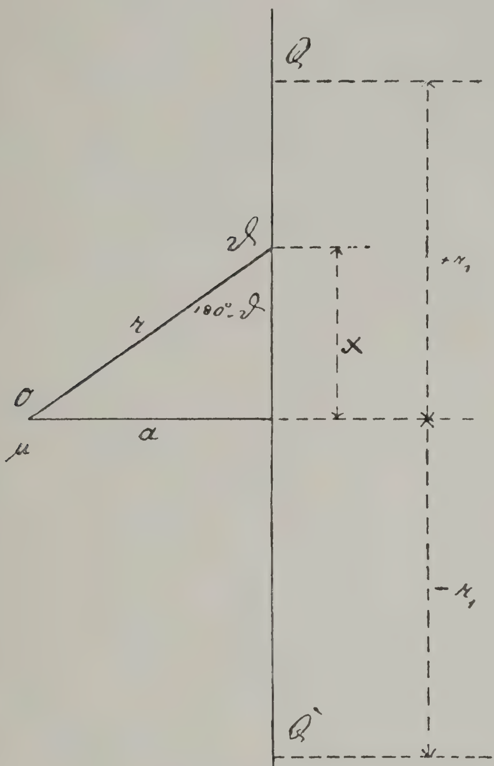


Fig. 19.

Denken wir uns jetzt r_1 unangebbar groß, so haben wir eben für den ganzen dlich langen Leiter die Kraftwirkung (J_∞) auf die Masse μ dargestellt. Also: $_\infty = \frac{2\mu\, i}{a}$, da $\lim\limits_{r_1=\infty} \frac{a^2}{r_1^{\,2}}$ unangebbar klein wird. Man sieht unmittelbar, daß diese wirkung zur ersten Potenz von a in verkehrtem Verhältnisse steht.

Die Tangentenbussole.

Fließt ein elektrischer Strom von der Stärke i um einen Kreis mit
Halbmesser a und bezeichnet man den Winkel, den der Kreishalbmesser
einer beliebigen Anfangslage aus in der Stromrichtung beschreibt, mit ψ, so ist
Kraft, die ein Stromelement $a \, . \, d\,\psi$ auf die magnetische Masse μ im Kreismi
punkt ausübt, durch $\frac{\mu\, i\, a \cdot d\,\psi}{a^2}$ dargestellt. Diese Kraft steht auf der Kreisfläche s
recht, so daß also alle Kräfte, die von den einzelnen Stromelementen des Kr
stromes auf die Masse μ im Mittelpunkt ausgeübt werden, zueinander parallel s
Deshalb ist ihre Resultierende gleich ihrer Summe, die durch das Inte
$\int_0^{2\pi} \frac{\mu\, i\, d\,\psi}{a} = \frac{2\pi\mu\, i}{a}$ ausgedrückt wird. Durchfließt der Strom n Windungen, so
gibt sich das Integral $\int_0^{2n\pi} \frac{\mu\, i\, d\,\psi}{a} = \frac{2n\pi\mu\, i}{a}$ als Ausdruck für die Kraft auf
Masse μ im Mittelpunkte des Kreises, in dessen Umfange die n Windungen
sammenfallend gedacht werden. Aus diesem Ausdruck wird nun in der bisher übli
Weise mittels des Hebelgesetzes die Gleichung $i = C \, . \, \mathrm{tg}\, \varphi$ abgeleitet.

Die Lehre von den magnetischen Doppelschalen, ihrer Beziehung zu str
durchflossenen Drahtwindungen und insbesondere die Lehre von der Induktion ge
zwar reichlich Gelegenheit zur Anwendung der Infinitesimalrechnung, doch tr
hiebei bereits erhebliche Schwierigkeiten auf, vor allem wegen der erhöhten
forderungen, die man an die Raumvorstellung machen muß. Deshalb soll hier
nicht weiter eingegangen werden.

Druck von Gottlieb Gistel & Cie., Wien, III., Münzgasse 6.

onderabdruck aus der *Apotheker-Zeitung*, 1909. No. 11.

beiten aus dem Pharmazeutischen Institut der Universität Berlin.

s der Abteilung zur Untersuchung von Arzneimitteln, Spezialitäten und Geheimmitteln.

Mergandol.

Von Dr. F. Zernik.

Mergandol ist der Name eines von dem Chemischen Laboratorium red Koch, Berlin W. 30, dargestellten Antisyphilitikums.

Das Präparat ist zunächst zur intramuskulären Injektion bestimmt, Prospekt des Darstellers schildert die Einspritzungen als reizlos und Nebenwirkungen. Weiter wird Mergandol zur äußerlichen Anung gegen sämtliche syphilitischen Eruptionen der Haut und der imhäute empfohlen.

Eine Flasche zu 50 ccm Inhalt kostet 2,20 M.

Ueber die chemische Zusammensetzung des Präparates besagt Prospekt folgendes:

„1. Mergandol ist die Lösung eines Quecksilbernatriumglyzerates in erin. 1 ccm der Lösung enthält 0,0035 g Quecksilber.

Da es sich empfiehlt, alle zwei Tage 2 ccm Mergandol zu injizieren, hält der Patient bei jeder Injektion 0,007 g Quecksilber.

2. Durch das Mergandol wird das Körpereiweiß in keiner Weise idert; es wird nicht gefällt.

3. Das Quecksilber wird aus dem Mergandol weder durch Alkalien durch Säuren gefällt.

4. Die Lösung ist unbegrenzte Zeit haltbar."

Unter Glyzeraten versteht man Verbindungen, in denen ein oder Wasserstoffatome der alkoholischen Hydroxylgruppen des Glyzerins Metall ersetzt sind. Ein Natriumglyzerat ist als unbeständige ndung von der Zusammensetzung $NaC_3H_7O_3$ in der Literatur be-, ebenso andere Glyzerate, nicht aber Quecksilber-Glyzerat oder ksilber-Natrium-Glyzerat.

Es erschien also die Untersuchung des Mergandols angebracht.

Zu dieser Untersuchung lagen eine Anzahl durch Vermittelung eschäftsstelle des Deutschen Apotheker-Vereins aus dem Großhandel gener Originalflaschen Mergandol vor.

Indbydelsesskrift

til

offentlige Examen

i

Nykiøbing Cathedralskole

1852

ved

E. P. Rosendahl,
Rector.

Nykiøbing.

Trykt i V. Laubs Enkes Officin.

OM

IGENDE STÖRRELSER

erging magnitudes

ved

J. P. BUCH,

cand. [redacted]

FORORD.

værende Afhandling udgjör en Deel af en Lærebog i
lementære Mathematik, hvis förste Hovedafsnit er ud-
net under Titel: „De förste Elementer af Mathema-
n", Kbhavn 1849, men hvoraf Fortsættelsen endnu
er udgivet, paa Grund af adskillige Forhindringer. Da
af mig valgte Fremstilling er temmelig forskjellig fra
rhaandenværende Lærebögers, skal jeg her fremsætte,
edes jeg har tænkt mig Anordningen af de enkelte
t.

Saavel i videnskabelig som i pædagogisk Henseende an-
eg det for rigtigst i den elementære Mathematik at sondre
heoretiske Deel om de mathematiske Former fra den
ske Deel eller Mathematikkens Anvendelse i Regning
a Lösning af Opgaver; thi herved vil baade Oversig-
ttes og en skjæv Opfatning forebygges. Eleven er ellers
elig til at betragte de mathematiske Sætninger som
r for Regning, f. Ex. Formlen $m\ (a+b)=ma+mb$
en Regel for, hvorledes en Sum skal multipliceres med
l, medens Formlen lærer, at et vist Produkt og en
ım ere ligestore, og derfor ligesaavel kan benyttes til
ae over fra den sidste Form til den förste, som om-
. De mathematiske Former bör ikke betragtes som

Opgaver i Regning, men deres Betydning opfattes uafh
gig deraf; saaledes er Differentsen 8—3 ligesaavel
Tal, som 5, omendskjöndt det er udtrykt ved to. De
skjellige Regningsarter gaae nemlig ikke ud paa at
nye Værdier af Störrelser, men alene at transforme
givet explicit Udtryk til et andet af en bestemt Form,
ledes er 14 (ɔ: 10 + 4) ligesaavel en Sum som 5
Ved strængt at fastholde den Maade, hvorpaa enhver
skrives (ikke kalde 18 et Produkt, fordi det er liig
duktet 3.6), opnaaes en Skarphed i Udtrykket, som bid
til at lette Forstaaelsen af mere sammensatte Udtryk.

Mathematik er ikke en Lære om Tal, men om St
relser; Tallet kan vel træde istedetfor Störrelsen og k
derfor ogsaa abstract Störrelse, men det kan ikke op
i og for sig alene uden Tilföielse eller Underforstaael
en Störrelse eller en Gjenstand; hvorimod den conc
Störrelse kan opfattes ved en umiddelbar Anskuen
Hensyn til Tal, ligesom Værdien af en Sum eller Differ
af concrete Störrelser (f. Ex. Linier, Vinkler o. s. v.) k
fremstilles uden nogen foregaaende Udmaaling. Det
kommer mig derfor rigtigst at gjennemgaae den conc
Störrelses Former særskilt, uafhængig af Tallets Form
hvorved Fremstillingen vinder i Beskuelighed og i An
delighed, idet de forskjellige Former af Tal kunne gje
nemgaaes samtidig med Hensyn til hele Tal og Brök.

Den elementære Mathematik har jeg tænkt mig
i 3 Hovedafsnit. Den förste Deel, der er udkom
under ovennævnte Titel, behandler alene Störrelser forsaa
vidt de betragtes som aldeles eensartede; her gjennemgaa
(förste Capitel) den concrete Störrelses 4 Former, neml
1) Sum ɔ: Störrelsen udtrykt ved to eller flere Störrelser
Tegnet +. 2) Differents ɔ: Störrelsen udtrykt ved to Stö

s og Tegnet —, 3 og 4) Produkt og Qvotient ɔ: Stör-
i udtrykt ved en Större1se og et heelt eller bruddent
l endvidere vises, at Værdien af et Forhold (ɔ: Qvotien-
f to Störrelser) altid kan angives idetmindste tilnærmel-
s som en Brök. I andet Capitel gjennemgaaes
s 6 Hovedformer: Sum, Differents, Produkt, Qvotient,
ts og Rod, (medens Logarithme opsættes til næste
t) og nogle almindelige Egenskaber ved hele Tal. De
ide 2 Capitler, tredie og fjerde udgjöre den prak-
Deel og indeholde Anvendelsen af det Foregaaende
Jdförelsen af de forskjellige Regningsarter og Oplös-
n af Ligninger af förste Grad. Den anden Hoved-
, som forhaabentlig snart vil udkomme, afhandler
lser, der kunne betragtes som modsatte; her gjennem-
(femte Capitel) Sum, Produkt og Potents i de
Betydninger, som ere en Fölge af, at de forelagte
lser og Tal kunne betragtes som positive og negative;
g föies hertil en ny Form af Tallet, nemlig Logarith-
af et Tal. Heraf vises Anvendelsen (sjette Capi-
paa Bogstavregning, almindelig Oplösning af Ligninger
ste og anden Grad og endelige Talrækker; syvende
tel indeholder elementær Functionslære. Den tre-
Hoveddeel afhandler afvigende Störrelser og Lignin-
s almindelige Theorie, hvoraf de förste ere Gjenstand
ærværende Afhandling, som skylder sin Oprindelse til
rk af Prof. Matzka i Prag (Versuch einer richtigen
von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen
lgebra, Prag 1850), hvori Forfatteren med en rigtig-
trættende Vidtlöftighed har godtgjort, at imaginære
lser ligesaavel kunne tillægges en Betydning som re-
törrelser, og derved gjendrevet de Indvendinger mod
elsen af negative og imaginære Störrelser i Mathe-

matikken, som Schmeiszer har fremsat i sin „kriti
Betrachtung einiger Lehren der reinen Analysis, wel
der Vorwurf der Ungereimtheit gemacht worden ist“ (Fr
furt a. d. Oder, 1842—1846). I sin Fremstilling af i
ginære Störrelser har Matzka uden noget nyt Beviis
nyttet de mathematiske Hovedsætninger, medens det s
at være indlysende, at disse Sætninger paany maae bev
efterat Sum, Produkt og Potents have erholdt en ny
tydning. Af denne Mening synes ogsaa Englænderen J
Warren at være, hvis Arbeider om denne Gjenstand
imidlertid alene kjender af Udtog i Matzkas ovenn
Værk.

Om afvigende Störrelser.

$$I_{2p\pi + x}\, r = I_x\, r\,,$$

$$I_{(2p+1)\pi + x}\, r = -I_x\, r = I_x\,(-r).$$

fvigende Störrelser ere eensartede Stör-
, der kunne betragtes som ueensartede
rund af en Omstændighed, som forbindes
d.

tte Linier, der udgaae fra et Punkt i forskjellige
er i et Plan, kunne betragtes som afvigende Stör-
Tages alene Hensyn til Længden, ere Linierne
ede; tages derimod tillige Hensyn til deres for-
e Retning, kunne de ansees for ueensartede. En
le Störrelse (Linie) betegnes almindelig ved $I_x r$,
angiver Liniens Længde og x den Vinkel, Linien
med en fast Linie, eller den tilsvarende Cirkel-
d Radius $= 1$; Længden r kaldes Störrelsens
e Værdie eller Modulus, Vinklen x kaldes Stör-
Declination, der regnes positiv eller negativ,
n den faste Linie er Vinklens höire eller venstre
Afvigelsescharacteristikken I_x tjener altsaa lige-

---

er Man sig i en Vinkels Toppunkt og seer henad Vinkel-
ene, vil Vinklen ligge paa höire Side af sit ene Been, som
or kan kaldes det venstre, ligesom det andet Been paa
me Maade kan kaldes det höire. Ved at indföre disse Be-

som Fortegnene + og — ved modsatte Störrelser al
til at angive Störrelsens Art. Almindelig indsees, at
vigende Störrelser ere periodiske med Hensyn til de
Declination, eller idet p er et heelt Tal,

$$I_x r = I_{2p\pi + x} r.$$

Ligeledes haves

$$r = I_0 r = I_{2p\pi} r$$

$$-r = I_\pi r = I_{(2p+1)\pi} r.$$

Positive og negative Störrelser henhöre altsaa til
vigende Störrelser; de kaldes reelle i Modsætning
andre afvigende Störrelser, der kaldes imaginære.

Modulus antages sædvanlig for positiv, efterdi en
vigende Störrelse med negativ Modulus er eensgjæld
med en anden, hvis Modulus er positiv nemlig

$$I_x(-r) = -I_x r = I_{\pi + x} r.$$

Anm. Her afhandles alene afvigende Linier i eet P
en afvigende Linie i Rummet maa angives
Modulus eller Længden, Declinationen eller V
len, som Linien danner med en fast Axe,
Inclinationen eller Vinklen, som Declinatio

---

nævnelser kunne adskillige Sætninger i Plangeometrien udtr
paa en kortere Maade. F. Ex.

Naar 2 Vinkler med samme Toppunkt ere ligestore, o
ene Par eensbeliggende Been ere en Forlængelse af hina
ere Vinklerne Topvinkler.

Naar to ligestore Vinkler med forskjellige Toppunkter
et Par eensbeliggende Been i een ret Linie, ere det and
Been parallele.

Naar Supplementvinkler med forskjellige Toppunkter
et Par ueensbeliggende Been i een ret Linie, ere det and
Been parallele.

To Vinkler ere ligestore, naar ethvert Par eensbelig
Been ere parallele eller staae lodret paa hinanden.

To Vinkler ere Supplementvinkler, naar ethvert Par u
beliggende Been ere parallele eller staae lodret paa hinan

Plan danner med et fast Plan gjennem Axen, den kan betegnes ved $J_z I_x r$.

$$I_x r \pm I_x r' = I_x (r \pm r'),$$
$$m. I_x r = I_x (mr) = (I_x m) . r .$$

fvigende Störrelser med samme Declination ere enten tede eller modsatte, saaat Definitioner og Sætninger m, Differents og Produkt (med reel Multiplicator) n kunne anvendes paa dem.

en concrete Eenhed antages bestandig at være po- ɔ: uden Afvigelse) og kan almindelig underfor- saaat afvigende Störrelser kunne betragtes som ler abstracte Störrelser, idet Begrebet om Pro- f et afvigende Tal og en concret Störrelse bliver ved Formlen $(I_x m) . r = I_x (mr)$, hvor m er et r en concret Störrelse. I det Fölgende antages et Tal.

Det er tilstrækkeligt at betragte eet Slags afvigende Störrelser f. Ex. Linier, da Eenheden underforstaaes, og hvad der gjælder om dette Slags Störrelser, kan overföres paa andre, der kunne betragtes som afvigende f. Ex. bevægende Kræfter virkende paa eet Punkt.

Sættes $I_x r + I_y r' = I_z \varrho$

1) $\varrho^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(y - x)$

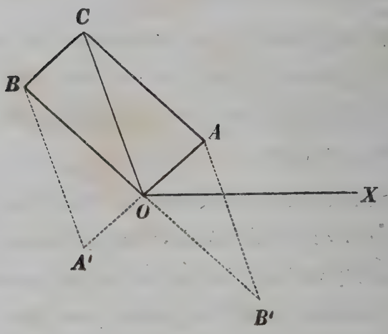
2) $\dfrac{\varrho}{\sin(y-x)} = \dfrac{r}{\sin(y-z)} = \dfrac{r'}{\sin(z-x)}$

3) $\varrho \cos z = r \cos x + r' \cos y$

4) $\varrho \sin z = r \sin x + r' \sin y$

5) $\varrho \cos(z + t) = r \cos(x + t) + r' \cos(y + t)$.

En Sum af afvigende Störrelser er li Störrelse, hvis Værdie og Declination e stemt ved Diagonalen i et Parallelogram, de forelagte Addender ere 2 hosliggende S



Ifölge denne De kommer alene d lagte Störrelsers I og Declination i B ning, hvorimod Udgangspunkt e gyldigt; saaledes Addenderne afsæt OA og OB, ell OA og AC, ell OB og BC, idet $BC = r$, $OB = AC = r'$, $AOX = x$, $BOX = y$, altsaa og $COX = z$. Af Trekanten OAC haves for hvilkes Værdier af x, y og z:

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 + 2\,rr'\cos(y - x)$$

$$\frac{\varrho}{\sin(y-x)} = \frac{r}{\sin(y-z)} = \frac{r'}{\sin(z-x)}$$

af den sidste haves

$$\varrho \sin y \cos z - \varrho \cos y \sin z = r \sin(y - x),$$

$$\varrho \sin z \cos x - \varrho \cos z \sin x = r' \sin(y - x),$$

hvoraf erholdes ved Elimination

$$\varrho \cos z = r \cos x + r' \cos y$$

$$\varrho \sin z = r \sin x + r' \sin y.$$

Indsættes disse Udtryk for $\varrho \cos z$ og $\varrho \sin z$ i Form

$\varrho \cos(z + t) = \varrho \cos z \cos t - \varrho \sin z \sin t$, haves

$$\varrho \cos(z + t) = r \cos(x + t) + r' \cos(y + t),$$

hvor t betegner en hvilkensomhelst Vinkel.

Den sidste Formel viser, at Projectionen paa en
nsomhelst Linie (i Planet) af Störrelsen, der er liig
ım af afvigende Störrelser, er liig Summen af Ad-
rnes Projectioner paa denne Linie, betragtede som
ve eller negative fra Fodpunktet af Begyndelses-
ets (O) Projectrix.

a. Definitionen paa Sum af afvigende Störrelser indbefatter som specielle Tilfælde Sum af eensartede og Sum af modsatte Störrelser; sættes nemlig $y-x=0$, $y-x=\pi$, haves $z=x$ og respective

$$\varrho = r + r'$$
$$\varrho = r - r'.$$

4.
$$I_z\varrho - I_x r = I_z\varrho + I_x(-r)$$
$$= I_z\varrho + I_{\pi+x} r.$$

Enhver Differents er liig Summen af Miden og det Modsatte af Subtrahenden.

Ved at overföre den oprindelige Definition af Diffe- paa det opstillede Begreb af Sum, erholdes oven-nde Sætning af Art. 3. Sættes nemlig

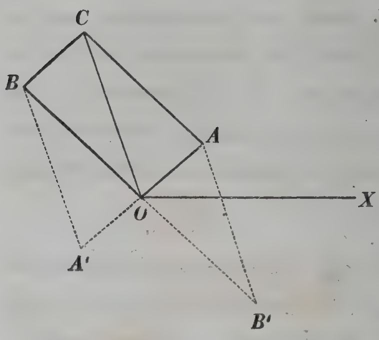
$$I_z\varrho + I_{\pi+x} r = I_u r''$$
$$\text{og}\quad I_z\varrho - I_x r = I_y r'$$
$$\text{eller}\quad I_z\varrho = I_x r + I_y r',$$

aves
$$r'\cos y = \varrho\cos z - r\cos x = r''\cos u$$
$$r'\sin y = \varrho\sin z - r\sin x = r''\sin u$$

ltsaa idet r′ og r″ antages for positive

$$r'' = r',\ u = y.$$

Sætningen kan ogsaa godtgjöres ved geometrisk Con-tion; thi forlænges OA og afsættes $OA' = OA$, sees at



OB baade er Diago… Parallelogrammet A… Side i Parallelogra… AB, bestemt ved … OA og Diagonalen O… Ligeledes naar OB… længes og $OB' = O$… OA Diagonal i B'… Side i AB.

5. $$I_z\varrho = \varrho\cos z + I_{\frac{1}{2}\pi}\varrho\sin z$$
$$= \varrho\,(\cos z + I\sin z)^{*)}.$$

Enhver afvigende Störrelse er liig Sum… af en reel og en imaginær Störrelse, hvis … clination er en ret Vinkel.

Denne Sætning erholdes som et specielt Tilfæl… Art. 3 ved at sætte $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$; iövrigt kan Sæt… gen ogsaa godtgjöres ved geometrisk Construction.

Anm. Afvigende Störrelser fremstilles sædvanlig u… Formen $\varrho\cos z + I\varrho\sin z$, hvorfor Formlerne d… Fölgende opstilles under dobbelt Form ved B… nyttelse af ovenstaaende Sætning.

6. $(a + Ib) + (a' + Ib') = (a + a') + I\,(b + \ldots)$

En Sums Værdie er uafhængig af Addendernes O… den. — En Sums Værdie forandres ikke, naar en Ad… oplöses i flere, eller naar flere Addender sammenfattes ti…

---

*) Tegnet $I_{\frac{1}{2}\pi}$ ombyttes for Kortheds Skyld med I.

Sættes $a = r\cos x$, $b = r\sin x$ eller $a + Ib = I_x r$

$$a' = r'\cos y,\ b' = r'\sin y \text{ eller } a' + Ib' = I_y r'$$

$$I_x r + I_y r' = I_z \varrho = \varrho\cos z + I\varrho\sin z,$$

haves

$$\varrho\cos z = r\cos x + r'\cos y = a + a'$$

$$\varrho\sin z = r\sin x + r'\sin y = b + b'$$

altsaa

$$(a + Ib) + (a' + Ib') = (a + a') + I(b + b').$$

Dette Resultat kan udvides til en Sum af flere Addender; heraf udledes ovennævnte Sætninger, der ogsaa kunne erholdes ved geometrisk Betragtning, idet Summen kan fremstilles ved en brækket ret Linie, hvis Endepunkt ikke forandres ved Ombytning af de enkelte Stykker, naar hvert Stykkes Declination forbliver uforandret.

7. $$I_x r\ .\ I_y r' = I_{x+y} rr',$$

$$(r\cos x + Ir\sin x)\ .\ (r'\cos y + Ir'\sin y)$$
$$= rr'\cos(x + y) + Irr'\sin(x + y).$$

Et Produkt af afvigende Störrelser er liig en Störrelse, hvis Declination er Summen af Factorernes Declinationer, og hvis Modulus er Produktet af de forelagte Moduli.

Betydningen af et Produkt af afvigende Störrelser fastsættes ved ovenstaaende Formel overeensstemmende med Art. 2. — Et Produkts Modulus er altsaa uafhængig af Factorernes Declinationer, og Productets Declination uafhængig af Factorernes Moduli. — Betydningen af et Produkt af positive og negative Factorer er indbefattet som specielt Tilfælde i ovenstaaende Formel, f. Ex.

Sættes $x = y = \pi$, haves $(-r)\ .\ (-r') = +rr'$.

Som specielt Tilfælde mærkes $Ir\ .\ Ir' = -rr'$.

Anm. Et Produkts Værdie er uafhængig af Factor[ne]
Orden.

Et Produkts Værdie forandres ikke, na[ar en] Factor oplöses i flere, eller naar flere Fa[ctorer] sammenfattes til een.

Disse Sætninger erholdes ligefrem af Di[fini]tionen paa Produkt idet $I_{x+y}\, rr' = I_{y+x}\, r'r$

8. $(I_x r + I_y r') \,.\, I_z \varrho = I_x r \,.\, I_z \varrho + I_y r' \,.\, I_z \varrho.$

Et Produkt, hvis ene Factor er en Sum[, er] liig Summen af Produkterne af den anden [Fac]tor og de forelagte Addender.

Sættes nemlig $I_x r + I_y r' = I_u r''$,

haves $r'' \cos u = r \cos x + r' \cos y$

$r'' \sin u = r \sin x + r' \sin y$

altsaa $(I_x r + I_y r') \, I_z \varrho = I_{z+u} r'' \varrho$

$$= r'' \varrho \cos (z+u) + I\, r'' \varrho \sin (z+u)$$
$$= r \varrho \cos (z+x) + r' \varrho \cos (z+y)$$
$$+ I\, [r \varrho \sin (z+x) + r' \varrho \sin (z+y)]$$
$$= I_{z+x}\, r \varrho + I_{z+y}\, r' \varrho$$
$$= I_x r \,.\, I_z \varrho + I_y r' \,.\, I_z \varrho.$$

Som specielt Tilfælde haves

$$(a + Ib)(a' + Ib') = aa' - bb' + I(ab' + a'b)$$

der ogsaa erholdes af Art. 7 ved at sætte $a = r\cos x$, $b = r \sin x$, $a' = r' \cos y$, $b' = r' \sin y$.

9. $I_z \varrho : I_x r = I_{z-x} (\varrho : r)$,

$$\frac{\varrho \cos z + I \varrho \sin z}{r \cos x + I r \sin x} = \frac{\varrho}{r} \left[\cos (z - x) + I \sin (z - x)\right]$$

En Qvotient af afvigende Störrelser er li[ig] en Störrelse, hvis Declination er Differente[n] mellem de forelagte Störrelsers Declinatio[ner].

hvis Modulus er Qvotienten af deres Mo-
i.

Denne Sætning erholdes af Art. 7 ved at overföre oprindelige Definition af Qvotient paa det opstillede reb af Produkt, idet nemlig

$$I_{z-x}(\varrho : r) \cdot I_x r = I_{z-x+x}(\varrho : r)\, r = I_z \varrho .$$

10. $I_z \varrho : I_x r = I_z \varrho \cdot \dfrac{1}{I_x r} = I_z \varrho \cdot I_{-x}\left(\dfrac{1}{r}\right).$

Enhver Qvotient er liig Produktet af Dividen og det Omvendte af Divisor.

Naar i Formlen i Art. 9 indsættes $\varrho = 1$, $z = 0$, es

$$\frac{1}{I_x r} = I_{-x}\frac{1}{r} = \frac{1}{r}(\cos x - I\sin x),$$

af erholdes ifölge Art. 7

$$I_z \varrho \cdot \frac{1}{I_x r} = I_z \varrho \cdot I_{-x}\frac{1}{r} = I_{z-x}\frac{\varrho}{r} = I_z \varrho : I_x r .$$

11. $(I_x r)^m = I_{mx}\, r^m$

$$(r\cos x + I r \sin x)^m = r^m(\cos mx + I \sin mx).$$

En Potents af en afvigende Störrelse er liig Störrelse, hvis Declination er Produktet af onenten og Grundfactorens Declination, og s Modulus er en Potents af den forelagte lulus.

Denne Sætning, der faaer Navn af Moivres Binolformel, erholdes af Artikel 7, idet den oprindelige nition af Potents med positiv eller negativ heel Exnt overföres paa Begrebet af Produkt af afvigende relser. Naar m er positiv, haves

$$(I_x r)^m = I_x r_1 \, . \, I_x r_2 \, . \, . \, . \, . \, I_x r_m = I_{mx} r^m$$

idet $r_1 = r_2 = \, . \, . \, . \, . \, r_m$.

Sættes $m = -p$, hvor p er positiv, haves i
Art. 10

$$(I_x r)^{-p} = \frac{1}{(I_x r)^p} = \frac{1}{I_{px} r^p} = I_{-px} (r^{-p}).$$

Som specielle Tilfælde mærkes

$$(I1)^{4p} = +1, \quad (I1)^{4p+1} = I1,$$
$$(I1)^{4p+2} = -1, \quad (I1)^{4p+3} = -I1 .$$

Anm. Af Moivres Formel bevises, at de bekjendte H[illegible]sætninger om Potents ogsaa ere gjældende i [illegible] Betydning, nemlig

$$(I_x r \, . \, I_y r')^m = (I_{x+y} r r')^m = I_{mx+my} r^m . r'^m = (I_x r)^m . (I_{[illegible]}$$
$$(I_x r)^m . (I_x r)^n = I_{mx} r^m . I_{nx} r^n = I_{(m+n)x} r^{m+n} = (I_x r)^{m+n}$$
$$((I_x r)^m)^n = (I_{mx} r^m)^n = I_{mnx} r^{mn} = (I_x r)^{mn}$$

12. $$\left(I_x r\right)^{\frac{1}{n}} = I_{\frac{2p\pi + x}{n}} \sqrt[n]{r} \text{ *)}$$

$$\left(r \cos x + I r \sin x\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2p\pi + x}{n} + I \sin \frac{2p\pi + [illegible]}{[illegible]}\right.$$

En Rod af en afvigende Störrelse har [illegible] mange forskjellige Værdier, som Exponet[illegible] angiver, der dog alle have samme Modulus

Ved at overföre den oprindelige Definition a[illegible] paa det opstillede Begreb af Potents erholdes ovensta[illegible] Formel af Art. 11, nemlig

---

*) Roden i den nye Betydning betegnes ved $r^{\frac{1}{n}}$ eller $\sqrt[n]{\!\!\sqrt{r}}$, [illegible] imod $\sqrt[n]{r}$ betegner den Værdie, som har den mindste Decli[illegible] altsaa den positive Værdie naar r er positiv, hvilket her [illegible] sættes.

$$\left(I_{\frac{2p\pi+x}{n}} \sqrt[n]{r}\right)^n = I_{2p\pi+x} r = I_x r$$

p er et hvilketsomhelst heelt Tal. Sættes efterhaanden $0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, vil $I_{\frac{2p\pi+x}{n}} \sqrt[n]{r}$ have n for-lige Værdier; naar derimod for p indsættes de efter-ende positive og forangaaende negative hele Tal, ville Værdier gjentages periodisk i det Uendelige; thi es $p = mn + p'$, hvor m og p' ere hele Tal, haves

$$I_{\frac{2p\pi+x}{n}} \sqrt[n]{r} = I_{2m\pi + \frac{2p'\pi+x}{n}} \sqrt[n]{r} = I_{\frac{2p'\pi+x}{n}} \sqrt[n]{r}.$$

Anm.

$$\sqrt{a \pm Ib} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \pm I \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

es nemlig $a = r\cos x$, $b = r\sin x$, haves $r = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{r+r\cos x}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$$

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{r-r\cos x}{2}} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

her læses överste eller nederste Fortegn eftersom x positiv eller negativ.

13. $\sqrt[n]{1} = I_{\frac{2p}{n}\pi} 1 = \cos\frac{2p}{n}\pi + I\sin\frac{2p}{n}\pi$

$$\sqrt[n]{-1} = I_{\frac{2p+1}{n}\pi} 1 = \cos\frac{2p+1}{n}\pi + I\sin\frac{2p+1}{n}\pi,$$

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots (n-1).$$

Ovenstaaende Udtryk erholdes af Art. 12 ved at antage $r = 1$, $x = 0$, $x = \pi$. Sættes

$$I_{\frac{\pi}{n}} 1 = \cos\frac{\pi}{n} + I\sin\frac{\pi}{n} = \varphi,$$

s ifölge Moivres Formel

$$\sqrt[n]{1} = 1, \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{2n-2}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots \varphi^{2n-1}$$

hvor $\varphi^n = -1$ er en Værdie af $\sqrt[n]{1}$, naar n er et l Tal; men en Værdie af $\sqrt[n]{-1}$, naar n er et ulige Ta Ifölge Betydningen af φ haves (Art. 1 og 11.)

$$\varphi^{2n-q} = \varphi^{-q} = \cos\frac{q\pi}{n} - I\sin\frac{q\pi}{n}, \text{ altsaa}$$

$$\sqrt[n]{1} = \varphi^{\pm 2p} = \cos\frac{2p}{n}\pi \pm I\sin\frac{2p}{n}\pi$$

$$\sqrt[n]{-1} = \varphi^{\pm(2p+1)} = \cos\frac{2p+1}{n}\pi \pm I\sin\frac{2p+}{n}\pi$$

hvor $p = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}$, idet $p = \frac{n}{2}$ bortfalder U trykket for $\sqrt[n]{-1}$, og naar n er et ulige Tal.

Ifölge Art. 1 og 11 haves ligeledes $\varphi^{n+q} = -\varphi$ altsaa erholdes

1) naar n er et lige Tal:

$$\sqrt[n]{1} = \pm 1, \pm\varphi^2, \pm\varphi^4, \ldots \pm\varphi^{n-2}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \pm\varphi, \pm\varphi^3, \pm\varphi^5, \ldots \pm\varphi^{n-1}$$

2) naar n er et ulige Tal:

$$\sqrt[n]{1} = \begin{cases} 1, & \varphi^2, \quad \varphi^4, \ldots\ldots \varphi^{n-1} \\ -\varphi, & -\varphi^3, -\varphi^5 \ldots\ldots -\varphi^{n-2} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \begin{cases} \varphi, & \varphi^3, \quad \varphi^5, \ldots\ldots \varphi^{n-2} \\ -1, & -\varphi^2, -\varphi^4, \ldots -\varphi^{n-1}. \end{cases}$$

De samme Resultater erholdes ved geometris B tragtning, idet en Cirkellinie tænkes deelt i $2n$ lig Dele og Radier drages til Delingspunkterne.

Anm. Et Produkt af forskjellige Værdier af $\sqrt[n]{1}$ (Potents) er selv en Værdie deraf. Et Prod t

et ulige Antal Værdier af $\sqrt[n]{-1}$ (en Potents med ulige Exponent) er selv en Værdie af $\sqrt[n]{-1}$; hvorimod et Produkt af et lige Antal Værdier af $\sqrt[n]{-1}$ (en Potents med lige Exponent) er en Værdie af $\sqrt[n]{+1}$. — Enhver Værdie af $\sqrt[n]{1}$ er ogsaa en Værdie af $\sqrt[mn]{1}$.

14. 1) $\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_x r.\ I_y r'\right)^{\frac{t}{n}}$

2) $\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} \left(I_x r\right)^{\frac{q}{m}} = \left(I_x r\right)^{\frac{mt+nq}{mn}}$

3) $\left(\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}}\right)^{\frac{q}{m}} = \left(I_x r\right)^{\frac{tq}{mn}}$

En Ligning kaldes complet, naar begge dens Si- have det samme Antal Værdier og enhver Værdie af ene Side ogsaa er en Værdie af den anden. En Lig- er incomplet, naar Værdierne af den ene Side alle ere de samme som Værdierne af den anden . Heraf fölger, at incomplete Ligninger ikke kunne ›ineres paa samme Maade som complete.

Saaledes er $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$ en complet Ligning, efterdi e Sider kun have een Værdie, medens $\sqrt[n]{z^n} = z$ er nplet.

Naar t og n ere hele Tal, hvor n kan antages po- , t positiv eller negativ, haves

$$\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_{tx}\, r^t\right)^{\frac{1}{n}} = I_{\frac{2p\pi + tx}{n}} \sqrt[n]{r^t}$$

$$\text{s}\,x + I\, r \sin x\Big)^{\frac{t}{n}} = \sqrt[n]{r^t}\left(\cos\frac{2p\pi + tx}{n} + I \sin\frac{2p\pi + tx}{n}\right)$$

höire Side har n forskjellige Værdier (med samme

Modulus), om ogsaa t og n ere indbyrdes delelige, s
Ligningen $\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_x r\right)^{\frac{mt}{mn}}$ er incomplet; derimod k
bevises at ovenstaaende Formler ere complete, naar E
ponenterne ikke forkortes.

1) $$\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} \cdot \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}} = I_{\frac{2p\pi + tx}{n}} \sqrt[n]{r^t} \cdot I_{\frac{2p'\pi + ty}{n}} \sqrt[n]{\ }$$

$$= I_{\frac{2p''\pi + t(x+y)}{n}} \left(\sqrt[n]{rr'}\right)^t,$$

hvor det sidste Udtryk ikke har flere end n Væ
(jfr. Art. 12), saaat Produkterne (i Antal $= n^2$) a e
hver Værdie af $\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}}$ med enhver Værdie af $\left(I_y r'\right)$
geledes kun have n Værdier, der ogsaa fremkomme, a
en hvilkensomhelst Værdie af $\left(I_x \mathrm{r}\right)^{\frac{t}{n}}$ multipliceres n
enhver af de n forskjellige Værdier af $\left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}}$,

f. Ex. $I_{\frac{tx}{n}} \sqrt[n]{r^t} \cdot \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} \cdot \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}}$.

Da $I_{\frac{2p\pi + t(x+y)}{n}} \left(\sqrt[n]{rr'}\right)^t = \left(I_{x+y} rr'\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_x r . I_y\right.$

haves altsaa som en complet Ligning

$$\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} \cdot \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}} = I_{\frac{tx}{n}} \sqrt[n]{r^t} \cdot \left(I_y r'\right)^{\frac{t}{n}} = \left(I_x r . I_y r\right)^{\frac{t}{n}}$$

hvoraf fölger at

$$\sqrt[n]{\!\sqrt{a}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\!\sqrt{1}}$$
$$\sqrt[n]{\!\sqrt{-a}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\!\sqrt{-1}}$$

ere complete Ligninger. Værdierne af $\sqrt{\!\sqrt{-1}}$ ere I
$I_{\frac{3\pi}{2}} 1 = -I1$, betegnes altsaa ved $\sqrt{-1}$ den bes m
Værdie $I1$, kan der ikke af ovenstaaende Formel ud d
$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{+1} = 1$, da $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = I$. I

$_\pi 1 = -1$ kun har een Værdie; derimod haves
$$1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{+1} = \pm 1.$$

$$2)\quad \left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}} . \left(I_x r\right)^{\frac{q}{m}} = I_{\frac{2p\pi + tx}{n}} \sqrt[n]{r^t} .\ I_{\frac{2p'\pi + qx}{m}} \sqrt[m]{r^q}$$
$$= I_{\frac{2p''\pi + (mt+nq)x}{mn}} \sqrt[mn]{r^{mt+nq}} = \left(I_x r\right)^{\frac{mt+nq}{mn}}$$

e Ligning er complet, da begge Sider have ligemange lier.

$$3)\quad \left(\left(I_x r\right)^{\frac{t}{n}}\right)^{\frac{q}{m}} = \left(I_{\frac{2p\pi + tx}{n}} \sqrt[n]{r^t}\right)^{\frac{q}{m}}$$
$$= I_{\frac{2p'\pi + tqx}{mn}} \sqrt[mn]{r^{tq}} = \left(I_x r\right)^{\frac{tq}{mn}}$$

er en complet Ligning, naar Exponenterne ikke fors.

m. Naar Exponenten i en Potents er irrational, har Potentsen uendelig mange Værdier.

15. $$e^{I_t x} = 1 + I_t \frac{x}{1} + I_{2t} \frac{x^2}{1.2} + I_{3t} \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$
$$e^{Ix} = \cos x + I \sin x = I_x 1 .$$

)en exponentielle Function kan defineres ved Rækkelingen $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots,$ er convergent for enhver Værdie af x. Ved Hjælp af e Formel fastsættes Betydningen af en Potents, hvis nent er en afvigende Störrelse, nemlig

$$e^{I_t x} = 1 + \frac{I_t x}{1} + \frac{(I_t x)^2}{1.2} + \frac{(I_t x)^3}{1.2.3} + \dots$$
$$= 1 + I_t \frac{x}{1} + I_{2t} \frac{x^2}{1.2} + I_{3t} \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

Sættes $t = \frac{\pi}{2}$, haves (Art. 11)

$$e^{Ix} = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \dfrac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots \\ + I\left[\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots\right] \end{cases}$$

altsaa ifölge de bekjendte Rækkeudviklinger for cos ; sin x

$$e^{Ix} = \cos x + I \sin x = I_x 1 \text{ (Art. 5)}$$

og indsættes $-x$ istedetfor x, haves

$$e^{-Ix} = \cos x - I \sin x = I_{-x} 1$$

Anm. $$e^{I_x r} \cdot e^{I_y r'} = e^{I_x r + I_y r'}$$

Denne Formel bevises af Rækkeudviklingerne f $e^{I_x r}$, $e^{I_y r'}$ og $e^{I_x r + I_y r'}$.

16. $l. I_x r = l(r \cos x + I r \sin x) = l' r + I(2p\pi +$

$l. r = l' r + I 2p\pi,$

$l(-r) = l' r + I(2p +$

Logarithmen af en afvigende Störrels en afvigende Störrelse, der har uendelig ma Værdier med forskjellige Moduli.

Ifölge Art. 15 haves $e^{I(2p\pi + x)} = I_{2p\pi + x} 1 =$ fastsættes altsaa $e^{lz} = z$ gjældende, naar z er en afvig Störrelse, haves

$$l. I_x 1 = l(\cos x + I \sin x) = I(2p\pi + x)$$

endvidere er (Art. 15 Anm.)

$$l. I_x r = l(r I_x 1) = lr + l. I_x 1 = l' r + I(2p\pi +)$$

hvor $l' r$ betegner den reelle Logarithme af r idet a tages positiv, og hvor p er et hvilketsomhelst heelta saaat $l. I_x r$ har uendelig mange Værdier.

Sættes $x = 0$, haves $lr = l' r + I 2p\pi$

$x = \pi$, $\quad l(-r) = l' r + I(2p + 1)\pi,$

lr har een reel positiv Værdie, nemlig for $p = O$, mod alle Værdier af $l(-r)$ ere imaginære.

Ligeledes er $l.(-r)^2 = l.r^2 = l'r^2 + I2p'\pi$

$$= 2l'r + I2p'\pi$$

derimod
$$2lr = 2l'r + I4p\pi$$
$$2l(-r) = 2l'r + I(4p+2)\pi,$$

af sees, at $lr^2 = l(-r)^2$ er en complet Ligning; at $lr^2 = 2lr$ og $l(-r)^2 = 2l(-r)$ ere incomplete; a kan heraf ikke udledes $2lr = 2l(-r)$ eller $= l(-r)$, hvilket vilde stride imod ovenstaaende Ud- der vise, at lr og $l(-r)$ ingen Værdier have til- ds.

m.
$$(I1)^{I1} = \left(e^{-\frac{1}{2}\pi}\right)^{4p+1}.$$

ettes i Formlen for $l.\,I_x r$, $r = 1$ og $x = \frac{1}{2}\pi$, haves

$I1 = I\left(2p\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = I\frac{4+1}{2}\pi$, hvoraf erholdes

$$(I1)^{I1} = e^{I1.l.I1} = e^{-\frac{4p+1}{2}\pi} = \left(e^{-\frac{1}{2}\pi}\right)^{4p+1}$$

tsaa har $(I1)^{I1}$ uendelig mange Værdier, som alle re reelle.

17.
$$\cos x = \frac{e^{Ix} + e^{-Ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{Ix} - e^{-Ix}}{I2} = I\frac{e^{-Ix} - e^{Ix}}{2}.$$

Ved Elimination mellem Formlerne (Art. 15)

$$e^{Ix} = \cos x + I\sin x$$
$$e^{-Ix} = \cos x - I\sin x$$

erholdes ovenstaaende Udtryk for $\cos x$ og $\sin x$, vise hvorledes de trigonometriske Functioner kunne transformeres til exponentielle, idet de övrige Functioner bestemmes ved deres Relationer til Sinus og Cosinus. I disse Formler fastsættes

$$\cos I b = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2}$$

$$\sin I b = I \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}$$

ved nemlig at antage $x = Ib$, og heraf haves

$$\cos (a + I b) = \cos a \cos I b - \sin a \sin I b$$
$$\sin (a + I b) = \sin a \cos I b + \cos a \sin I b .$$

18. $arc\ (tg = z) = \frac{1}{I2}\ l. \frac{1 + I z}{1 - I z}$

$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + - \ldots$$

Af Art. 16 haves for $r = 1$, idet $l'\ 1 = 0$

$$l.\ I_x 1 = I(2p\pi + x)$$
$$l.\ I_{-x} 1 = I(2p\pi - x),$$

hvoraf erholdes ved Subtraction

$$2Ix = l.\ I_x 1 - l.\ I_{-x} 1 = l.\ \frac{\cos x + I \sin x}{\cos x - I \sin x} = l. \frac{1 + I tg}{1 - I tg}$$

altsaa ved at sætte $tg\,x = z$

$$arc\ (tg = z) = \frac{1}{I2}\ l.\ \frac{1 + I z}{1 - I z},$$

hvoraf sees, at de circulære Functioner kunne transformeres til logarithmiske;

dernæst i Rækkeudvikiingen

$$\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$$

ætte $x = Iz$, haves Rækken

$$rc\ (tg = z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + - \ldots$$

er convergent, naar z ikke er större end 1.

. Af $tg\,\frac{\pi}{4} = 1$ og $tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ erholdes

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right)$$

(Leibnitz Række).

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + - \ldots\right)$$

$$= 16.\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + \ldots\right).$$

19. $f\,(a \pm Ib) = A \pm IB.$

Af det Foregaaende sees, at enhver explicit Function
ı afvigende Störrelse af Formen $a + Ib$ kan trans-
eres til samme Form, hvilket er udtrykt i oven-
nde Formel, hvor a, b, A og B betegne reelle Stör-
r.

Udvikles $f\ (a \pm I\, b)$ ifölge Taylors Formel, h

$$A = f(a) - \frac{f''(a)\, b^2}{1.2.} + \frac{f^{IV}(a)\, b^4}{1.2.3.4} - \frac{f^{VI}(a)\, b^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdot$$

$$B = \frac{f'(a) b}{1} - \frac{f'''(a)\, b^3}{1.2.3} + \frac{f^{V}(a)\, b^5}{1.2.3.4.5} - \frac{f^{VII}(a).\, b^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdot$$

Skoleefterretninger.

Lærerne.

Afgangsclassen efter forrige Aars Examen var op= blev Ansættelsen af en ny Adjunct nødvendig, og aadan udnævnedes under 5te August f. A. hidtilvæ= Adjunct ved Herlufsholm Skole Cand. Philologiæ erik Theodor Nielsen.

lnder 28de Juni f. A. bevilligede Ministeriet Ad= Buch en Permission fra 23de Aug. til 15de Septbr. der senere forlængedes til 17de October, for ved rsitetet at underkaste sig den mathematiske Magister= ents.

lnder 6te April d. A. udnævnedes constitueret Lærer Theol. Georg Høst Brammer til virkelig Adjunct. lnder 17de Maj d. A. er hidtilværende Adjunct Georg Ferdinand Høeg kaldet til Sognepræst for Ste= Renighed i Flensborg Provsti. Da han imidlertid skal ordineres i Flensborg den 25de Juli, vedbliver t fungere ved Skolen indtil Examen er afholdt.

agenes Fordeling har imidlertid for største Delen den samme som i forrige Aar. Og saaledes havde græsk Testamente og Religion i de 5 øverste Clas= mt Tydsk og tydsk Stiil i 6—4 Classe, 19 Timer. Overlærer Blicher Græsk og Hebraisk i hele Skolen, mer.

Overlærer Mag. Lund Latin og latinsk Stiil i
6te og tildeels 5te Classe, 23 Timer.

Adjunct Buch Mathematik og Naturlære i hele S
29 Timer.

Adjunct Westesen Naturhistorie i hele Skol
Dansk i de 4 øverste Classer, 22 Timer.

Adjunct Øhlenschlæger Historie og Geogra
hele Skolen, 30 Timer.

Adjunct Høeg Fransk i hele Skolen og Relig
1ste og 2den Classe, 22 Timer.

Adjunct Brammer Dansk og Tydsk i de 3 ne
Classer, 27 Timer.

Adjunct Nielsen Latin i 3die, 4de og tildee
Classe samt geometrisk Tegning i de 3 nederste Cs
25 Timer.

I Calligraphie, Tegning, Gymnastik og Sangl
des fremdeles Underviisningen respective af Ov
Blicher, Adjunct Westesen, Adjunct Høeg o
ganist Braase.

Inspectoratet forestodes af Adjunct Øhlenschl

Disciplene.

Af forrige Aars 6te Classe afgik 7 Dimitten
Universitetet, nemlig: 1) Julius Evald Lunddahl
mand L. i Maribo), 2) Johannes Carl Emil Cla
(Pastor C. paa Bogø), 3) Frants Christian Hn
Sodemann (Forpagter S. paa „Nøisomhed" pa
ster), 4) Povel Martin Møller (Stiftsprovst Ma
i Torkildstrup), 5) Leonhard Sodemann (Broder
3), 6) Henrik Christian Møller Holst, (Consistor

Maglebÿ i Siæland). 7) Johannes Emil Wiberg, nværende Kunsthandler W. i Nykiøbing). De øvrige ple i 6te Classe opflyttedes i 7de Classe efterat have kastet sig Afgangsexamens første Deel.

I Aarets Løb indmeldtes 13 nye Disciple, nemlig:

Til første Classe:

arl Ferdinand Christian Emanuel Thaning (Godsfor- T. paa Knuthenborg), Johan Jacob Hermann Bøck- i (Forpagter B. paa Nykirstineberg ved Nykiøbing), ian Frederik Tidemand (Procurator T. i Nykiø-, Christian Peter Nobel (Tobaksfabriqueur N. i bing), Hans Josva Isak Mackeprang (Kiøbmand Nykiøbing), Sophus Axel Leonhard Gad (Districts- G. i Kiettinge paa Lolland), Johan Christian Fri- te (Klubvært F. i Nykiøbing), Jacob Nielsen Møl- Postmester M. i Maribo).

Til anden Classe:

Carl Ferdinand Mertins (Muurmester M. i Maribo).

Til tredie Classe:

Jens Christian Waldemar Bergstrøm (forhenvæ- Hospitalsforstander B. i Nykiøbing), Nikolai Georg nsen (Pastor S. i Gundslev paa Falster), Henry ik Dichman (Kiøbmand D. i Saxkiøbing).

Til fierde Classe:

Victor Hillerup (Justitsraad H. til Kirstineberg).

Samtlige Disciple have været saaledes forde[...]
Skolens 7 Classer:

VII Classe.

1) Peter Emil Blume (Pastor B. i Stubbekiøb[...] 2) Johan Carl Vilhelm Grandjean (Cand. jur. Go[...] G. til Vennerslund), 3) Julius Christian Lehmann ([...] inspecteur L. i Nykiøbing), 4) Frederik Emil Wichm[...] (Kiøbmand W. i Saxkiøbing), 5) Poul Johan Ha[...] (Farver H. i Nykiøbing), 6) Sophus Waldemar Sch[...] sen (Cancelliraad, Byfoged S. i Nysted).

VI Classe.

1) Knud Rasmus Edvard Sidenius (Kiøb[...] S. i Maribo), 2) Julius Povel Anton Egebeck ([...] controlleur E. i Nykiøbing), 3) Carl Johannes Ri[...] (afdøde Provst R. i Nysted), 4) Carl Frederik A[...] Nielsen (Provst N. i Kallehauge i Siæland), 5) [...] org Vilhelm Sodemann (Forpagter S. paa „Nøisom[...] paa Falster), 6) Hans Frederik Uldall Købke (S[...] physicus, Regimentschirurg K. i Nykiøbing).

V Classe.

1) Hans Ludvig Schielderup Parelius Koch (A[...] K. i S. Kirkeby), 2) Peter Martin Petræus (By[...] ged P. i Stubbekiøbing), 3) Johannes Tidemand ([...] curator T. i Nykiøbing), 4) Hans Jørgen Baagø Ri[...] (Tobaksfabriqueur R. i Nykiøbing).

IV Classe.

1) Adam Vilhelm Kiødt (afdøde Pastor K. i [...] god i Ribe Stift), 2) Christian Henrik Hahn ([...]

r H. i Hyllested i Siæland), 3) Adolph Friederich
emann (Broder til Nr. 5 i 6te Classe), 4) Jens
d Vilhelm Larsen (afdøde Procurator L. i Maribo),
iels Frederik Vilhelm Lyngby Thaning (afdøde
torialraad T. i Hunseby paa Lolland), 6) Laurits
ni Nannestad (Provst N. i Vestenskov paa Lol-
7) Johan Peter Lindberg (Pastor Mag. L. i Taade-
aa Falster), 8) Frederik Christian Bertelsen (Pa-
B. i Taagerup paa Lolland), 9) Christian Michael
entorp (Pastor A. i Vaalse paa Falster), 10) Hans
Ludvig Christensen (afdøde Fyrinspecteur K.),
nders Vinding Brorson Galschiøt (Pastor G. i
marke paa Lolland), 12) Harald Schwensen (Bro-
Nr. 6 i 7de Classe), 13) Jacob Fischer Kruuse
tuefuldmægtig K. i Nykiøbing), 14) Victor Hille-
Justitsraad H. til Kirstineberg).

III Classe.

) Jacob Hieronymus Laub (afdøde Redacteur og
ykker L. i Nykiøbing), 2) Hermann Emil Scheel
e Apotheker S. i Nykiøbing), 3) Rasmus Emil
ensen (Provst Heiberg-J. i Nørre Vedby paa
), 4) Ludvig Christian Frederik Leopold Wegge
rider W. paa Pederstrup), 5) Peter Gregers Chri-
Jensen (Kiøbmand J. i Nysted), 6) Ernst Chri-
Clausen Laub (Broder til Nr. 1), 7) Andreas Pe-
nrik Kramer (afdøde Kiøbmand K. i Nykiøbing),
rl Ludvig Jørgen Bendtsen (afdøde Pastor B. i
y i Siæland), 9) Peter William Møller Holst (Con-
lraad H. i Magleby i Siæland), 10) Vilhelm Frits
nius (afdøde Kiøbmand S. i Nykiøbing), 11) Lo-
Weybel Roed (Kiøbmand og Borgerrepræsentant

N. i Nykiøbing), 12) Valdemar Clausen (Past…
paa Bogø), 13) Niels Sophus Møller Holst (…
til Nr. 9), 14) Jens Christian Valdemar Bergs…
(see ovenfor), 15) Nicolai Georg Sørensen (s. o…
16) Henry Frederik Dichman (s. o.).

II Classe.

1) Reinhold Christian Grønbek (Hospitalsforst…
G. i Nykiøbing), 2) Frederik Christian Kelter Besene…
(forhenværende Proprietair Kelter til Palstrup i Jyll…
3) Verner Ludvig Nannestad (Broder til Nr. 6 …
Classe), 4) Hans Hartvig Møller (Garver M. …
kiøbing), 5) Carl Ferdinand Mertins (see ove…
6) Johan Jacob Hermann Böckmann (s. o.).

I Classe.

1) Ludvig Michael Peter Hersleb Classen L…
(Proprietair L. til „Eiegod" paa Falster), 2) Carl F…
dinand Christian Emanuel Thaning (see ovenfor), 3) …
stian Frederik Tidemand (s. o.), 4) Christian …
Nobel (s. o.), 5) Hans Josva Isak Mackeprang …
6) Sophus Axel Leonhard Gad (s. o.), 7) Johan …
stian Frisenette (s. o.), 8) Jacob Nielsen Møller (…

Af disse agte Knud Rasmus Edvard Sidei…
og Carl Frederik August Nielsen af 6te Classe i…
underkaste sig Afgangsexamens 1ste Deel.

Følgende ere i Aarets Løb udmeldte til ande…
stemmelse: A. V. Kiødt, C. H. Hahn, J. P. …
berg, H. P. L. Krestensen, A. V. B. Galsc…
J. F. Kruuse, P. V. M. Holst, N. S. M. Holt…
V. Clausen.

J. N. Møller, denne haabfulde Dreng, som alle-
havde vundet alle sine Læreres Kiærlighed ved sin
og sit gode Forhold, bortkaldtes ved Døden i afvigte
Maaned.

Beneficiarier og Gratister.

Som saadanne har Ministeriet for indeværende Aar
evnet følgende:

Høieste Stipendium:

Egebeck.

Mellemste Stipendium:

F. Sodemann, C. Bendtsen.

Laveste Stipendium:

F. Nissen, G. V. Sodemann, J. C. V. Lar-
sen, L. E. F. L. Wegge.

Fri Underviisning:

. Wichmand, C. F. A. Nielsen, J. F. Kruuse,
A. P. H. Kramer. J. C. V. Bergstrøm fra
1ste April af.

De 2 Cathedralskolen tillagte Portioner af det Molt-
Legat, hver paa 40 Rbd. aarlig, ere ved Legatets
ærende Bestyrer, Hs. Excell. Greve A. V. af Moltke
Bregentved, forundte J. Egebeck (Søn af Toldcon-
ur E. i Nykiøbing, og J. E. V. Larsen (Søn af
e Procurator L. i Maribo.

Locale og Inventarium.

I det egentlige Skolelocale er ingen Forandring r
taget, thi Afgangsclassen, som fra dette Skoleaars B
gyndelse af toges i Brug, var allerede indrettet, og I
retningen af et physicalsk Cabinet er udsat indtil vide.

Derimod er Skolegaarden bleven forsynet med en
Pumpe og en ny Port.

Til Opbevaring af de physiske Instrumenter ere a
skaffede 2 store Glasskabe, ligesom i det naturhistoriske M
seum 4 Skuffer og 8 Papæsker, hver afdeelt i flere f
skiellige mindre Rum, til Opbevaring af Reder og Fugle

Fremdeles er til syvende Classe anskaffet et Cath
og et Ildtøi, og til 3die Classe et Bord med tilhørende B

Af physiske Instrumenter er fra Mechanicus Ju
Nissen, paa Ministeriets Foranstaltning, hidsendt:

Under 26de August 1851: 1. Een og toarmet Vægtstang. 2. a
dans Lampe. 3. Polygon til at vise Tyngdepunctet i flade Legeme
4. Skraaplan med Vogn og Lodder. 5. Hydrostatisk Vægt. 6. Ca
vægtlodder. 7. Tridser med Galge. 8. Skrue uden Ende. 9. Ca
presse. 10. 12 Lodder med Kroge. 11. Vaterpas. 12. Model a
Nonius. 13. Marmorplade med Elphenbeenskugle. 14. Samm
havende Rør. 15. Pascals Vaser. 16. Cylinder med sluttende p
ster. 17. Flydevægt med foranderlig Vægt. 18. Glascylinder m
til. 19. Haarrørsapparat. 20. Haarrørsplader. 21. 6 ℔ Qvik
22. Barometer med Spidsindstilling. 23. Luftpumpe med 2 Klo
24. Blæresprængningsglas. 25. Faldrøret til det lufttomme Rum
26. Trykpompe med Vindkiedel. 27. 2 Hæverter. 28. 2 Cartesiansk
Dukker i Glas. 29. Tantalusbægeret. 30. 2 Hanemodeller. 31. Lil
rør med Stemmegaffel. 32. Elliptisk Kar til Bølgebevægelsen. 33. Gas
spirituslampe. 34. Planetarium. 35. Et Brædt med Værktøi.

Under 17de October 1851: 1. Archimedes Skrue. 2. Atwood
Faldmaskine. 3. Centrifugalmaskine med Tilbehør. 4. Compressions
apparat efter Ørsted. 5. Apparat til at vise Principet for Bramah
Vandpresse. 6. Brændeviinsprøver i Foderal. 7. Barometerrøme

ane og Kop. 8. Flaske til Luftveining. 9. Heronskugle. 10. Mag-
gske Halvkugler. 11. Monochord. 12. Klangfigurplader med
13. Chladnis Tonemaaler. 14. Snurren med Farveskive.
erzelius Lampe. 16. Et Glas til at vise Virkningen af Luft-
paa Qvikſølv giennem Træ.

Til Museet

r største Delen af Skolens Disciple, fornemmelig 2 i
Classe, skienket følgende Samling af Reder og Fugleæg:
alco Haliætus. — Falco milvus. — Falco Buteo. — Falco tin-
lus. — Falco palumbarius. — Falco nisus. — Strix aluco. —
us canorus. — Picus major. — Yunx torqvilla. — Sitta euro-
— Sturnus vulgaris. — Corvus corax. — Corvus cornix. — Cor-
ugilegus. — Do. var. — Corvus monedula. — Pica varia typ.
r. — Garrulus glandarius. — Hirundo rustica. — Hirundo ur-
— Hirundo riparia. — * Lanius collurio. — Turdus viscivorus. —
us musicus. — * Turdus merula. — Motacilla alba. — * Mota-
lava. — * Anthus arboreus. — Anthus pratensis. — * Saxicola
the. — Saxicola rubetra. — * Sylvia cinerea. — * Sylvia curruca. —
a atricapilla. — * Sylvia hortensis. — Sylvia trochilus. — * Syl-
polais. — * Sylvia arundinacea. — * Sylvia phragmitis. — * Syl-
becula. — Troglodytes europæus. — * Accentor modularis. —
s major. — * Parus coeruleus. — Parus caudatus. — * Parus
ris. — * Alauda arvensis. — * Alauda arborea. — * Emberiza milia-
— * Emberiza citrinella. — Emberiza schoeniclus. — * Fringilla
s. — Fringilla coccothraustes. — Fringilla domestica. — * Frin-
hloris. — Fringilla cannabina. — Fringilla montium. — Frin-
pinus. — Fringilla Linaria. — * Fringilla carduelis. — Columba
bus. — Numida Meleagris. — Perdrix cinerea. — Charadrius
ula. — Vanellus cristatus. — Hæmatopus ostralegus. — Ciconia
— Tringa alpina. — Machetes pugnax. — Totanus calidris. —
pratensis. — Fulica atra. — Sterna hirundo. — Sterna arctica. —
ridibundus. — Larus canus. — Anas boschas. — Do. domest. —
Strepera. — Anas crecca. — Podiceps rubricollis.

De med * betegnede haves i de naturlige Reder.

Endelig har Skolens naturhistoriske Lærer til Mi
begyndt at samle et Herbarium, som efterhaanden or
og opklæbes paa Papir.

Bibliotheket.

Som sædvanlig har Cultusministeriet til dette skienket alle i L
Løb udkomne Disputatser, Lectionstabeller og Programmer fra Ki
havns Universitet og den polytechniske Anstalt, samt fra alle Dan
og Norges lærde Skoler og de preussiske Gymnasier. Endviderh
høisamme hidsendt Aktstykker til Nordens Historie i Grevefeiden
af danske og fremmede Archiver, Fortsættelser af ældre Gaver, som a
marks Statsbudget og Statsregnskab, det statistiske Tabelværk,
sigt over Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, Molbechs hi
Tidsskrift og Stephani Thesaurus lingvæ græcæ osv.

Af egne Indtægter, som endnu iaar udelukkende have beste
Renterne af det Hageske Legat, har det, ligesom i foregaaende
deels bekostet en Mængde Indbindinger, — deels Fortsættelser af Sk
som det tidligere havde subscriberet paa, f. Ex. Münsters Tal
Ordinationer, Gersdorfs Leipziger Repertorium, Antiklesvigholm
Fragmenter, Hans Christian Ørsteds Skrifter, Dictionaire de l'ad
mie Francaise mit deutscher Uebersetzung, Beckers Orion, Erslew
mindelige Forfatterlexikon, Cohen: De Faldnes Minde (sluttet),
mers Nekrologiske Samlinger II. 3. (sluttede), Kiærbøllings Orni
logia Danica (sluttet), Steen Billes Reise omkring Jorden III (slu
Ræder: Danmarks politiske Historie 1807—9 III (sluttet), —
endelig nogle faa nye Erhvervelser, som enten tilbøde sig for
Priis paa Auctioner, eller bestiltes fra Bogladen, f. Ex.:

J. N. Madvig: Syntaxis der griechischen Sprache für Schulen
G. Christoph. Hamberger, De pretiis rerum apud veteres.
Ez. Spanhemii diss. de præstantia et usu numismatum antiqvo
Histoire de Polybe traduite par Dom. Vincent Thuillier ave
commentaire par M. de Folard chevalier &c. 7 voll. ave
Marci Vitruvii Pollionis de architectura, Libri X. rec. et illustr.
Rode. 1 vol.
Des M. Vitruvius Baukunst, übers. v. Aug. Rode und mit Erläu
terungen versehen. 2 Bd.

r zu Vitruvius X Büchern von der Baukunst mehrentheils nach
ntiken Denkmälern v. Aug. Rode. 1 Bd. Fol.
ns von Samosata sämmtliche Werke, aus dem Griechischen v.
. M. Wieland. 6 Bd.
ning om det første Møde af videnskabelig dannede Skolemænd fra
e 3 Nordiske Riger i Kiøbenhavn 1851.
s Psalmer, oversatte af Heise.
. Jæger: Hollandsk Grammatik og Læsebog.
— Hollandsk Lexikon.
: Thorvaldsen i Rom 1805—19.
Schouw: Prøver paa en Jordbeskrivelse, med 3 Kort og 4 Træsnit.
. Rimestad: Geographisk Lærebog til Skolebrug.
ergk und Jul. Cæsar: Zeitschrift für die Alterthumswissenschaft,
hnter Jahrg. 1—2 H.
r. Ørsted: Naturlærens mechaniske Deel. 1, 2 H.
Petersen: Lyslære.
Laurent: Varmelære.
rfod: Den rene Krystallographies Hovedtræk.
s: Analytisk Mechanik.
lopedie d'histoire naturelle, d'apres les travaux des naturalistes
s plus eminents de tous les pays et de toutes les epoques par
Dr. Chenu Prof. — Coleoptéres.
geographica Italiæ antiqvæ, studio et opera Joh. Valerii
utscheit.
ninger til Billes Reise omkring Jorden eller Skizzer optagne
aa Corvetten Galatheas Jordomseiling. 1—9 H.
Sluttelig har Frue Hage i Stege forøget sin afdøde Søn Over=
Joh. Dam Hages Gave til Samlingen med følgende Værker,
ved vundet Familien et nyt Krav paa Skolens oprigtige Tak=
lighed.
Gottl. Fichte: Die Anweisung zum seeligen Leben. 2te Aufl. 1825.
— Die Grundzüge des gegenwärtigen Zeitalters. 1806.
Ernst Borowski: Darstellung des Lebens und Charakters Im.
ants. 1804.
nes v. Müller: Vierundzwanzig Bücher allgemeiner Geschichten,
esonders der Europäischen Menschheit. 3te Aufl. 1817.

Geschichte Frankreichs, besonders der dortigen Geistesentwickelung
der Einwanderung der Griechen bis zum Tode Louis XV.
(Anonym.)

Joh. Wilh. Zetterstedt: Resa genom Umeå Lappmarker i Westerb
Län. 1833.

Fr. v. Raumer: Vorlesung uber die alte Geschichte. 2 Th. 18

C. F. Werner: Die Productionskraft der Erde. 1826.

E. Mitscherlich: Lehrbuch der Chemie. 1ster Bd. 1834.

Joh. Fr. Blumenbach: Handbuch der Naturgeschichte. 1791.

Otto Fr. Müller: Prodromus Zoologiæ Danicæ. 1776.

M. Th. Brünnich: Ornithologia borealis. 1764.

Cuvier: Le regne animal distribué d'apres son organisation
T. 1—5.

Chr. Ludv. Brehm: Beiträge zur Vögelkunde in vollständigen Bei
bungen. Bd. 1—3. 1822.

Sebast. Gerardin (de Mirecourt): Tableau elementaire d'ornitho
1—2. 1806.

Atlas, suivi d'un traité sur la maniere de conserver les depo
des oiseaux pour en former des collections et d'un recu
quarante-une planches. 1806.

Foruden nogle mere eller mindre defecte Værker.

Bibliothekets hele Pengeindtægt, nemlig det Hageske Legat, udg

Renter			60 Rd
Afgift af en Jordlod			68 „
			128 Rd

Dets Udgift:

Underbalance efter forrige Regnskab	68 Rd	62 ß.	
samt ifølge Decision over Regnskabet	3 „	64 „	
Indkiøbte Bøger	83 „	4 „	
Bogbinder-Arbeide	6 „	72 „	
Avertissement	1 „	24 „	
Fragt	» „	80 „	
Krigsskat af Renter	3 „	72 „	
Regnskabsprocent	2 „	54 „	
			170 „ ß
		Underbalance	42 Rd ß

pliver at refundere af næste Aars Indtægt, der kan forventes
t ved et Tilskud fra den almindelige Skolefond.

Iøvrigt er Grundcapitalen i sidste Aar ved Hartkornets Egalisa-
af en saakaldet Sextenlod ved Stege (som henhører under den
ke Donation), ifølge Loven af 20de Juni 1850, bleven forøget med

) Kongelig Obligation paa .	50 Rd	= ß.	
) Renter af samme	1 „	84 „	
) Contant	12 „	28 „	
			64 Rd 16 ß.,

lke Obligationen er nedlagt i Skolens Kasse, derimod de 14 Rd
indsatte i Nykiøbings Sparekasse.

Til foreſtaaende Examen læstes og opgives Følgende:

Dansk.

Cl.: Funchs, Røginds og Warburgs Læsebog er anvendt til
sning og Analyse. Oppermanns Grammatik til § 4. 23 Digte
rte udenad. Dictat 3 Gange om Ugen. — II Cl.: Molbechs
g. Oppermanns Grammatik. Bøiningslæren mundtlig ind-
Orddannelseslæren efter Binzer. 8 større Digte ere lærte udenad
Barfods poetiske Læsebog. 2 Gange ugentlig skreves Stile, be-
e deels i Gienfortælling, deels i lette frie Opgaver. — III Cl.:
prosaiske Læsebog er anvendt til Oplæsning og Analyse. Bin-
anske Sproglære. Ugentlig skreves 1 Stiil, bestaaende deels i
ettelse, deels i lette frie Opgaver. — IV Cl.: Et Par Timer
olig ere anvendte til Øvelser i at læse Svensk, hvortil det af
nbecher udgivne Album er benyttet. 1 Stiil leveredes ugentlig,
Opgaverne toges af de Forestillingskredse, der maatte antages
e Disciplene nærmest. — V Cl.: Efterat den nordiske Mythologie
gnkreds i Vinterhalvaaret var giennemgaaet tildeels med Be-
af P. A. Munchs „Nordmændenes Gudelære i Hedenold", er
erhalvaaret benyttet til at læse enkelte større Værker af den dan-
ratur. 1 Stiil ugentlig. — VI Cl.: Den danske Literaturhi-
lev giennemgaaet med Benyttelse af Thortsens Haandbog. 1
gentlig, bestaaende i Bearbeidelser af Opgaver af religieust og
Indhold. — VII Cl.: Ved Siden af udførligere skriftlige Frem-

stillinger gik Øvelser i mundtligt Foredrag, hvortil det snart s
Disciplene selv at vælge Stoffet, snart blev det iforveien meddd

Tydsk.

I Cl.: Rungs Læsebog for de lavere Classer forfra til Si
Hiorts kortfattede tydske Sproglære med Forbigaaelse af ande
jugation. 15 Digte ere lærte udenad. Skriftlig Oversætt
Tydsk til Dansk 1 Gang om Ugen. — II Cl.: Rungs mindre
fra Side 169 til Enden. Hiorts Læsebog S. 1—20, 146—55.
mindre Grammatik. 6 større Digte ere lærte udenad. 2 Ga
Ugen deels skriftlig deels mundtlig Oversættelse fra Dansk til
efter Jürs og Rungs Materialier. — III Cl.: Hiorts Læseb
21—87, 127—32; Bøiningslæren efter Hiorts større Gra
Ordføiningslærens vigtigste Regler indøvedes mundtlig. 1
skreves 1 Stiil efter Bresemanns Stiiløvelser. — IV Cl.: Hiort
bog Side 21—87, 113—127, 134—159. Meyers Gramm
Stiil ugentlig. — V. Cl.: Samme Læsebog Side 246—364.
Grammatik med Tillæg. 1 Stiil ugentlig. — VI Cl.:
Stykker i Hiorts Læsebog. Hauffs Diævelens Memoirer.
Der dreißigjährige Krieg, Wilhelm Tell, Machbeth, Nikola
Smaastykker. Körners Gedichte. Walter Scott: Iwanhoe.
Gedichte. Stiil eengang ugentlig. Abrahams Literairhistorie
at benyttes.

Fransk.

II Cl.: Borrings manuel de langue française fra Sid
162. De regelrette Bøiningsformer efter Abrahams. — III C
rings Læsebog for Mellemclasserne fra Side 53—90. Nogle
af Lassens Extemporallæsning. Hele Bøiningslæren efter Abra
IV Cl.: Borrings Læsebog for Mellemclasserne fra Side 224 t
Lassens Extemporallæsning fra Side 57—78, 82—89,
127—43, 212—26, 284—90. Bøinings- og Orddannelseslæ
Abrahams. — V Cl.: Bossuet: discours sur l'histoire universe
trent 1ste Halvdeel. To af sammes oraisons funèbres. Ord
læren efter Abrahams. — VI Cl.: Prosp. Mérimée: Colomba,
contents. Mad. Staël: de L'Allemagne (deuxième partie)
neille: Cid.

I de to øverste Classer har ingen Repetition fundet Sted. Med agelse af 5te Classe, hvor Fransk kun havde 2 ugentlige Timer, r skrevet Stiil 1 Gang om Ugen, i de lavere Classer efter Sib- s Øvelser, i 6te Classe efter dicterede Stykker.

Latin.

III Cl.: Lefoliis latinske Læsebog, 1ste og 2det Afsnit (Stykkerne . De danske Stykker ere, efterat være giennemgaaede og lærte, til- for største Delen oversatte skriftligt. Af Madvigs latinske Sprog- ere de vigtigste Regler af Formlæren læste og flere Gange repe- . Til Ordføiningslæren er der, hvor det syntes fornødent, blevet ist. — IV Cl.: Cæsar de bello Gallico, 3die og 4de Bog. Af os Tale pro Sexto Roscio Amerino de 8 første Capitler. Af vigs latinske Sproglære er læst Formlæren (fornemmelig Bøi- slæren), og det vigtigste af Ordføiningslærens første Afsnit; det Afsnit er læst efter et Udtog. To, og i Aarets sidste Halvdeel tre ere skrevne om Ugen, først efter dicterede Stykker, senere efter rslevs Materialier til latinske Stile. I de sidste Maaneder mundt- Stiiløvelser een Gang om Ugen. — V Cl.: (5 Timer om Ugen, Lund). I de to Timer er læst og repeteret Cicero, or. pro ne, hvoraf omtrent Halvdelen er lært udenad. De tre Timer, f to samlede, ere anvendte til Stiil og Grammatik, hvoraf hele øiningslæren er læst og tildeels repeteret. Stile ere skrevne efter rslevs Materialier, 1ste Hefte, S. 16—42 og 116—130. Til oner ere benyttede Cæsar, Sallust og Ciceros Taler. Hver Uge evet enten en Extemporalstil eller en Version, i Slutningen af Sko- et afvexlende med mundtlig Repetition af de tidligere skrevne Stile. — me Classe: (4 Timer om Ugen, Adj. Nielsen). Cæsar de bello o, 2den, 3die og 4de Bog; Sallusts Catilina læst, men ei fuld- ig repeteret. Af Grammatiken hele Formlæren. — VI Cl.: Ciceros major, de Officiis, 1ste Bog indtil Cap. 27, or. pro S. Roscio ino (cursorisk). Livius, 21de Bog. Virgils Æneis, 2den Bog. tius, Phormio. Horatius, Epoderne 1, 2, 5, 7, 17. Enkelte ge er til extemporal Læsning benyttet Curtius, Svetonius og lig- Forfattere. Til Versioner (i Almindelighed 1 hver anden Uge, Skolen, i 2 sammenhængende Timer) de samme Forfattere og en Tacitus og især Livius. Stiil er skrevet 2 til 3 Gange om

Ugen efter Henrichsens ældre Opgaver, første Samling, omtrent Stykkerne 1—37, deels hiemme, deels paa Skolen. De skrevne S tildeels efter nogen Tids Mellemrum repeterede mundtligt. I M latinske Sproglære er læst Orddannelseslæren, Ordføiningslær Tillæg og det vigtigste af Metriken. Antiqviteter og Litter storie ere kun benyttede ved stadig Henviisning under Forfatterl gen. — VII. Cl.: Ciceros Lælius og de Officiis, 1ste Bog. 21de Bog (mere cursorisk). Tacitus, Annales, 1ste Bog. Ho Odernes 1ste Bog, Epistolæ 1ste Bog. Terentius, Heautont menos (repeteret). Desuden er til extemporal Læsning benytt nemmelig Seneca, Epistolæ (omtr. 20 Breve), nogle Gange lian, Tacitus, Curtius, af hvilke Forfattere ogsaa i Almindelighed ker ere benyttede til skriftlig Version. Latinsk Stiil er skrevet i 2 Gange om Ugen hiemme, 1 Gang paa Skolen i to sammh gende Timer, hvilke dog afvexlende ere anvendte ogsaa til Versio Extemporallæsning. Stilene ere for det meste skrevne efter Henri nye Samling af Opgaver, 3die Hefte, hvoraf saaledes de fø Stykker ere benyttede. Undertiden ere ogsaa mundtlige Øvelser an Madvigs latinske Sproglære er tildeels repeteret, tildeels nøia giennemgaaet (navnlig de Partier, som ikke tidligere vare me f. Ex. Metrikken). Bojesens romerske Antiqviteter ere læste i S menhæng heelt, ligeledes Tregders latinske Litteraturhistorie, hvo knyttet Meddelelse af enkelte Stykker af Forfattere, som ellers ikk Disciplene bekiendte, f. Ex. Catullus, Tibullus, Propertius. have Disciplene været tilsagte til at møde i visse Timer Skoletiden for at udarbeide skriftlige Opgaver, saa ofte som saaes for nødvendigt, dog i det høieste 1 Gang om Ugen i to

Græsk.

IV Cl.: Adspredte Stykker i Lunds Læsebog til Øvelse i lære. 4 Capitler af Xenophons Anabasis. — V Cl.: 1½ Xenophons Anabasis, 1½ Bog af Odysseen. — VI Cl.: 1 Herodot, ½ Bog af Xenophons Memorabilia, 3 Sange af Odyss VII Cl.: 2 Bøger af Xenophons Memorabilia, Platos Apolog cratis og Crito. 5 Sange af Odysseen. — Langes Grammatik nyttet med Henviisning til Madvigs Ordføiningslære. I An

benyttet Bojesens, i Literaturhistorien Tregders, i Mythologie
s Haandbog.

Hebraisk.

VII Cl.: 20 Capitler af Genesis. Lindbergs Grammatik.

Religion.

Cl.: Luthers lille Catechismus (de 10 Bud, Fadervor og Troens
er). Herslebs lille Bibelhistorie med Fuldstændiggiørelse efter
boes. Adskillige Psalmer. — II Cl.: Balles Lærebog, de 5 første
ler; Herslebs større Bibelhistorie til siette Periode. Tillige er
Müllers benyttet som Læsebog. Adskillige Psalmer. — III Cl.:
s Lærebog fra 5te Capitel til Enden. Samme Bibelhistories
Testamente fra fierde Periode til Enden. — IV Cl.: Hele Bal-
rebog. Samme Bibelhistorie: Udsigt over Skrifterne i det gamle
mente fra Side 124—159 og de 3 første Perioder af det nye Te-
ate fra Side 160—217. — V Cl.: Fogtmanns Lærebog fra Side
12. Samme Bibelhistorie: det nye Testamente til Udsigt over
Bøger. — VI Cl.: Samme Lærebog: 3die Capitel. Samme Bi-
orie: de 4 første Perioder, Apostlenes Historie og Udsigt over
ye Testamentes Skrifter. — VII Cl.: Samme Lærebog: Side
5. Samme Bibelhistorie: fra Begyndelsen til Udsigten over det
Testamentes Skrifter. Kalkars Kirkehistorie er giennemgaaet,
ikke repeteret. Marci Evangelium.

Historie.

Cl.: Den oldnordiske Gudelære og Danmarks og Norges Hi-
fra de ældste Tider indtil Valdemar Seiers Død efter Meislers
arks Historie og mundtligt Foredrag. Verdenshistorien, efter
s fragmentariske Lærebog, indtil Begyndelsen af Roms Historie.—
: Samme Lærebog fra Begyndelsen af Roms Historie indtil
— III Cl.: Hele Historien efter samme Lærebog og udvalgte
er af den gamle Historie efter Bohrs Lærebog. — IV Cl.: Den
Historie efter Bohr fra den peloponnesiske Krig. Desuden er
nen ikke repeteret 1ste Periode af Sammes Middelalderens Histo-
til Aar 1100. — V Cl.: Hele Middelalderens Historie efter an-
dgave af Bohrs Lærebog. VI Cl.: Danmarks Historie efter

Allens Lærebog fra 1397 til Enden. — VII Cl.: Hele den nye[…]
storie efter Bohr; Danmarks Historie repeteret efter Allens Lære[…]

Geographie.

I Cl.: Almindelig Oversigt over Jordklodens forskiellige De[…] i physisk Henseende, efter Sydows Kort, men uden Afbenyttelse […] gen Lærebog. Desuden Danmarks physiske og politiske Geog[…] med større Vidtløftighed. — II Cl.: Europas Geographie indtil […] rig efter Velschow. — III Cl.: Hele Europas Geographie efter […] Lærebog. — IV Cl.: De fire andre Verdensdele og en kort O[…] over den mathematiske Geographie efter samme Lærebog. — […] Europa efter samme Lærebog, hvortil er føiet nogle Tillæg. […] gamle Geographie efter Königsfeldt. — VI Cl.: Europa efter I[…] kevs større Lærebog og de andre Verdensdele tilligemed den ma[…] tiske Geographie efter Velschow; den gamle Geographie efter König[…]

Arithmetik.

I—II Cl.: Practisk Regning. — III Cl.: Buchs Elemen[…] Mathematikken Art. 1—84, 97—112 med Forbigaaelse af Art. 6, 1[…] 15—18, 24—27, 35—38, 66—69, 77—80, 108. Practisk […] Regning med Decimalbrøk. — IV Cl.: Samme Bog Art. 1[…] Practisk Øvelse i Regning med Tilnærmelsesværdier. — V Cl. […] Bogen. Practisk Øvelse i Roduddragning og Opløsning af […] ger. — VI Cl.: Om modsatte Størrelser og Logarithmer. […] Bogstavregning, Brugen af Logarithmer og Opløsning af Lig[…] af første og anden Grad. — VII Cl.: Kiædebrøk og elementær […] tionslære tildeels efter Steens rene Mathematik; og om af[…] Størrelser. Øvelser i Brugen af Logarithmetavler og Sinusta[…]

Geometrie.

I—II—III Cl.: Øvelse i geometrisk Tegning. — IV Cl.: […] manns Plangeometrie Art. 1—232. — V Cl.: Samme Bo[…] 232—248, 257—328 samt derhen hørende Opgaver. — VI Cl.: Sa[…] Bog Art. 339—378, 413—449, 469—480, 486—506 og Opga[…] VII Cl.: Ramus's Trigonometrie Cap. I og II med adskillige […]

…er; Sammes Stereometrie Art. 1—49. To skriftlige Opgaver …gen.

Naturlære.

…II Cl.: Ørsteds Naturlærens mechaniske Deel § 1—226 samt af …ens Naturlærens chemiske Deel § 1—29 og 68—73.

Naturhistorie.

… Cl.: Pattedyrene, Fuglene, Krybdyrene efter Strøm. — II Cl.: …ning til Pattedyrene efter Prosch. — III Cl.: Pattedyrene og …ne efter Prosch. — IV Cl.: Krybdyrene og Fiskene efter Prosch, …ning til Botaniken efter Bramsen og Dreyer. — V Cl.: Resten …dyrene, Bløddyrene og Straaledyrene efter Prosch. Grundtræk… …f Mineralogien efter mundtligt Foredrag. — VI Cl.: Alminde… …petition af hele Naturhistorien.

Skolekassens Indtægter og Udgifter
i Finantsaaret 18$\frac{51}{52}$.

A. Hovedregnskab.

Indtægt.

Renter	408 Rbd.	9
Jordebogs-Indtægter	2,542 —	6
Fra Amtstuer	1,240 —	2
Skolecontingenter	1,555 —	8
Af Hospitalet	208 —	
Tilskud fra alm. Skolefond . . .	6,167 —	5
	12,123 Rbd.	3

Udgift.

Underbalance fra forrige Aar . .	221 —	5
Lønninger og Pensioner	8,054 —	6
Bygning og Inventar	198 —	7
Brændsels- og Belysningsfornødenh.	214 —	5
Videnskabelige Apparater . . .	325 —	
Skatter og Afgifter	238 —	2
Regnskabsføringen	170 —	8
Forskiellige tilfældige Udgifter . .	273 —	6
Restancer fra Amtstuer	1,240 —	2
	10,937 Rbd.	7

B. Stipendieregnskab.

Beholdning		172 —	
Indtægt		1,160 —	8
		1,332 Rbd.	8
Udgift	218 Rbd. 24 ß.		
Restancer fra Amtstuer	863 — 65 —		
Udsat paa Rente .	251 — = —	1,332 —	8

Ved foreſtaaende offentlige Examen begynder den
dtlige Prøve i Forbindelſe med den ſkriftlige Mandagen
12te Juli og fortſættes til Onsdagen den 21de incl.
formiddagen fra Kl. 9—12 og om Eftermiddagen fra
$2\frac{1}{2}$—$5\frac{1}{2}$ i følgende Orden:

	Formiddag.	**Eftermiddag.**
dag ...	6te Cl. Tydſk og Franſk. 5te og 4de Cl. Danſk Stiil. 2den og 1ſte Cl. Danſk Stiil.	7de og 6te Cl. Latinſk Verſion. 5te og 4de Cl. Franſk. 3die Cl. Religion.
dag	7de og 6te Cl. Danſk Stiil. 5te Cl. Hiſt. og Geographie. 4de Cl. Religion. 3die Cl. Franſk.	7de og 6te Cl. Latinſk Stiil. 3die Cl. Latin. 2den og 1ſte Cl. Regning.
dag.....	6te og 5te Cl. Religion. 4de Cl. Mathematik.	7de Cl. Skriftlig Mathematik. 5te Cl. Tydſk Stiil. 3die Cl. Danſk Stiil. 2den og 1ſte Cl. Tydſk.
dag ...	6te og 5te Cl. Naturhiſtorie. 4de Cl. Hiſt. og Geographie. 3die Cl. Skriftlig Mathe- matik.	7de og 6te Cl. Skriftlig Mathematik. 5te Cl. Latinſk Verſion. 4de Cl. Latin og Græſk. 3die Cl. Latinſk Stiil. 2den Cl. Franſk. 1ſte Cl. Naturhiſtorie.
dag..	7de og 5te Cl. Latin. 3die Cl. Naturhiſtorie. 2den og 1ſte Cl. Religion.	5te og 4de Cl. Skriftlig Mathematik. 3die Cl. Mathematik. 2den og 1ſte Cl. Danſk.
dag ...	6te Cl. Hiſt. og Geographie. 4de og 2den Cl. Naturhiſtorie.	5te og 4de Cl. Latinſk Stiil. 3die Cl. Tydſk.
ag	7de Cl. Hiſtorie og Naturlære. 6te Cl. Latin og Græſk.	7de Cl. Mathematik. 5te og 4de Cl. Tydſk.
ag.....	7de Cl. Religion og Hebraiſk. 6te Cl. Mathematik. 5te Cl. Mathematik og Græſk. 2den og 1ſte Cl. Hiſtorie og Geographie.	7de Cl. Græſk. 3die Cl. Hiſtorie og Geographie.

nsdagen den 21de Eftermiddag Kl. 5 Prøve i Gymnaſtik og
ning.

rsdagen den 22de Eftermiddag Kl. 4 Sangprøve.

Mandagen den 12te Juli afholdes Afgangsexam Tydsk og Fransk, Torsdagen den 15de i Naturhi og Mandagen den 19de i Geographie, hver Dag K Formiddag.

Torsdagen den 22de Juli Kl. 12 prøves de n meldte Disciple.

Mandagen den 23de August, Formiddag Kl. 11, tages Opflytningen med sædvanlig Høitidelighed, og sa Dags Eftermiddag Kl. 2 begynder Underviisningen nye Skoleaar.

Disciplenes Forældre og Værger, samt andre Sk og Videnskabens Velyndere indbydes herved ærbødig at beære denne offentlige Prøve med deres Nærværel.

Nykiøbing Cathedralskole, den 24de Juni 1852.

E. P. Rosendahl.

83

Ueber die verschiedene Darstellung des Restes in der Reihe von Lagrange.

Inaugural-Dissertation

zur

·langung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Rostock

von

Ernst Buchholz

aus Norden.

MINDEN.

Gedruckt bei J. C. C. Bruns.

1876.

Es seien f (z) und φ (z) Functionen von z, die so beschaffen sind, sie innerhalb und auf der Begrenzung eines Kreises, der um den Punkt ür welchen mod φ (z) verschwindet, als Mittelpunkt beschrieben ist, ch, eindeutig und stetig bleiben. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass Derivirte von φ (z) innerhalb des so bestimmten Gebietes nicht Null Bezeichnet dann Γ irgend einen innerhalb desselben liegenden Punkt, n complexen Werth wir mit γ ausdrücken wollen, so ist der Ausdruck

$$\frac{f(z) - f(\gamma)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}$$

m ganzen beregten Gebiet und auf dessen Begrenzung eine eindeutige, che und stetige Function von z, die für $z = \gamma$ in die endliche Grösse) übergeht. Denn $\varphi'(\gamma)$ kann der Voraussetzung nach nicht verschwin- und weder $\varphi'(\gamma)$ noch $f'(\gamma)$ können unendlich werden, da die Derivirte Function, die in einem Gebiet endlich, eindeutig und stetig ist, gleich- in demselben Gebiet endlich, eindeutig und stetig bleibt. (Durège, Func- theorie § 24). Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\int \frac{f(z) - f(\gamma)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

ler Begrenzung des genannten Gebiets erstreckt gleich Null. Hieraus dass

$$f(\gamma) \int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

s

$$f(\gamma) = \frac{\displaystyle\int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz}{\displaystyle\int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}}$$

Nun ist $\displaystyle\int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \frac{1}{\varphi'(\gamma)} \int \frac{dz}{z - \gamma} = \frac{2\pi i}{\varphi'(\gamma)}$

(nach der gewöhnlichen Bezeichnung) $= \sqrt{-1}$ ist. (Durège a. a. 20), folglich:

$$f(\gamma) = \frac{\varphi'(\gamma)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

Nun ist $\dfrac{1}{\varphi(z) - \varphi\gamma} = \dfrac{1}{\varphi(z)} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}}$

Da nun mod $\varphi(\gamma) <$ mod $\varphi(z)$ nach der Voraussetzung ist, so
ich den Ausdruck $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}}$ in die convergirende Reihe entwickeln:

$$1 + \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)} + \left(\frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Also ist

$$\int \frac{f(z) \quad dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \int \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz + \varphi(\gamma \int \frac{f(z)}{\varphi(z)^2} dz +$$

$$\varphi(\gamma)^2 \int \frac{F(z)}{\varphi(z)^3} dz + \ldots\ldots$$

Oder da $\displaystyle\int \frac{f(z) \quad dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \frac{2\pi i}{\varphi'(\gamma)} f(\gamma)$

$$f(\gamma) = \frac{\varphi'(\gamma)}{2\pi i} \left\{ \int \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz + \varphi(\gamma) \int \frac{f(z)}{\varphi(z)^2} dz + \right.$$

$$\left. \varphi(\gamma)^2 \int \frac{f(z) \, dz}{\varphi(z)^3} + \ldots\ldots \right\}$$

Schreibe ich statt $f(\gamma)$, welches eine ganz beliebige Function
ist $F'(\gamma)$ und integrire die vorige Gleichung zwischen den Grenzen
c, (wo c den complexen Werth des Punctes c darstellt, für welchen, wi
vorausgesetzt haben, mod $\varphi(z)$ verschwindet), so erhalte ich:

$$\text{(I)}\ F(\gamma) = F(c) + \varphi(\gamma) \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)}{\varphi(z)} dz +$$

$$\frac{\varphi(\gamma)^2}{1.2} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z) \, dz}{\varphi(z)^2} + \frac{\varphi(\gamma)^3}{3} \frac{1}{.2\pi i} \int \frac{F'(z)}{\varphi(z)^3} dz +$$

Ist nun $f(z)$ eine Function, die innerhalb eines bestimmten Gebie
dem $F(z)$ endlich, eindeutig und stetig ist, gleichfalls eindeutig, endlic
stetig ist und nicht verschwindet, ist ferner Y ein in demselben gele
Punct, zu dem der complexe Werth y gehört, so erfüllt offenbar die Fun
$\dfrac{z - y}{f(z)} = x$ die Bedingungen, die an $\varphi(z)$ gestellt waren. Sie versc
det nämlich innerhalb des begrenzten Gebiets nur in einem Puncte u
überall in demselben eindeutig, stetig und endlich. Folglich kann ich i

) durch $\frac{z-y}{f(z)}$ ersetzen. Schreibe ich dann ξ statt γ und beachte, dem Punct c der Function $\varphi(z)$ der Punct y der Function $\frac{z-y}{f(z)}$ richt, so ist:

$$\text{(II)}\quad F(\xi) = F(y) + \frac{\xi - y}{f(\xi)} \frac{1}{.\,2\pi i} \int \frac{F'(z) f(z) \, dz}{z-y}$$

$$+ \left(\frac{\xi - y}{f(\xi)}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z) f(z)^2 \, dz}{(z-y)^2}$$

$$+ \left(\frac{\xi - y}{f(\xi)}\right)^3 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z) f(z)^3}{(z-y)^3} dz + \ldots\ldots\ldots$$

Da die Integrationen in dieser Gleichung sich auf die Begrenzung eines es erstrecken, der um den Punct Y als Mittelpunct beschrieben ist und Unstetigkeits- und Unendlichkeitspuncte von F (z) und $\frac{z-y}{f(z)}$ aus-sst, so ist (Durège a. a. O. § 24).

$$\int \frac{F'(z) f(z)}{z-y} dz = 2\pi i F'(y) f(y)$$

:

$$\int \frac{F'(z) f(z)^k dz}{(z-y)^k} = \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \int \frac{F'(z) f(z)^k dz}{(k-1)!(z-y)}$$

$$= \frac{2\pi i}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \Big\{ F'(y) f(y)^k \Big\}.$$

$(k-1)! = 1.\,2.\,3.\,.\,.\,(k-2)\,(k-1)$ ist.

Setzt man die so gefundenen Werthe in (II) ein und nimmt an, dass für ξ x in ξ übergeht, so erhält man die Reihe, die den Namen von La-e führt:

$$F(\xi) = F(y) + \xi F'(y) f(y) + \frac{\xi^2}{1.\,2} \frac{d}{dy} \Big\{ F'(y) f(y)^2 \Big\}$$

$$+ \frac{\xi^3}{1.2.3} \frac{d^2}{dy^2} \Big\{ F'(y) f(y)^3 \Big\} + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^n}{dy^{n-1}} \Big| F'(y) f(y)^n \Big| + \ldots\ldots\ldots$$

Schreibt man die Gleichung $\frac{\xi - y}{f(\xi)} = \xi$ in der Form $\xi f(\xi) - \xi + y = o$ betrachtet ξ und y als reelle oder imaginäre Constanten, so ist also diese Reihe das Problem gelöst, eine Wurzel (oder irgend eine Function

derselben) der Gleichung $\xi\, f\,(\xi) - \xi + y = o$ durch eine nach g
positiven Potenzen von ξ fortschreitende Reihe auszudrücken. Dies
jedoch nur so lange richtig, als dieselbe convergirt. Mit den Beding
dafür haben sich seit den Zeiten von Lagrange Männer wie Cauchy, L
Puiseux u. A. beschäftigt. Der Zweck unserer Untersuchung wird se
zeigen, wie man diese Betrachtungen vermeiden kann, wenn man die
nicht ins Unendliche fortsetzt, sondern bei einem gewissen Gliede a
und den Rest durch einen geschlossenen Ausdruck darstellt. Wir g
diesem Zweck von der identischen Gleichung aus:

$$\varphi\,(\xi) - \varphi\,(o) = \int_o^\xi \varphi'\,(\xi - x)\,d\,x.$$

Entwickelt man die rechte Seite derselben durch partielle Integ
so erhält man, wie in der Analysis gezeigt wird, die Reihe von Ma
in folgender Form:

$$(IV)\ \varphi\,(\xi) = \varphi\,(o) + \xi\,\varphi'\,(o) + \frac{\xi^2}{1.\,2}\,\varphi^{(2)}\,(o) + \dots$$

$$\dots + \frac{\xi^n}{n\,!}\,\varphi^{(n)}(o) + \frac{1}{n\,!}\int_o^\xi x^n\,\varphi^{(n+1)}\,(\xi - x)\,d$$

Die Function $\varphi\,(x)$ wird dabei ebenso wie ihre Ableitungen b
$(n + 1)$sten als eindeutig, stetig und endlich innerhalb der G
$x = \xi$ und $x = o$ vorausgesetzt. Bestimmen wir nun x aus der Glei
$x\,f\,(z) - z + y = o$, worin z eine Function der unabhängigen
derlichen x und y ist und setzen fest, dass dem Werth $x = o$ der W
$z = y$ und dem Werth $x = \xi$ der Werth $z = \xi$ entsprechen soll,
wenn wir $\varphi\,(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi - y}{f\,(\xi)}\right)$ kürzer mit $F\,(\xi)$ bezeichnen, $\varphi\,(o) =$
Um die Coefficienten der ξ zu erhalten ist es nöthig, einige Formeln z
wickeln, die der Gleichung $z = x\,f\,(z) + y$ eigenthümlich sind. Di
ziren wir dieselbe das eine Mal partiell nach x, das andere Mal partiell
y, so erhalten wir:

$$\frac{d\,z}{d\,x} = f\,(z) + x\,f'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,x}$$

$$\text{und}\ \frac{d\,z}{d\,y} = 1 + x\,f'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}$$

Hieraus erhalten wir, indem wir die Glieder, die mit $\frac{d\,z}{d\,x}$ einerseit

andererseits multiplicirt sind, auf eine Seite bringen und beide Gleichun- durch einander dividiren,

$$\frac{d\,z}{d\,x} = f(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}$$

Mit Benutzung dieser Formel ist:

$$\frac{d\,F(z)}{d\,x} = F'(z)\,\frac{d\,z}{d\,x} = F'(z)\,f(z)\,\frac{d\,z}{d\,y} = f(z)\,\frac{d\,F(z)}{d\,y}$$

$$\frac{d^2\,F(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left\{ f(z)\,\frac{d\,F(z)}{d\,y} \right\}$$

Da nun $f(z)\,\frac{d\,F(z)}{d\,y}$ nichts anderes ist als $f(z)\,F'(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}$ d. h. Function von z multiplicirt mit $\frac{d\,z}{d\,y}$, so kann ich dieselbe betrachten len Differentialquotienten einer anderen Function von z, H (z), so dass ist;

$$\frac{d\,H(z)}{d\,z}\,\frac{d\,z}{d\,y} = f(z)\,F'(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}.$$

$$\text{oder}\quad \frac{d\,H(z)}{d\,y} = f(z)\,F'(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}.$$

ch

$$\frac{d^2\,F(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left\{ \frac{d\,H(z)}{d\,y} \right\}$$

Nun kann ich die Reihenfolge der Differentiationen vertauschen, folg- st:

$$\frac{d}{d\,x}\left\{ \frac{d\,H(z)}{d\,y} \right\} = \frac{d}{d\,y}\left\{ \frac{d\,H(z)}{d\,x} \right\} =$$

$$\frac{d}{d\,y}\left\{ \frac{d\,H(z)}{d\,y}\,f(z) \right\} = \frac{d}{d\,y}\left\{ f(z)^2\,\frac{d\,F(z)}{d\,y} \right\}$$

h

$$\frac{d^2\,F(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,y}\left\{ f(z)^2\,\frac{d\,F\,z}{d\,y} \right\}$$

Ebenso finde ich

$$\frac{d^3\,F(z)}{d\,x^3} = \frac{d^2}{d\,y^2}\left\{ f(z)^3\,\frac{d\,F(z)}{d\,y} \right\}.$$

Um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu beweisen, nehmen wir an, die Gleichung richtig sei:

$$\text{(V)} \quad \frac{d^n F(z)}{d x^n} = \frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}} \left| f(z)^n \frac{d F(z)}{d y} \right|$$

Kann ich beweisen, dass auch

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{d x^{n+1}} = \frac{d^n}{d y^n} \left| f(z)^{n+1} \frac{d F(z)}{d y} \right|$$

ist, so ist offenbar die Formel für jedes beliebige n gültig.

Differenzire ich nun (V) nach x partiell, so erhalte ich

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{d x^{n+1}} = \frac{d}{d x} \left| \frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}} \left[f(z)^n \frac{d F(z)}{d y} \right] \right|$$

$$= \frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}} \left| \frac{d}{d x} \left[f(z)^n \frac{d F(z)}{d y} \right] \right|$$

Da nun $f(z)^n \frac{d F(z)}{d y}$ identisch ist mit $f(z)^n F'(z) \frac{d z}{d y}$ d. h

Function von z multiplicirt mit $\frac{d z}{d y}$, so kann ich wie oben setzen:

$$\frac{d G(z)}{d z} \cdot \frac{d z}{d y} = f(z)^n \frac{d F(z)}{d z} \frac{d z}{d y}$$

$$\frac{d G(z)}{d y} = f(z)^n \frac{d F(z)}{d y}.$$

Nun ist $\frac{d}{d x} \left| \frac{d G(z)}{d y} \right| = \frac{d}{d y} \left| \frac{d G(z)}{d x} \right\} =$

$$\frac{d}{d y} \left\{ \frac{d G(z)}{d y} f(z) \right| = \frac{d}{d y} \left| f(z)^{n+1} \frac{d F(z)}{d y} \right\}$$

also:

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{d x^{n+1}} = \frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}} \left[\frac{d}{d y} \left| f(z)^{n+1} \frac{d F(z)}{d y} \right| \right]$$

$$= \frac{d^n}{d y^n} \left| f(z)^{n+1} \frac{d F(z)}{d y} \right| .$$

Wir haben also bewiesen, dass die Formel allgemein gültig ist. S wir in derselben $x = 0$, so geht rechts unmittelbar z in y über, w Glieder, welche von x abhängen, getrennt werden können und zuglei dieser Variabeln verschwinden. Wir erhalten also zur Bestimmung de ficienten in der Reihe (IV):

$$\varphi(0) = F(y).$$

$$\varphi^{(3)}(0) = \left[\frac{d^n F(z)}{d x^n} \right]_{x = 0} =$$

$$\frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}} \left| f(y)^n F'(y) \right|$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi - x) - d^{n-1}\frac{\varphi(\xi - x)}{d x^{n+1}}$$
$$= \frac{d^n}{d y^n}\left| f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right|,$$

wo der Werth von z bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\text{(VI)} \quad z = y + (\xi - x) f(z)$$

Setzen wir die so erhaltenen Werthe in (IV) ein, so ist:

$$\text{)}\ F(\xi) = F(y) + \xi f(y) F'(y) + \frac{\xi^2}{1.\ 2.}\frac{d}{d y}\left| F'(y) f(y)^2 \right|$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}}\left| f(y)^n F(y)\right| + R$$
$$R = \frac{1}{n!}\int_0^\xi x^n \frac{d^n}{d y^n}\left\{ f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right\} d x$$

Hieraus lässt sich leicht der von Popoff in den Comptes rendus de d. d. sc. de Paris (Tome 53) gegebene Rest ableiten.

Zu diesem Zweck beachten wir, dass

$$\int_0^\xi x^n \frac{d^n}{d y^n}\left\{ f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right| d x$$

$\frac{d^n}{d y^n}\int_0^\xi x^n f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y} d x$ ist, da y von x völlig unab-g ist und hier also eine nfache Differentiation nach einem Parameter hat.

Ferner finden wir aus (VI.):

$$x = \frac{y - z + \xi f(z)}{f(z)}$$

enzirt man diese Gleichung nach x und beachtet, dass z nur von x, nicht abhängt, so ist:

$$f(z) d x = - d z\left[1 + \frac{y - z}{f(z)} f'(z)\right].$$

Aus (VI) folgt ferner:

$$\frac{d z}{d y} = \frac{1}{1 + (x - \xi) f'(z)} = \frac{f(z)}{f(z) + (y - z) f'(z)}$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Restform ein und beachten, dass $= y + \xi f(z)$ für $x = 0$ und $z = y$ für $x = \xi$, so erhalten wir:

$$R = \frac{d^{\,n}}{d y^{\,n}} \int\limits_{y}^{\xi f(z) + y = z} \frac{(\xi f(z) + y - z)^{n}}{1.\,2.\,\ldots\,n} F'(z)\, d z.$$

Dies ist die von Popoff gegebene Form des Restes.

Eine andere, sehr einfache Darstellung des Restes hat Herr Pr Schering neuerdings gegeben. Er geht von der identischen Gleichung

$$\text{(VIII)} \quad \frac{1}{n\,!} \frac{d}{d x} \left\{ (\xi - x)^{n} \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left\{ G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right\} \right\}$$

$$- \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)\,!} \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left\{ G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right\} +$$

$$\frac{(\xi - x)^{n}}{n\,!} \frac{d}{d x} \left\{ \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left| G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right| \right\},$$

deren rechte Seite erhalten wird, indem man die linkerseits anged Differentiation ausführt, α ist eine ganze positive oder negative Zahl kleiner als n ist. Wir nehmen an, dass z aus der Gleichung x f (z + y = o bestimmt wird, und dass die obigen Voraussetzungen i treff derselben, dass nämlich z = y für x = o und z = ζ für α werden soll, hier gleichfalls stattfinden. Es hat hier also auch die Glei Gültigkeit:

$$\frac{d z}{d x} = f(z) \frac{d z}{d y}.$$

Ebenso ist, wie bewiesen wurde:

$$\frac{d}{d x} \left\{ \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left\{ G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right| = \frac{d^{\,n + \alpha + 1}}{d y^{\,n + \alpha + 1}} \right| G(z)\, f(z) \frac{d F}{d}$$

folglich erhalten wir aus (VIII):

$$\frac{1}{n\,!} \frac{d}{d x} \left\{ (\xi - x)^{n} \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left| G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right| \right\}$$

$$= - \frac{(\xi - \alpha)^{n-1}}{(n-1)\,!} \frac{d^{\,n + \alpha}}{d y^{\,n + \alpha}} \left\{ G(z) \frac{d F(z)}{d y} \right\}$$

$$+ \frac{(\xi - x)^{n}}{n\,!} \frac{d^{\,n + \alpha + 1}}{d y^{\,n + \alpha + 1}} \left\{ G(z)\, f(z) \frac{d F(z)}{d y} \right\}$$

Specialisiren wir jetzt α und G (z) dahin, dass $\alpha = -1$ und G (f $(z)^{n}$ sein soll, multipliciren ferner die letzte Gleichung mit d x un tegriren zwischen den Grenzen x = o und x = ξ, so erhalten wir:

$$)\frac{-\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{f(y)^n F'(y)\right\} = -\int_0^{\xi}\frac{(\xi-x)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{f(z)^n\frac{dFz}{dy}\right\}dx$$

$$+\int_0^{\xi}\frac{(\xi-x)^n}{n!}\frac{d^n}{dy^n}\left|f(z)^{n+1}\frac{dF(z)}{dy}\right|dx$$

Der Kürze halber schreiben wir diese Gleichung:

$$(\text{IX}^b)\quad -B_n = -\int_0^{\xi} A_{n-1}\,dx + \int_0^{\xi} A_n\,dx$$

so

$$B_n = \frac{\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left|f(y)^n F'(y)\right|.$$

$$A_{n-1} = \frac{(\xi-x)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[f(z)^n\frac{dF(z)}{dy}\right]$$

$$A_n = \frac{(\xi-x)^n}{n!}\frac{d^n}{dy^n}\left|f(z)^{n+1}\frac{dF(z)}{dy}\right|.$$

Nun gilt die Gleichung offenbar für jedes positive ganze n und auch für $n = 0$, wenn wir unter dem Symbol $(0)!$ die Zahl 1 verstehen. ...h ist:

$$-B_n = -\int_0^{\xi} A_{n-1}\,dx + \int_0^{\xi} A_n\,dx$$

$$-B_{n-1} = -\int_0^{\xi} A_{n-2}\,dx + \int_0^{\xi} A_{n-1}\,dx$$

$$-B_{n-2} = -\int_0^{\xi} A_{n-3}\,dx + \int_0^{\xi} A_{n-2}\,dx.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$-B_2 = -\int_0^{\xi} A_1\,dx + \int_0^{\xi} A_2\,dx$$

$$-B_1 = -\int_0^{\xi} A_0\,dy + \int_0^{\xi} A_1\,dx$$

Addiren wir alle diese Gleichungen und beachten, dass sich rechts [...] Glieder aufheben mit Ausnahme von $\int_0^{\xi} A_0\, dx$ und $\int_0^{\xi} A_n\, dx$, so e[...] ten wir: $-B_n - B_{n-1} - B_{n-2} - \ldots\ldots - B_2 - B$[...]

$$= -\int_0^{\xi} A_0\, dx + \int_0^{\xi} A_n\, dx$$

Nun ist aber:

$$\int_0^{\xi} A_0\, dx = \int_0^{\xi} f(z) \frac{d\, F(z)}{d\, y}\, dx$$

$$= \int_0^{\xi} f(z)\, F'(z) \frac{d\, z}{d\, y}\, dx = \int_0^{\xi} F'(z) \frac{d\, z}{d\, x}\, dx$$

und wenn wir jetzt als Integrationsvariable z einführen und bedenken, [...] $z = y$ für $x = o$ und $z = \zeta$ für $x = \xi$, so erhalten wir:

$$\int_0^{\xi} A_0\, dx = \int_y^{\xi} F'(z)\, dz = F(\zeta) - F(y)$$

Wir erhalten also, wenn wir für die B ihre Werthe einsetzen und F[...] auf die eine, alles Uebrige auf die andere Seite bringen:

$$F(\zeta) = F(y) + \xi\, f(y)\, F'(y) + \frac{\xi^2}{1.\,2} \frac{d}{d\, y} \left\{ f(y)^2 F'(y) \right\}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\xi^n}{n\,!} \frac{d^{\,n-1}}{d y^{n-1}} \left| f(y)^n F'(y) \right\} + R$$

$$R = \frac{1}{n\,!} \int_0^{\xi} (\xi - x)^n \frac{d^{\,n}}{d\, y^n} \left\{ f(y)^{n+1} F'(y) \right\} dx.$$

Eine neue Methode

für den

Infinitesimalkalkül

nemlich

die umgekehrte Ableitung der Funktionen
(dérivation inverse)

nebst hiernach erhaltenen neuen Formeln

für die

transzendenten Ausdrücke

der

trigonometrischen Funktionen

wovon wichtige Anwendungen auf die Integralrechnung gemacht werden.

Vom

Grafen Georg von Buquoy.

Prag, 1821.
Gedruckt in der Sommerschen Buchdruckerei; in Kommission bei Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Einleitung.

Taylor's Formel, wornach auf eine höchst allgemeine Weise jede Funktion einer oder mehrerer Größen in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen der Wurzeln besagter Funktion entwickelt werden kann, muß als eine der Hauptentdeckungen im Gebiethe des Infinitesimalkalküls betrachtet werden. Nicht bloß gewährt sie dem Geometer in den manigfaltigsten äußerst schwierigen Fällen, wo er es mit inkommensurabeln Ausdrücken zu thun hat, wo die unübersteiglichen Hindernisse von Irrationalität und Transcendenz seine analytischen Operationen mitten in ihrem Laufe gleichsam mit einem Male lähmen, den ungemeinen Vortheil, durch Entwicklung von unendlichen Reihen, wenigstens für kleine Werthe (wegen der hiedurch resultirenden Convergenz), zu den gesuchten Werthen zu gelangen; — nicht nur vermag er durch jene merkwürdige Formel so manche unintegrable Diferenzialformel in eine, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, aproximativ integrable zu verwandeln; — nicht allein gründet sich die höchst wichtige Lehre de maximis et minimis auf Taylor's Formel; — sondern sie gewährt, über diese und tausenderlei andere der analytischen Praxis höchst wichtige Kunstgriffe hinaus, auch noch den wesentlichen Vortheil, daß sie über den, seinem höhern gleichsam metaphysischen Sinne nach, so schwer zu fassenden Begriff des Diferenzialkalküls, sehr viel Licht verbreitet, zumalen, wenn sie den Ansichten der kombinatorischen Analysis unterworfen wird, wie dieß zuerst von Hindenburg geschah, oder wenn sie in die eigentliche Form des Derivationskal-

küls aufgelöst wird, wie dieß zuerst dela Grange in seiner Théorie des fonctions analytiques, mit so vielem Scharfsinne, und so ungemeiner Subtilität auszuführen unternahm.

Seitdem erst war es möglich, welches selbst ein Euler nicht vermochte, die Lehren des Infinitesimalkalküls, ohne des Begriffes vom Unendlichen zu bedürfen, zu entwickeln, und hiedurch selbst die Analysis des Unendlichen aus der mystischen Sphäre metaphysischer Betrachtungen gleichsam in das apodiktisch begründete Gebiet der Elementargeometrie herabzuziehen, und so der gesammten reinen Mathematik jenen Stempel ausgemachter Evidenz aufzudrücken, deren sich bisher keine Wissenschaft rühmen darf. Zu solch' einem verdienstlichen Unternehmen mochte wohl Carnot die erste Hand geboten haben.

Die Ausdrücke: Diferenzialkoefizient nach Euler, oder Fluxion nach Newton, oder Fonction dérivée nach dela Grange, ihrem eigentlichen Sinne nach genommen, liefern die mancherlei Ansichten, denen man die Taylorsche Formel unterwerfen kann.

Die allgemeinste Ansicht von dem Wesen des Derivationskalküls überhaupt aber, gab uns Soldner in seiner éxposition d'une nouvelle fonction transcendente u. s. w., woselbst er die unendliche Reihe, in welche sich jede Funktion auflösen läßt, in einem so allgemeinen*) Ausdrucke darbiethet, daß selbst

---

*) Auf ähnliche Art habe ich vor einigen Jahren durch meinen dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten eine allgemeine Formel der Dynamik geliefert, wovon Lagrangé's principe des vitesses virtuelles bloß ein einzelner Fall ist. Siehe hierüber meine Schriften, welche in Leipzig bei Breitkopf und Härtel zu haben sind, unter den Titeln: Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w.; ferner: Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w.; endlich: Exposition d'un nouveau principe général de dynamique, dout le principe des vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier, lu à l'institut de France, u. s. w.

Taylor's Formel dagegen blos als ein durch einzelne Substitution daraus zu erhaltende der sehr *spezieller* Fall zu betrachten ist. Es ist nicht wohl zu begreifen, wie von dieser höchst fruchtbaren Formel Soldners noch keine Anwendungen gemacht wurden, ja wie sie beinahe noch ziemlich allgemein so ganz unbekannt bleiben konnte. *)

Das hohe Interesse, das mir bei meinen mathematischen, theils eigenen Studien, theils schriftstellerischen Ausarbeitungen, ganz vorzüglich das Wesen des *Derivationskalküls* einflößte, und zugleich ein mehrere Jahre hindurch fortgesetztes Streben, eine *allgemeine Integrationsmethode* zu erfinden, welches Letztere zwar nicht mit dem Resultate erlangter *Vollendung* gekrönt ward, gewährten mir nichts destoweniger *eine Menge neuer Ansichten in dem Gebiethe der höhern Analyse*, wovon ich nach und nach das Wichtigste bekannt machen will, in der Hoffnung, es möge bessern Köpfen gelingen, mehr daraus hervorzubringen, als ich dieß zu thun vermochte.

Ich beginne sogleich in der vorliegenden Schrift damit, eine *ganz neue Anwendung der Derivationsmethode* anzugeben, woraus unbezweifelt für die *höhere Analysis*, vorzüglich für den *Integralkalkül*, wichtige Resultate hervorgehen müssen.

Ich verfiel nämlich bei meinem Streben nach einer allgemeinen Integrationsmethode, unter andern auch auf folgende Methode: Statt aus der *gegebenen* F (x) die unendliche Reihe

---

*) *Soldners* Formel lautet folgendermassen:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \Delta f(x) \frac{dF(x)}{df(x)} + \frac{(\Delta f(x))^2}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)} +$$

$$+ \frac{(\Delta f(x))^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d\left(\frac{\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}\right)}{df(x)} + \ldots \text{u. s. w.}$$

worin F (x) und f (x) beliebige Funktionen von x ausdrücken.

$$F(x+\omega) = F(x) + \omega . F'(x) + \frac{\omega^2}{2} . F''(x) + \frac{\omega^3}{2 . 3} F'''(x) + \ldots\ldots$$

zu entwickeln [nach der Bezeichnungsweise des de la Grange], betrachte man vielmehr $F(x)$ als unbekannt, und $F'(x)$ [wenn nemlich $d F(x)$ gegeben ist] als gegeben, und suche $F(x)$ aus $F'(x)$ oder aus $d F(x)$, indem man sagt:

Es folgt aus dem gegebenen $d F(x)$ die Gleichung
$F'(x) = \varphi(x)$, also $\varphi'(x) = \psi(x) = F''(x)$, ferner
$\psi'(x) = \pi(x) = F'''(x)$, u. s. w.
Es frägt sich nun, nach welchem Gesetze läßt sich zurückderiviren, und zwar: $\psi(x)$ aus $\pi(x)$, ferner $\varphi(x)$ aus $\psi(x)$, u. s. w.; oder $F''(x)$ aus $F'''(x)$, ferner $F'(x)$ aus $F''(x)$, und folglich (wenn das per inductionem rückschreitende Derivationsgesetz bekannt ist) $F(x)$ aus $F'(x)$; wornach also $F(x)$ aus $F'(x)$ gefunden, oder, mit andern Worten, $d F(x)$ integrirt, wäre.

Es sey z. B. $d F(x) = x^m dx$, so integriren wir nach besagter Methode $x^m dx$ folgendermassen:

$F'(x) = x^m$, $F''(x) = \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$, $F'''(x) = \frac{d(mx^{m-1})}{dx} =$
$= m(m-1)x^{m-2}$, $F''''(x) = \frac{d\left(m(m-1)x^{m-2}\right)}{dx} = m(m-1)$
$(m-2)x^{m-3}$, u. s. w.; nun ist $x^{m-2} = x^{m-3+1}$, ferner $x^{m-1} =$
$= x^{m-2+1}$, ferner x^m oder $x^{m-0} = x^{m-1+1}$, also ist die Potenz von x die in $F(x)$ vorkömmt $= x^{m+1}$; dann ist $m(m-1) = \frac{m(m-1)(m-2)}{m-2}$, ferner $m = \frac{m(m-1)}{m-1}$, ferner $1 = \frac{m}{m} = \frac{m}{m-0}$, also ist der Koefizient der Potenz von x, welcher in $F(x)$ vorkömmt

$= \frac{1}{m-(-1)} = \frac{1}{m+1}$; es ist demnach $F(x) = \frac{xm+1}{m+1}$ oder $\int x^m dx =$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1}$, wie dieß bekanntermassen auch wirklich so ist.

Ich habe nun vielfältige Versuche angestellt, nach dieser Methode, bisher unbekannte Integrale auszudrücken, war auch so glücklich, hier manches nützliche Resultat zu erhalten. Vorläufig aber begnüge ich mich in dieser Abhandlung blos damit, die aproximativen Ausdrücke zu liefern, welche ich für die transzendenten trigonometrischen Funktionen zu erhalten im Stande war. Ich glaube hiemit den Beweis zu geben, daß durch meine Integrationsmethode einstweilen der trigonometrischen Analysis ein nicht geringer Zuwachs geworden sey. Endlich substituire ich jene gefundenen trigonometrischen Resultate in die vorzüglichsten mit trigonometrischen Ausdrücken verwebten Formeln der Integralrechnung.

Umgekehrte Ableitung der Funktionen (dérivation inverse) überhaupt; — hierauf gestützte allgemeine Integrationsmethode; — einige hieraus entwickelte Fundamentalgleichungen der Integralrechnung als Beispiel.

So wie [Alles nach der Bezeichnungsweise des de la Grange in seiner Théorie des fonctions analytiques] $F'(x)$ aus $F(x)$, dann $F''(x)$ aus $F'(x)$, dann $F'''(x)$ aus $F''(x)$, u. s. w. insgesammt nach einem und demselben Ableitungsgesetze sich entwickeln, eben so muß umgekehrt, nach einem und demselben Entwicklungsgesetze, sich ableiten lassen: $F''(x)$ aus $F'''(x)$, dann $F'(x)$ aus $F''(x)$, endlich $F(x)$ aus $F'(x)$. Die Entwicklung letzterer Art wird man aber jedesmal wirklich zu efektuiren im Stande seyn, wenn man per inductionem die jedesmalige Ableitungsmethode zu abstrahiren vermag. Ist daher $F'(x)$ gegeben, und sind hieraus auch $F''(x)$, $F'''(x)$, $F''''(x)$, u. s. w. bekannt, ist man ferner im Stande, daraus, daß man $F'''(x)$ aus $F''''(x)$, dann $F''(x)$ aus $F'''(x)$ u. s. w. zu deriviren versucht, die allgemeine Derivationsmethode anzugeben, wornach hier zurück ein Glied aus dem andern hervorgeht, so vermag man auch, die Derivation bis auf das Glied $F(x)$ hin wirklich zu verfolgen, sonach $F(x)$ auszudrücken, und man ist also im Stande: unmittelbar aus $F'(x)$ den Ausdruck $F(x)$ zu finden; das heißt aber mit andern Worten: es sey durch die hier angegebene Methode der umgekehrten Ableitung die Bahn zu einer Integration a priori eröffnet, da doch bisher alle Integration nur a posteriori geschah.

Wenn z. B., nach der bisher üblichen Methode in der höhern Analyse, gesagt wird, es sey

$$\int a^x\, dx\, l.\, n.\, a = a^x$$

so beruht diese Behauptung blos darauf, daß, wenn a^x diferenzirt wird, man auf den Ausdruck

$$a^x\, dx\, l.\, n.\, a$$

wirklich gelangt. Nach meiner Methode hingegen entwickle ich a^x unmittelbar aus

$a^x\, dx\, l.\, n.\, a$, indem ich $a^x = F(x)$

als unbekannt betrachte, ferner aus dem gegebenen $a^x\, dx \log : nat : a$, wodurch also auch

$$a^x \log.\, nat.\, a = F'(x)$$

gegeben ist, die Ausdrücke $F''(x)$, $F'''(x)$, u. s. w. ableite, dann bis auf $F(x)$ zurückderivire, und so unmittelbar $F(x) = a^x$ aus dem gegebenen $a^x\, dx \log : nat : a$ erhalte.

Die beste Erläuterung meiner Methode, und den zweckmäßigsten Beleg zu deren Würdigung, will ich hier sogleich dadurch geben, daß ich einige der bekannten Fundamentalgleichungen des Integralkalküls darnach entwickle. Hiedurch wird zwar der Wissenschaft, ihrem positiven Theile nach, kein neues Resultat geliefert, wohl aber die Methode derselben um ein Merkliches vorangebracht. Soviel jedoch hier nur vorläufig, da in den folgenden Abtheilungen dargethan werden wird, daß meine Bemühungen auch durch neue dem Analytiker höchst wichtige Resultate belohnt wurden.

1) Suche $\int x^m\, dx = F(x)$.

$F'(x) = x^m$, $F''(x) = mx^{m-1}$, $F'''(x) = m(m-1)\, x^{m-2}$, u. s. w. Es ist

$x^{m-1} = x^{m-2+1}$, $x^m = x^{m-1+1}$, also die Potenz von x in $F(x) = x^{m+1}$; ferner ist $m = \frac{m(m-1)}{m-1}$, $1 = \frac{m}{m} = \frac{m}{m-0}$, also der

Koefizient in $F(x) = \frac{1}{m-(-1)} = \frac{1}{m+1}$, daher $F(x) = \frac{1}{m+1}$. x^{m+1}, also $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

2) Suche $\int a^x dx = F(x)$.

$F'(x) = a^x$, $F''(x) = a^x \, l.n.a$, $F'''(x) = (l.n.a)^2 . a^x$, $F''''(x) = (l.n.a)^3 \; a^x$, u. s. w. Es bleibt a^x durch alle Glieder hindurch, also auch in $F(x)$. Ferner ist
$(l.n.a)^2 = (l.n.a)^{3-1}$, dann $(l.n.a) = (l.n.a)^{2-1}$, dann $1 = (l.n.a)^0 = (l.n.a)^{1-1}$, daher der Koefizient in $F(x) = (l.n.a)^{0-1} = (l.n.a)^{-1}$ ist. Also ist $F(x) = \frac{1}{l.n.a} . a^x$, oder $\int a^x dx = \frac{a^x}{l.n.a}$.

3) Suche $\int dx \operatorname{Cos} x = F(x)$.

$F'(x) = + \operatorname{Cos} x$, $F''(x) = - \operatorname{Sin} x$, $F'''(x) = - \operatorname{Cos} x$, $F''''(x) = + \operatorname{Sin} x$, $F'''''(x) = + \operatorname{Cos} x$, u. s. w.
Hier sieht man sogleich das Gesetz, nach welchem die Glieder zurücklaufen, da Cos x und Sin x immer abwechseln, und da nach zwei positiven immer zwei negative Werthe folgen u. s. w. Also ist
$F(x) = + \operatorname{Sin} x$, oder $\int dx \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} x$.

4) Suche $\int dx \operatorname{Sin} x = F(x)$.

Hier wird auf ähnliche Art operirt als sub 3).

Es läßt sich aber, nach der Methode der umgekehrten Ableitung, nicht in allen Fällen das Integral so leicht und unmittelbar finden, wie in den eben angeführten Beispielen. Oefters werden hiezu sehr feine Kunstgriffe des Kalküls erfodert, und selbst da vermag man oft nur auf Aproximationen zu gelangen. Ein

merkwürdiges Beispiel hievon ist der folgende Abschnitt. Mehrere wichtige Anwendungen dieser Lehre auf äußerst schwierige Fälle behalte ich mir noch für später zu erscheinende Aufsätze vor. Möge es mir gelingen, hiedurch der bisherigen Ungeschmeidigkeit und höchst beschränkten Anwendbarkeit der transzendenten und irrationalen Funktionen einigermaßen abzuhelfen, und sonach auf den Dank des Geometers einen gegründeten Anspruch machen zu dürfen.

Ehe ich jedoch zu dem folgenden Abschnitte schreite, wo der Ausdruck für die trigonometrischen Funktionen gesucht wird, will ich hier, nur vorbereitungsweise, ganz kurz einen Gegenstand berühren, welchen ich mir in einer folgenden Schrift weitläufiger zu entwickeln vorbehalte. Es soll nemlich hier noch gezeigt werden, wie sich der transzendente Ausdruck des natürlichen Logarithmus einer Zahl, nach meiner Integrationsmethode, auf eine neue Weise ansetzen ließe.

Wir setzen

$\log\text{: nat: } x = F(x)$, also $F'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\frac{m}{m}}}$ = [wenn m sehr groß angenommen wird] $= \frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}}$, also: $F'(x) = \frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}}$, $F''(x) = -\frac{(m-1)}{m\,.\,x^{\frac{2m-1}{m}}}$, $F'''(x) = \frac{(m-1)\,(2m-1)}{m^2\,.\,x^{\frac{3m-1}{m}}}$, u. s. w.

Die rückschreitende Derivation der Potenz von m im Nenner ist so:

m^2, m^1, m^0, m^{-1}; ferner der Potenz von x so:

$x^{\frac{3m-1}{m}}$, $x^{\frac{2m-1}{m}}$, $x^{\frac{1.m-1}{m}}$, $x^{\frac{0.m-1}{m}} = x^{-\frac{1}{m}}$; also haben wir

$$l.n.x = C + \frac{A}{m^{-1}\,x^{-\frac{1}{m}}} = C + A\,.\,m\,x^{\frac{1}{m}}.$$

Da $l.n.1 = 0$, also $C + Am = 0$, so ist $C = -Am$, folglich $l.n.x = -$

$$-Am + Am.x^{\frac{1}{m}} = Am\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right) = N\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right).$$

Um N zu bestimmen, sagen wir:

$$d\,(l.n.x) = N.\frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1}\,dx = \frac{N}{m}\;\frac{dx}{x^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{N.x^{\frac{1}{m}}}{m}\;\frac{dx}{x},$$

aber $d\,(l.n.x) = \frac{dx}{x}$, also $\frac{N.x^{\frac{1}{m}}}{m} = 1$, oder $N = \frac{m}{x^{\frac{1}{m}}}$, also:

$$\text{log. nat. } x = m\left(\frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{m}}}\right).$$

Diese Gleichung ist um so richtiger, je größer m angenommen wird; jedoch muß m immer einen endlichen Werth haben, wenn die Formel von Anwendung seyn soll; denn nehmen wir $m = \infty$ an, so entsteht

$$l.n.x = \infty\,(1-1)$$

für alle Werthe von x, woraus sich nichts finden läßt. Wird für m ein recht großer aber noch endlicher Werth angenommen, so trift obige Formel näherungsweise mit der Wahrheit überein. Wir erhalten daraus

$$l.n.0 = -\frac{m}{0} = -\infty;\ \text{ferner } l.n.1 = \frac{m}{1^{\frac{1}{m}}}\left(1^{\frac{1}{m}} - 1\right) =$$

$$= m\,(1-1) = m.0 = 0;\ \text{endlich } l.n.\infty = \frac{m}{\infty^{\frac{1}{m}}}\left(\infty^{\frac{1}{m}} - 1\right) =$$

$= \frac{m}{\infty} . \infty = m$. Im letzten Falle soll nun $l. n. \infty = \infty$ herauskommen; wir sehen also, daß sich die Richtigkeit unserer Formel nicht bis auf $x = \infty$ erstrecke, sondern bloß auf *sehr große endliche* Werthe von x.

Die aproximative Richtigkeit der letzten Gleichung zeigt sich vorzüglich daraus, daß, wenn der Ausdruck

$$\frac{m}{x^{\frac{1}{m}}}\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

differenzirt wird, man ziemlich nahe den Ausdruck $\frac{dx}{x}$ erhält, in soferne m einem *großen endlichen* Werthe entspricht.

Es ist nemlich:

$$d\left(\frac{m}{x^{\frac{1}{m}}}\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right)\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right)}{x^{1+\frac{1}{m}}}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right)}{x}\right) dx = [\text{da } x^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{l. n. x}{m} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{l. n. x}{m}\right)^2 + \frac{1}{2 . 3}\left(\frac{l. n. x}{m}\right)^3 + \ldots = 1 \text{ ist, in soferne m}$$

gegen x sehr groß ist] $= \frac{dx}{x}$.

Noch läßt sich hier die wichtige Bemerkung machen, daß der Ausdruck

$$m . \left(\frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{m}}}\right)$$

dann immaginäre Werthe gebe, wenn x negativ angenommen wird, welches auch so seyn muß, da log: nat: (—) eine immaginäre Zahl ist. Der Beweis obiger Bemerkung folgt hieraus: Dem Geiste der Entwicklungsweise obigen Ausdruckes gemäß, bezieht sich dessen Gültigkeit bloß darauf, daß (bei irgend einem angenommenen Werthe von x) verhältnißmäßig m, obgleich immer noch endlich, den Werth von x sehr überschreite. Ist also (bei irgend einem Werthe von x) für m ein Werth = M angenommen, welcher groß genug ist, daß näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\log:\mathrm{nat}:x = \frac{M}{x^{\frac{1}{M}}}\left(x^{\frac{1}{M}} - 1\right),$$

so bleibt unsere Gleichung auch wahr, wenn gesetzt wird:

$$\log:\mathrm{nat}:x = \frac{(M+1)}{x^{\frac{1}{M+1}}}\left(x^{\frac{1}{M+1}} - 1\right),$$

welche beide Gleichungen wir auch so ansetzen können:

$$\log:\mathrm{nat}:x = \frac{M}{\sqrt[M]{x}}\left(\sqrt[M]{x} - 1\right) \text{ und}$$

$$\log:\mathrm{nat}:x = \frac{M+1}{\sqrt[M+1]{x}}\left(\sqrt[M+1]{x} - 1\right).$$

Die erstere dieser beiden Gleichungen ward angesetzt, ohne berücksichtigen zu müssen, ob M eine gerade oder ungerade Zahl sey. Sey nun M eine ungerade Zahl, so ist M + 1 eine gerade Zahl. Wir erhalten also einen immaginären Ausdruck, wenn wir in die letztere Gleichung statt x einen negativen Werth substituiren.

Ausdruck für die trigonometrischen Funktionen nach meiner neuen Integrationsmethode.

Bekanntlich ist beim Kreise die Gleichung zwischen Abscisse x und Ordinate y folgende:

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

daher der Ausdruck für das Element des Bogens s folgendermassen lautet:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r \, . \, dx}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieß vorausgesetzt, suchen wir $s = F(x)$ nach unserer Integrationsmethode so (wobei des de la Grange Bezeichnungsweise angenommen):

$$F(x) = s, \quad F'(x) = \frac{r}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad F''(x) = \frac{-r(r-x)}{(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F'''(x) = \frac{r(3r^2 - 4rx + 2x^2)}{(2rx - x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad F''''(x) =$$

$$= -\frac{r(15r^3 - 27r^2x + 18rx^2 - 6x^3)}{(2rx - x^2)^{\frac{7}{2}}}, \text{ u. s. w.}$$

Aus dieser Reihe zurück geschlossen auf den Ausdruck von s, ergibt sich, wenn $r = 1$ gesetzt wird, $s = \frac{1 \, . \, \varphi(x)}{(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}} = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}} \varphi(x)$, worinn $\varphi(x)$ sich nicht, wie der Faktor $(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$, unmittelbar bestimmen läßt. Man setze daher $\varphi(x) = 1 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, also ist

$$s = F(x) = \left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4\right), \text{ und}$$

$$F'(x) = \frac{1 + (3b - 1)x + (5c - 2b)x^2 + (7d - 3c)x^3 + (9e - 4d)x^4 - 5e.x^5}{\left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Nun bestimme b, c, d, e, so, daß die Koefizienten von x, x^2. x^3, x^4, zu Null werden, wornach (wenn e klein genug ausfällt) aproximative

$F'(x) = \frac{1}{\left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, innerhalb der Werthe o und 1 von x, gesetzt werden kann. Es kann dann $F(x)$ aproximative den Bogen s von 0° bis 90° angeben. Hiernach erhalten wir

$b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{9}$, $d = \frac{2}{21}$, $e = \frac{8}{189}$; daher $s = F(x) = \left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{21}x^3 + \frac{8}{189}x^4\right)$, oder

1) $s = F(x) = \left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 0{,}33333 \cdot x + 0{,}22222 \cdot x^2 + 0{,}09524 \cdot x^3 + 0{,}04233 \cdot x^4)$.

Für $x = 1$ erhält man statt 90° den Bogen 97°; geht man aber nur bis x^2, und vernachläßigt x^3 und x^4, so erhält man 90° + 1°. Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man, wenn man x^3 und x^4 vernachläßigt, statt 60° den Bogen 60° + 40'. Für $x = \frac{1}{4}$ erhält man, wenn man x^3 und x^4 vernachläßigt, statt 41° 25' den Bogen 41° 25' + 12'. Also ist in diesen 3 Fällen der Bogen zu groß um $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{207}$. Wir dürfen also aproximative setzen:

2) $s = F(x) = \left(2x - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{9} (9 + 3x + 2x^2)$.

Da letztere Formel nicht bequem genug ist, und man, um x daraus zu suchen, auf eine Gleichung über den vierten Grad hinaus kömmt, so wollen wir s auf ähnliche Art bestimmen, als eben geschehen ist, uns aber damit begnügen, daß s näherungsweise nur von 0° bis 45° bestimmt werden könne.

Wir setzen

$$s = F(x) = (2x - x^2)(1 + bx), \text{ also}$$

$$F'(x) = \frac{1 + (3b - 1)x - 2b.x^2}{(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

der Zähler dieses Bruches nähert sich bei Werthen von x, die kleiner als 1 sind, der Zahl $= 1$, je kleiner x ist, vorzüglich wenn $3b - 1 = 0$ gemacht wird. Es folgt aber aus $3b - 1 = 0$, $b = \frac{1}{3}$, also

$$s = F(x) = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{3}x\right) = 0{,}3333333 \cdot (2x - x^2)^{\frac{1}{2}} (3 + x).$$

Dieser Ausdruck ist um so genauer, je kleiner x ist.

Für $x = 0{,}2928932$ soll der Bogen von 45° erhalten werden, wird aber aus obiger Formel erhalten $s = 45° - 30'$, also ist der erhaltene Bogen um $\frac{1}{90}$ zu klein.

Für $x = \frac{1}{4}$ soll der Bogen von 41° 25' erhalten werden, wird aber aus obiger Formel erhalten $s = 41° \ 25' - 21'$, also ist der erhaltene Bogen um $\frac{1}{118}$ zu klein.

Für $x = 0{,}0603074$ soll der Bogen von 20° erhalten werden, wird aber aus obiger Formel erhalten $s = 20° - 36''$, also ist der erhaltene Bogen um $\frac{1}{2000}$ zu klein.

Für $x = 0{,}0001523$ soll der Bogen von 1° erhalten werden, wird aber aus obiger Formel erhalten $s = 1° - \frac{1}{2}''$, also ist der erhaltene Bogen um $\frac{1}{7200}$ zu klein.

Man sieht, daß nach obiger Formel, der gesuchte Bogen immer um etwas zu groß ausfällt, und daß von 45° an bis 0° der Ueberschuß von $\frac{1}{90}$ oder $\frac{2}{180}$

bis o fortan abnehme. Wenn wir daher den jedesmal gefundenen Bogen um $\frac{1}{180}$ seiner aus der Formel gefundenen Länge vermehren, so beträgt der Fehler aller nur immer ausgedrückten Bögen von 0° bis 45° nie mehr als $\frac{1}{180}$; es ist nemlich dann der Bogen 45° um $\frac{1}{180}$ zu klein, und der Bogen sehr nahe an 0° um $\frac{1}{180}$ zu groß; hingegen beträgt der Ueberschuß oder Abgang jedes andern Bogens, zwischen 0° und 45° liegend, weniger als $\frac{1}{180}$ der aus der Formel gefundenen Länge.

Daher drücken wir unsere Formel so aus: [nach wirklicher Division von $\frac{181}{180 \cdot 3}$]

3) $s = F(x) = 0{,}3351851 \cdot (2x - x^2)^{\frac{1}{2}} (3 + x)$ [gilt von 0° bis 45°].

Setzen wir

$$s = \text{Arc. Cos: } u, \text{ und daher } u = \cos s = 1 - x,$$

so haben wir:

[für alle Bögen von 0° bis 45° und von 180° bis 135° oder für alle Cosinusse von ± 1 bis $\pm 0{,}7071068$]

4) $s = \text{Arc: Cos: } u = m\pi \pm 0{,}3351851 \cdot \left(1 - u^2\right)^{\frac{1}{2}} (4 - u)$, worinn der größte Fehler betragen kann $\frac{1}{180}$, und [für alle Bögen von 45° bis 90°, und von 135 bis 90°, und für alle Cosinusse von $\pm$ 0,7071068 bis 0]

5) $s = \text{Arc: Cos: } u = m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \cdot u \left(4 - \left(1 - u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, worinn schon das Transzendente enthalten ist. Hier drückt π die halbe rektifizirte Periphерie aus $= 3{,}14159266$, und m jede grade (0, 2, 4, ...) oder ungrade (1, 3, 5, 7, ...) Zahl, je nachdem $u = +$ oder $= -$ ist; jedoch wird in allen Fällen $u = +$ substituirt, es mag dessen Werth positiv oder negativ gegeben seyn.

Aus obigen zwei Gleichungen 4 und 5 ergeben sich folgende Gleichungen, die auch nur a p r o x i m a t i v e wahr sind, und sich auf d i e s e l b e n G r e n z e n be-

ziehen, als obige zwei Gleichungen, deren Genauigkeit wir jedoch nicht geprüft haben.

$s = \text{Arc: Sin: } u = m\pi \pm 0{,}3351851 \,.\, u\left(4-(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right)$	0° bis 45° 180 — 135° u. s. w.
$s = \text{Arc: Sin: } u = m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851\ (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,(4-u)$	45° — 90° 135° — 90° u. s. w.
$s = \text{Arc: Tang: } u = m\pi \pm 0{,}3351851 \,.\, \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(4-\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right)$	0° — 45° 180 — 135° u. s. w.
$s = \text{Arc: Tang: } u = m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851\left(\frac{4}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{u}{u^2+1}\right)$	45° — 90° 135° — 90° u. s. w.
$s = \text{Arc: Cot: } u = m\pi \pm 0{,}3351851 \,.\, \left(\frac{4}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{u}{u^2+1}\right)$	0° — 45° 180° — 135° u. s. w.
$s = \text{Arc: Cot: } u = m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \,.\, \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(4-\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right)$	45° — 90° 135° — 90° u. s. w.

Es versteht sich, daß die Formeln, welche gelten von 0° bis 45° von 180° bis 135°, auch von 180° bis 225 von 360° bis 315° gelten; eben so, daß die Formeln, welche gelten von 45° bis 90° von 135° bis 90°, auch von 225° bis 270° von 270°

bis 315° gelten, u. s. w., wie sich dieß von selbst ergibt, wenn man statt m allmählig die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... substituirt. Es möge u als positive oder als negative Zahl gegeben werden, so wird es immer mit jenem Zeichen + oder — substituirt, das dem jedesmaligen u zukommt, wenn dieß u (nach Maaßgabe seiner Bedeutung) einen positiven Cosinus entsprechen soll. Da z. B. einem positiven Cosinus ein positiver und negativer Sinus entspricht, so ist in den Gleichungen für Arc: Sin u das u mit beiden Zeichen ± in die Formel zu substituiren, es mag der Sinus als positive oder als negative Zahl gegeben werden.

Die hier angesetzten Gleichungen mögen hinreichen, um mit ziemlicher Annäherung da zu operiren, wo man allgemein alle zusammen gehörigen Werthe von s und u zu substituiren nöthig hat. In jenen Fällen hingegen, wo die Substitutionen der zusammen gehörigen Werthe von s und u sich blos auf jene Bögen beziehen dürften, welche innerhalb der Grenzen 0° und 20° lägen, oder innerhalb der Grenzen 70° und 90°, operirt man mit weit größerer Genauigkeit, wenn man durchgehends statt des Koefizienten 0,3351851 den Koefizienten 0,3333333 ansetzt. Die solchermassen (sich auf die Grenzen 0° und 20° dann 70° und 90° beziehenden) erhaltenen Resultate sind dann um so genauer, je näher die Bögen, auf welche sich die substituirten zusammen gehörigen Werthe von s und u beziehen, den Werthen 0° und 90° liegen.

Wir könnten nun zwar Sin: s, Cos: s, Tang: s, Cot: s, durch s ausgedrückt, aus obigen Gleichungen 4 und 5 unmittelbar finden. Allein wir gerathen hier auf Gleichungen des 4ten Grades, die zu höchst weitläuftigen Ausdrücken führen. Um daher bequemere Ausdrücke zu erhalten, suchen wir vorläufig unmittelbar den Ausdruck für Sin s, und zwar so:

Es ist

$$\sin s = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ ferner ist}$$

$$-\cos s + 4 = -(1 - x) + 4 = 3 + x;$$

wir hatten oben (Gleichung 3) wenn wir uns auf die Grenze von 0° bis 25° beschränkten,

$s = 0{,}3333333 \left(2x - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} (4 - \mathrm{Cos}: s)$, also

$\left(2x - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{s}{0{,}3333333\ (4 - \cos s)}$, aber

$\left(2\pi - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sin s$, also

$\sin s = \dfrac{s}{0{,}3333333\ (4 - \cos s)}$, folglich

$-4 + \cos s = \dfrac{-s}{0{,}3333333 \cdot \sin s}$,

$-1 + \sin^2 s = -\left(4 - \dfrac{s}{0{,}3333333 \cdot \sin s}\right)^2$

$\sin^2 s = -15 + \dfrac{8 \cdot s.}{0{,}3 \ldots\ldots 3\ \sin s} - \dfrac{s^2}{(0{,}3 \ldots\ldots 3)^2 \cdot \sin^2 s}$

6) $\mathrm{Sin}^4 s + 15\ \mathrm{Sin}^2 s - \dfrac{8 \cdot s.}{0{,}3 \ldots\ldots 1}\ \mathrm{Sin}\ s + \dfrac{s^2}{(0{,}3 \ldots\ldots 1)^2} = 0$,

worinn bei genugsam kleinen Werthen von s statt $\mathrm{Sin}^4 s$ gesetzt werden darf s^4.

Der Fehler kann (von 0° bis 23°) höchstens $\frac{1}{450}$ betragen.

Bekanntlich ist

$\mathrm{sos}: s = 1 - 2\ \mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2}$, also ist $\cos: s = 1 - \dfrac{s^2}{18 \cdot (0{,}3333333)^2}$,

welches von 0° bis 23° ziemlich nahe kömmt, da

$$\mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} = \frac{\frac{17}{4} s^2 + 4 \cdot s \left(\frac{s^2}{4} - 15 \cdot 0{,}3333333^2 \frac{s^4}{16} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{s^4}{15 \cdot 16}}{15^2 \times 0{,}3333333^2} \text{ ist,}$$

oder, wenn s genugsam klein ist,

$\mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} = \dfrac{s^2}{36 \cdot (0{,}3333333)^2}$ gesetzt werden darf.

Wir haben also mit ziemlicher Genauigkeit, für die Bögen von 0° bis 23°,

7) $\mathrm{Cos}: s = 1 - \dfrac{s^2}{1{,}9999998}$, beinahe $\cos: s = 1 - \dfrac{s^2}{2}$,

Um aber auch Cos: s zu bekommen gültig für alle Bögen von 0° bis 45°, sagen wir:

Es ist bekanntlich

$$\frac{\text{Cos } 2\alpha + 1}{2} = \text{Cos}^2 \alpha, \text{ also}$$

$$\cos: s = 2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1,$$

also, welches ziemlich genau ist von 0° bis 45°,

8) $\begin{cases} \text{Cos}: s = 1 + 2 \cdot \frac{s^2}{7{,}9999998} \left(\frac{s^2}{7{,}9999998} - 2 \right), \text{ oder minder genau:} \\ \text{Cos}: s = 1 + \frac{s^2}{4} \left(\frac{s^2}{8} - 2 \right) = 1 + \frac{s^4}{32} - \frac{s^2}{2}. \end{cases}$

Nimmt man letztere sehr bequeme Formel, so beträgt der Fehler höchstens $\frac{1}{170}$, wenn man alle möglichen Bögen s innerhalb der Grenzen 0° und 45° annimmt.

Nennen wir

$$s = \text{Arc}: \text{Cos}: u, \text{ und Cos } s = u,$$

so haben wir aus obiger Gleichung:

9) $\text{Arc}: \text{Cos}: u = \pm \sqrt{8 \pm \sqrt{32 (1 + u)}}$, welches ziemlich genau ist von 0° bis 45°.

Wenn das Transzendente mit in den Ausdruck gebracht wird, so haben wir

10) $\cos (m\pi \pm s) = 1 + \frac{s^4}{32} - \frac{s^2}{2}$, $\cos (n\pi \pm s) = -1 - \frac{s^4}{32} + \frac{s^2}{2}$, worinn $m = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$, dann $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, gültig von 0° bis ± 45° und von 135° bis 225°; der größte Fehler kann hier betragen $= \frac{1}{170}$.

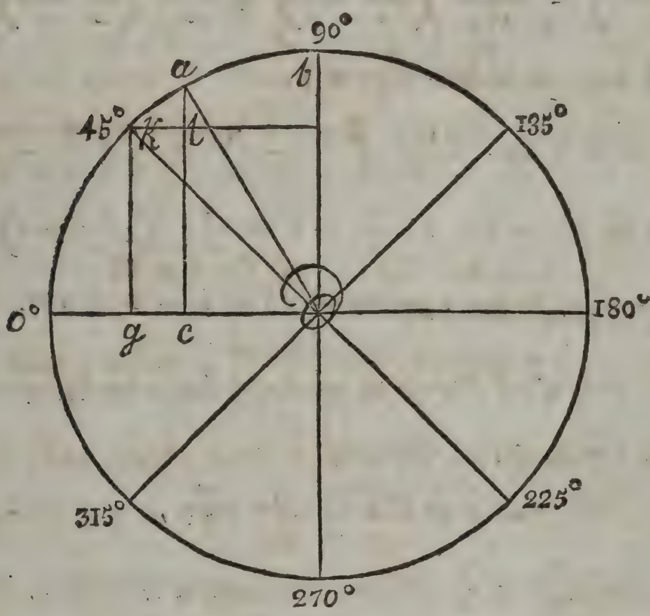
Für $s > 45°$ sagen wir

11) $\text{Cos} (m\pi \pm s) = \frac{\pi}{2} - s + \frac{1}{160} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^5 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^3$, ferner

$\cos(n\pi \pm s) = -\cos(m\pi \pm s) =$ u. s. w., woselbst die 5te Potenz vernachläßigt werden dar, wenn s von $\frac{\pi}{2}$ nicht sehr abweicht, welche Gleichungen gültig sind von $\pm 45°$ bis $\pm 90°$ und von $90°$ bis $135°$ dann von $225°$ bis $270°$ u. s. w., wobei der größte Fehler betragen kann $= \frac{1}{1200}$.

In obigen Gleichungen ist

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079633.$$



Die Gleichungen 11) werden folgendermassen erhalten:

$oa = s$, $cd = \cos: s = 1 - og - gc = 1 - og - kl$.

Laßt uns nun bloß die Kurve kab betrachten, worinn $kl = x$ und $la = y$ die Coordinaten des Kurvenstückes $oa = s$ darstellen. Vorläufig bemerken wir, daß,

innerhalb der Grenzpunkte k und b, keine zur kb gezogene Tangente mit einer zu kl gezogenen Parallelen einen Winkel bilden könne, der größer als 45° wäre.

Nun sagen wir:

$dx = ds \, \text{Cos}: adb = ds \, \text{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)$, [worinn $\frac{\pi}{2} - s$ nie 45° überschreitet;] daher

$$dx = ds \left(1 + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^4}{32} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^2}{2}\right), \text{ und folglich } x = C -$$

$$- \left(\frac{\pi}{2} - s\right) - \frac{1}{160} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^5 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^3 = \text{oder, da}$$

für $x = gd$ das $s = okb = \frac{\pi}{2}$ wird,

$$x = gd - \frac{\pi}{2} + s - \frac{1}{160} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^3; \text{ folglich}$$

$$\text{Cos}: s = 1 - og - gd + \frac{\pi}{2} - s + \frac{1}{160} \left(\frac{\pi}{2} - s\right)^5 -$$

$$- \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^3, \text{ worinn } 1 - og - gd = 1 - 1 = 0 \text{ ist.}$$

Die Gleichungen 11) sind um so genauer, je kleiner der Werth von $\left(\frac{\pi}{2} - s\right)$ ist, (denn sie beruhen auf der Gleichung

$$\cos: s = 1 + \frac{s^4}{32} - \frac{s^2}{2},$$

worinn s durch $\left(\frac{\pi}{2} - s\right)$ substituirt ward); der größte Fehler, den die Gleichungen 11) geben können, erfolgt also dann, wenn

$$\frac{\pi}{2} - s = \frac{\pi}{4} \text{ wird, also wenn } s = \frac{\pi}{4}$$

ist; aber auch hier beträgt der Fehler nur $\frac{1}{1200}$.

Betrachten wir den Ausdruck (Gleichung 8)

$$\mathrm{Cos}:\ s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{32},$$

so können wir die schöne, und für die Bestimmung eines der Wahrheit sehr nahe kommenden Ausdruckes für Cos: s sehr wichtige Bemerkung machen, daß, wenn man von Cos: s die 1te abgeleitete Funktion — Sin s sucht; ferner, wenn man von sin: s die 1te abgeleitete Funktion cos s sucht, u. s. w. daß man für sin s, dann für cos: s, dann für sin: s Ausdrücke erhält, welche von der Wahrheit allmählig mehr und mehr abweichen. Man erhält nemlich solchermassen:

$$\mathrm{Cos}: = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{32}, \text{ dann } \mathrm{Sin}:\ s = s - \frac{s^3}{8}, \text{ dann } \mathrm{Cos}\ s = 1 - \frac{3}{8}s^2, \text{ endlich } \mathrm{Sin}\ s = \frac{3}{4}s;$$

woselbst (innerhalb der Grenzen 0° und 45°) die größten Fehler (nemlich bei 45°) betragen, im 1ten Falle $= \frac{1}{170}$, im 2ten Falle $= \frac{1}{40}$, im 3ten Falle $= \frac{1}{11}$, im 4ten Falle $= \frac{1}{6}$. Kehrt man hingegen die Operation um, nimmt nemlich Cos: s als erste abgeleitete Funktion an, und sucht deren ursprüngliche Funktion Sin s, nimmt dann Sin s als 1te abgeleitete Funktion an, und sucht deren ursprüngliche Funktion — cos s, u. s. w.; so gelangt man allmählig auf Ausdrücke, welche der Wahrheit stets näher und näher kommen, wie man in dieser Operation fortschreitet. Diesem gemäß erhalten wir folgende Ausdrücke (aproximative gültig innerhalb der Grenzen 0° und 45°), welche der Wahrheit immer näher kommen, wie man von dem nächststehenden nach dem entferntern hin sich wendet.

(Gültig, so lange s die Grenzen 0° bis 45° nicht überschreitet).

	Beträgt der größte Fehler nemlich bei 45°.
12) $\text{Cos}: s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{32} \dots\dots\dots$	$\dots \frac{1}{170} \dots$
13) $\text{Sin}: s = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{160} -$ (übereinstimmend mit Gleichung 11.)	$\dots \frac{1}{1200} \dots$
14) $\text{Cos}: s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{960} = 1 - \frac{1}{2}(s^2) + \frac{1}{24}(s^2)^2 - \frac{1}{960}(s^2)^3 \dots$	$\dots\dots$
15) $\text{Sin}: s = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{6720} \dots\dots$	$\dots\dots$
16) $\text{Cos}: s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \frac{s^8}{53760} \dots$	$\dots\dots$
17) $\text{Sin}: s = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} + \frac{s^9}{483840}$	$\dots\dots$
u. s. w.	

Interessant ist die Bemerkung, daß die hier auf einem ganz neuem Wege aus einander entwickelten Formeln, allmählig jenen 2 allgemein bekannten unendlichen Reihen näher rücken, deren man sich bisher (für sehr kleine Werthe von s) bediente, nemlich den Reihen

$$\text{Sin}: s = s - \frac{s^3}{2 \cdot 3} + \frac{s^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots\dots$$

und

$$\text{Cos}: s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{s^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \dots\dots$$

Es versteht sich, daß jede der obigen Gleichungen 12,14,16.... zugleich auch den Ausdruck gebe für $\mathrm{Sin}:\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$, in soferne $\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$ nicht $>90^\circ$ und nicht $<45^\circ$ ist, u. s. w. Setzen wir daher

$$\frac{\pi}{2}-s=S, \text{ also } s=\frac{\pi}{2}-S,$$

so haben wir [so lange S innerhalb der Grenzen 45° und 90° bleibt]

$$\text{z. B. } \mathrm{Sin}:\ S=1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-S\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-S\right)^4}{32} \text{ u. s. w.}$$

Uebrigens ist nicht zu vergessen, daß alle die Formeln, bei ihrer Anwendung, den ihnen entsprechenden transzendenten Charakter annehmen müssen; es ist nemlich $\mathrm{Cos}:\ s=\mathrm{Cos}\,(m\,\pi\pm s)$ und $-\mathrm{Cos}:\ s=\mathrm{Cos}\,(n\,\pi\pm s)$, worinn $m=$ $=0,2,4,6,8,\ldots$, und $n=1,3,5,\ldots$; eben so ist $\mathrm{Sin}:\ S=\mathrm{Sin}\,(m\pi+S)=$ $=\mathrm{Sin}\,(n\,\pi-S)$, und $-\mathrm{Sin}\ S=\mathrm{Sin}:\,(m\,\pi-S)=\mathrm{Sin}\,(n\,\pi+S)$.

Anwendung der gefundenen trigonometrischen Formeln auf die Integralrechnung.

Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = C + \frac{1}{a} \text{ Arc: Tang: } \frac{x}{a} = C + \frac{1}{a}.$$

$$\text{Arc: Cos: } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right);$$ also ist [Gleichung 4 und 5].

$$16) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = C + \frac{1}{a} \left(m\pi \pm 0{,}3351851 \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(4 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \right),$$

so lange das positive $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ innerhalb — 0,7071068 und — 1 liegt, oder

$$= C + \frac{1}{a} \left(m . \pi \pm 1{,}5707963 \mp 0{,}3351851 . \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \times \left(4 - \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right),$$

so lange das positive $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ innerhalb

0,7071068 und 0, so wie das negative $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ innerhalb $-$ 0,7071068 und 0 liegt.

Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{a^2 + 2bx + x^2} = [\text{wenn } a^2 > b^2] = C + \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ Arc: Tang: } \frac{b + x}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = C + \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \text{. Arc: Cos: } \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}};$$

also ist [Gleichung 4 und 5]

$$17) \int \frac{dx}{a^2 + 2bx + x^2} = C + \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \left(m \,.\, \pi \pm 0{,}3351851 \left(\frac{b + x}{(a^2 + 2bx + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \left(4 - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}}\right)\right),$$

so lange das positive $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}}$ innerhalb $-$ 0,7071068 und $-$ 1 liegt, oder $= C +$

$$+ \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \left(m. \pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \times \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}} \left(4 - \frac{b + x}{\sqrt{a^2 + 2bx + x^2}}\right)\right),$$

so lange das positive $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}}$

innerhalb 0,7071068 und 0, so wie das negative $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2bx + x^2}}$ innerhalb — 0,7071068 und 0 liegt.

Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = C + \text{Arc: Sin: } \frac{x}{a} = C + \text{Arc: Cos: } \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\text{,}$$ also ist [Gleichung 4 und 5]

18) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = C + m.\pi \pm 0{,}3351851 . \frac{x}{a} \left(4 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right),$$

so lange das positive $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ innerhalb — 0,7071068 und — 1 liegt, oder $= C + m.\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(4 - \frac{x}{a}\right)$, so lange das positive $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ innerhalb 0,7071068 und 0, so wie das negative $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ innerhalb — 0,7071068 und 0 liegt.

Bekanntlich ist

$$\int - \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = C + \text{Arc: Cos: } \frac{x}{a}\text{,}$$ also [Gleichung 4 und 5.]

19) $\int - \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ u. s. w. welches leicht zu finden ist.

Bekanntlich ist

$$\int \frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = C + \text{Arc: Cos: } \frac{a}{x}\text{,}$$ also ist [Gleichung 4 und 5]

20) $\int \frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = C + m\pi \pm 0{,}3351851 \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}(4x - a)$,

so lange das positive $\frac{a}{x}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\frac{a}{x}$ innerhalb — 0,7071068 und — 1 liegt, oder $= C + m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \cdot \frac{a}{x^2} \cdot \left(4x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$, so lange das positive $\frac{a}{x}$ innerhalb 0,7071068 und 0, so wie das negative $\frac{a}{x}$ innerhalb — 0,7071068 und 0 liegt.

Bekanntlich ist

$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = C + \text{Arc} : \text{Cos} : \left(\frac{a-x}{a}\right)$, also ist [Gleichung 4 und 5]

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = C + m\pi \pm 0{,}3351851 \cdot \frac{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}(3a + x)}{a^2}$

so lange das positive $\frac{a-x}{a}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\frac{a-x}{a}$ innerhalb — 0,7071068 und — liegt, oder $= C + m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \cdot \frac{(a-x)\left(4a - (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{a^2}$, so lange das positive $\frac{a-x}{a}$ innerhalb 0,7071068 und 0, so wie das negative $\frac{a-x}{a}$ innerhalb — — 0,7071068 und 0 liegt.

Bekanntlich ist

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = C + \text{Arc} : \text{Sin}\, x = C + \text{Arc} : \text{Cos} : \sqrt{1 - x^2}$, also ist [Gleichung 4 und 5]

$$22)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + m\pi \pm 0{,}3351851 \,.\, x \left(4 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right),$$

so lange das positive $\sqrt{1-x^2}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\sqrt{1-x^2}$ innerhalb — 0,7071068 und — 1 liegt, oder $= C + m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\ (4-x)$, so lange das positive $\sqrt{1-x^2}$ innerhalb 0,7071068 und 0, so wie das negative $\sqrt{1-x^2}$ innerhalb — 0,7071068 und 0 liegt.

Da nun bekanntlich

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\ \text{Arc: Sin:}\ x - \frac{1}{2}\ x \,.\, z,$$ ferner

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\ \text{Arc: Sin:}\ x - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\ x\,.\,z - \frac{1}{4}\,.\,x^3 z,$$

ferner $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\ \text{Arc: Sin:}\ x - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\ x\,.\,z,$ ferner

$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\ \text{Arc: Sin:}\ x - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,.\,x\,.\,z - \frac{1\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,6\,.\,8}\ x^3\,.\,z - \frac{1\,.\,7}{6\,.\,8}\ x^5\,z - \frac{1}{8}\ x^7\,.\,z,$$ u. s. w.,

worinn $z = \sqrt{1-x^2}$ gesetzt wurde, so lassen sich obige Integralausdrücke auf ähnliche Art ausdrücken (als Gleichung 22).

Bekanntlich ist

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = C + \text{Arc: Cos:}\ \frac{1}{x},$$ also ist [Gleichung 4 und 5]

$$25)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = C + m\pi \pm 0{,}3351851\,.\,\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\ (4x-1)}{x^2},$$

so lange das positive $\frac{1}{x}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\frac{1}{x}$

innerhalb $-0{,}7071068$ und -1 liegt, oder $= C + m\pi \pm 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851 \cdot \frac{\left(4x - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)}{x^2}$ so lange das positive $\frac{1}{x}$ innerhalb $0{,}7071068$ und 0, so wie das negative $\frac{1}{x}$ innerhalb $-0{,}7071068$ und 0 liegt.

Da bekanntlich

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} = C + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{x^2} + \frac{1}{2} \text{ Arc: Cos: } \frac{1}{x}, \text{ ferner}$$

$$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} = C + \frac{1}{4} \frac{u}{x^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{u}{x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

Arc: Cos: $\frac{1}{x}$, u. s. w., worinn $u = \sqrt{x - 1}$ bedeutet, so lassen sich alle diese Ausdrücke (nach Gleichung 4 und 5) aproximative auch algebraisch angeben.

Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} = N - \text{Arc: Cos: } \left(\frac{x - b}{\sqrt{a + b^2}}\right),$$ also ist [Gleichung 4 und 5]

24) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} = N - m\pi \mp 0{,}3351851 \times$$
$$\times \frac{\left(a + 2bx - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(4 \left(a + b^2\right)^{\frac{1}{2}} - x + b\right)}{\left(a + b^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

so lange das positive $\frac{x - b}{\sqrt{a + b^2}}$ innerhalb $0{,}7071068$ und 1, so wie das negative $\frac{x - b}{\sqrt{a + b^2}}$ innerhalb $-0{,}7071068$ und -1 liegt, oder $= N - m\pi$ $\mp 1{,}57079633 \pm 0{,}3351851 \times \left(\frac{x - b}{a + b^2}\right) \left(4 (a + b^2)^{\frac{1}{2}} -\right.$

$-(a+2bx-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big)$, so lange das positive $\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}$ innerhalb 0,7071068 und o, so wie das negative $\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}$ innerhalb $-$ 0,7071068 und o liegt.

Bekanntlich ist

$\int \frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2+2bx-a^2}} = C + \text{Arc: Cos:}\left(\frac{a^2-bx}{x\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, also ist [Gleichung 4 und 5].

$$25)\ \int \frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2+2bx-a^2}} = C + m\pi \pm 0{,}3351851 \times$$

$$\times \frac{\left(a^2x^2+2a^2bx-a^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(4x\sqrt{a^2+b^2}-a^2+bx\right)}{x^2(a^2+b^2)},$$

so lange das positive $\frac{a^2-bx}{x\sqrt{a^2+b^2}}$ innerhalb 0,7071068 und 1, so wie das negative $\frac{a^2-bx}{x\sqrt{a^2+b^2}}$ innerhalb $-$ 0,7071068 und $-$ 1 liegt, oder $= C + m\pi \pm$ $\pm\ 1{,}57079633 \mp 0{,}3351851$.

$$\cdot\frac{\left(a^2-bx\right)\left(4x\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(a^2x^2+2a^2bx-a^4\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{x^2\left(a^2+b^2\right)}$$

so lange das positive $\frac{a^2-bx}{x\sqrt{a^2+b^2}}$ innerhalb 0,7071068 und o, so wie das negative $\frac{a^2-bx}{x\sqrt{a^2+b^2}}$ innerhalb $-$ 0,7071068 und o liegt.

Bekanntlich ist

$\int dx\,\text{Cos}\,x = \text{Sin}\,x$, $\int -dx\,\text{Sin}\,x = \text{Cos}\,x$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang:}\,x$,

$\int \frac{-dx}{\mathrm{Sin}^2\, x} = \mathrm{Cotang}:\; x$, $\int \frac{dx\, \mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cos}^2\, x} = \mathrm{Sec}:\; x$, $\int \frac{-dx\, \mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Sin}^2\, x} =$
$= \mathrm{Cosec}:\; x$, u. s. w.; alle diese Ausdrücke, auf den Sinus und Cosinus reduzirt, geben also algebraisch ausgedrückte Resultate. [Gleichung 12, 13, u. s. w.]

Bekanntlich ist

$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi\, \mathrm{Cos}\, \varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\, \mathrm{Cos}\, \varphi + \mathrm{Sin}\, \varphi)}{1 + \alpha^2}$ [α konstant, und e die Basis der natürlichen Logarithmen], also [Gleichung 13 und 14]

$$26)\; \int e^{\alpha\varphi} d\varphi\, \mathrm{Cos}\, \varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\left(\alpha + \varphi - \alpha.\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{6} + \alpha.\frac{\varphi^4}{24} + \frac{\varphi^5}{160} - \alpha.\frac{\varphi^6}{960}\right)}{1 + \alpha}$$

so lange φ innerhalb 0 und 0,78539816 liegt, oder =

$$= \frac{e^{\alpha\varphi}\left(1 + \alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2}{2} - \alpha\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^4}{24} + \alpha\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^5}{160} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^6}{960}\right)}{1 + \alpha^2}$$

so lange φ innerhalb 0,78539816 und 1,57079633 liegt.

Anwendung der gefundenen trigonometrischen Ausdrücke auf die Integralformel eines einzelnen Falles aus der analytischen Dynamik, nemlich aus der Theorie der Hammerwerke.

Die Hämmer theilen sich vorzüglich in Aufwurfhämmer und Schwanzhämmer, deren dynamische Berechnungen vorzüglich auf der Theorie des Stosses beruhen.

Es ist bei Hammerwerken sehr wichtig, daß die Schläge schnell auf einander folgen, theils da sie nur in so lange wirksam sind, als das Eisen noch weich ist, theils auch weil ein langsames Schmieden allemal mit einem beträchtlichen Abgange verbunden ist, indem die Oberfläche des glühenden Eisens sich mit dem Oxygen aus der atmosphärischen Luft verbindet, wodurch der Hammerschlag entsteht. Diese Schnelligkeit der Hammerschläge wird erreicht durch ein tieferes Einfallen des Aufschlagewassers, oder besser durch Vorgelege; ferner auch durch den über dem Hammer angebrachten Prellbalken, welche Vorrichtung aber mit dem Ruin des Hammergerüstes und wegen der unvollkommenen Elasticität des Prellbalkens mit einem Verluste an ökonomischem Effekte verbunden ist. Weit besser wird dieser Endzweck durch die in England üblichen Kratschhämmer erreicht, wobei ohne die Flughöhe zu vermindern die Kürze des Schlags dadurch erreicht wird, daß der Schwerpunkt des Hammerhelms, der ein einziger Klumpen ist, sehr nahe an der Hammerhülse zu stehen kömmt, und das Gewicht des Hammerkopes gegen jenes des Hammerhelms unbedeutend ist.

Wir wollen diesen wichtigen Gegenstand der analytischen Mechanik hier etwas ausführlicher behandeln.

Der Halbmesser des Rades am Hammerwerke sey = a; die an der Peripherie dieses Rades, nach der Tangente, wirkende beständige Kraft sey = P *).

An der Welle des Rades sind Daumen angebracht, welche am hintersten Ende des Schwanzhammers (dessen hypomochlium in der Hammerhülse ist) anstossen, und dadurch den Hammerkopf in die Höhe werfen.

Es ist offenbar, daß die zwischen dem Daumen und dem Ende des Hammerhelms wirksame Kraft während dem Stosse (die während dem Zeitelemente dt den Druck K ausübt) die freie Bewegung des Rades verzögert, den Hammer dagegen beschleunigt.

Sey b der Wellenhalbmesser; ferner, Mm^2 die Summe aller sich auf die Wellenaxe beziehenden Trägheitsmomente; heiße ferner W die Winkelgeschwindigkeit des Rades am Ende jener Zeit t, welche hier vom Anfange der Berührung des Daumens mit dem Hammerhelme an gemessen wird; ist ferner der Winkel, welcher binnen der Zeit t beschrieben wurde =

$$= \,, \text{ so ist } \varphi \frac{Kb - Pa}{Mm^2} = - \frac{W\,dW}{2g\,.\,d\varphi},$$

worinn g die Beschleunigung der Schwere ist. War endlich C die Winkel-Geschwindigkeit, womit der Daumen beim Anfange des Stosses anlangte, so ist

$$\int \left(\frac{K\,b\,d\,\varphi}{M\,m^2}\right) - \frac{P\,a\,\varphi}{M\,m^2} = \frac{C^2 - W^2}{4\,g}, \text{ und hieraus,}$$

$$\int (K.b\,d\,\varphi) \text{ oder } F\,(\varphi) = M\,m^2 \left(\frac{C^2 - W^2}{4\,g}\right) + P\,a\,\varphi;$$

also ist am Ende des Stosses $\int k\,b\,d\,\varphi$, worinn $\varphi = \varphi'$ gesetzt wird, oder

*) Ist P die Kraft des Wassers bei einem ober- oder unterschlächtigen Rade, so kann approximative P nur dann als beständig betrachtet werden, wenn das Rad fast gleichförmig läuft, welches vorzüglich durch Schwungräder ..... begünstigt wird.

$F(\varphi') = M m^2 \left(\frac{C^2 - W'^2}{4g}\right) + P a \varphi'$ [wenn am Ende des Stoſſes $\varphi = \varphi'$ und $W = W'$].

Man bemerke, daß der Stoß nicht nothwendig jenen ganzen Raum hindurch dauern müſſe, über den die Endpunkte des Daumens und Helms einander dann berühren würden, wenn sie nur übereinander fortgeschoben würden. Das Auslassen bezieht sich hier auf jenen Augenblick, wo der Daumen aufhört den Helm zu berühren, wenn er ihn gleich beim bloßen Fortschieben, noch fernerhin berühren könnte.

Sobald der Daumen den Hammerhelm ausläßt, so beschleunigt die Kraft P die ganze, um die Wellenaxe zu bewegende Masse, bis zu dem Angriffe des folgenden Daumens; denn in dieser Zwischenzeit hat P bloß die Trägheit dieser Masse zu überwältigen, und ertheilt ihr während dieser Zeit so viel an Winkel-Geschwindigkeit, daß der Daumen zum folgenden Angriffe abermals mit der Winkel-Geschwindigkeit C anlangt; vorausgesetzt, daß die Maschine schon im Beharrungsstande ist, daß nemlich alle Hebedaumen mit einerlei Winkel-Geschwindigkeit zur Berührung des Hammerhelms gelangen.

Wird (vom Auslassen des Daumens an gemessen) binnen der Zeit τ ein Winkel ψ beschrieben, und besteht am Ende der Zeit τ die Winkel-Geschwindigkeit u, so ist:

$\frac{u\,du}{2g} = \frac{P a}{M m^2} \cdot d\psi$, also $\frac{u^2}{4g} + D = \frac{P a}{M m^2} \cdot \psi$; und da für $\psi = 0$ zugleich $u = W'$ ist, so ist $D = -\frac{W'^2}{4g}$, also $\frac{u^2 - W'^2}{4g} = \frac{P a}{M m^2} \cdot \psi$. Ist daher ψ' der beschriebene Winkel bis zum nächsten Angriffe, so besteht dann Beharrungsstand, wenn für $\psi = \psi'$, zugleich $u = C$ wird, also wenn

$$\frac{C^2 - W'^2}{4g} = \frac{P a}{M m^2} \cdot \psi' \text{ ist.}$$

Unter der Voraussetzung des Beharrungsstandes, ist

$$P a (\varphi' + \psi') = F(\varphi').$$

Denn $F(\varphi') = M m^2 \left(\frac{C^2 - W'^2}{4g}\right) + P a . \varphi'$, oder $P a . \varphi' = F(\varphi') - M m^2 \left(\frac{C^2 - W'^2}{4g}\right)$, ferner $P a . \psi' = M m^2 \left(\frac{C^2 - W'^2}{4g}\right)$, also $P a (\varphi' + \psi') = F(\varphi')$.

Setzen wir des Hammerkopfes Gewicht, sammt dem auf den Schwerpunkt des Hammerkopfs reduzirten Gewichte des Helms $= Q$, die Abstände des Kopfs und des Stoßpunktes (am Helme) von der Hülse $= q$ und f; ferner des Hammers Winkel-Geschmeidigkeit am Ende der Zeit $t = U$, und den Winkel, den er während der Zeit t beschreibt $= \omega$ (Zeit t und Winkel ω werden gemessen vom ersten Augenblicke eines Angriffes an, und beziehen sich bloß auf die Dauer dieses Angriffes) so ist

$\frac{K f - Q q}{N n^2} = \frac{U d U}{2 g d\omega}$, [$N n^2$ Trägheitsmoment des ganzen Hammers sammt Helm um die Hülse] folglich

$\int K f d\omega = \frac{N n^2 . U^2}{4g} + Q . q . \omega$. zuzusetzen ist hier keine konstante Größe, indem der Hammer seine Bewegung immer von der Ruhe anfängt.

Wenn der Daumen ausläßt, nemlich am Ende des Stosses, ist

$\frac{N n^2 . U'^2}{4g} + Q q \omega' = \int K f d\omega$ *), worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird. Da nun $P a (\varphi' + \psi') = \int K b d\varphi$, worinn $\varphi = \varphi'$ gesetzt wird, und $\int K b d\varphi$, worinn $\varphi = \varphi'$ gesetzt wird, $= \int K f d\omega$, worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird, ist **),

*) $\int K f d\omega$ als eine Funktion von ω setzen wir $= \lambda(\omega)$, so heißt $\int K f d\omega$, worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird, so viel, als $\lambda(\omega)$, worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird, oder so viel als $\lambda(\omega')$.

**) Der Grund der Behauptung, $\int K b d\varphi$, worinn $\varphi = \varphi'$ gesetzt wird, $= \int K f d\omega$, worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird, ist folgender: $\int K b d\varphi$, worinn $\varphi = \varphi'$ gesetzt wird, ist der Ausdruck des Kraftaufwandes, womit der Stoßpunkt

so ist $P \cdot a(\varphi' + \psi') = \frac{N n^2 \cdot W'^2}{4g} + Q q \cdot \omega'$. Es ist aber $a(\varphi' + \psi')$ der Weg des Angriffpunktes der Kraft P, von einem Angriffe bis zum folgenden, den wir den Bogen R L nennen, also ist

$P \cdot R L = \frac{N n^2 \cdot U'^2}{4g} + Q q \cdot \omega'$. Kann man ohne merklichen Fehler $N n^2 = Q \cdot q^2$ setzen, so ist $P \cdot R L = Q q^2 \cdot \frac{U'^2}{4g} + Q \cdot q \cdot \omega'$, oder $P \cdot R L = Q\left(\frac{q^2 \cdot U'^2}{4g} + q\,\omega'\right)$. Da hier $\frac{q^2\,U'^2}{4g}$ die Höhe ist, auf welche der Hammerkopf, bis zur Tilgung seiner Geschwindigkeit $q\,U'$, auffliegt (wenn der Kopf an keinen Prellbalken stößt), da ferner $q\,\omega'$ der sehr kleine Raum ist, welchen der Kopf binnen der Dauer t' des Stosses (zwischen Daumen und Helm im Stoßpunkte) durchläuft, so darf man näherungsweise setzen:

$P \cdot R L = Q \cdot \frac{q^2\,U'^2}{4g}$. Setzen wir demnach die Flughöhe des Kopfs bei jedem Schlage $= H$, so können wir sagen,

$$P \cdot R L = Q \cdot H.$$

Ist die Anzahl der Hammerschläge während einer Rotation des Rades $= m$, so ist die hiezu nöthige Kraft an der Radperipherie (nach der Tangente des Rades)

$$P = \frac{m \cdot Q \cdot H}{2 a \pi}.^{*)}$$

---

des Daumens, auf den Stoßpunkt des Helms, binnen der Dauer des Stosses, nemlich binnen der Zeit t', einwirkte. Eben so ist $\int K f d\omega$, worinn $\omega = \omega'$ gesetzt wird, der Ausdruck des Kraftaufwandes, womit der Stoßpunkt des Helms, die Einwirkung des Stoßpunktes am Daumen binnen derselben Zeit t' erwiederte. Nun ist aber die Gegenwirkung gleich der Wirkung, wenn beide auf einerlei Zeit bezogen werden.

*) Weit schneller führt zu diesem Resultate mein dynamischer Lehrsatz, wie ich dieß umständlicher in meiner weitern Entwicklung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten §: 48 zeige.

Die Zeit eines Schlages wollen wir eintheilen in 3 Theile, t, t, t, nemlich: in die Zeit des Auffliegens, des Fallens, und des Liegenbleibens. Daß man für's Liegenbleiben auch eine Zeit lassen müsse, ist einleuchtend, da sonst der Hammer bei einem um etwas größern Aufzuge der Schütze, oder bei einer etwas größern Geschwindigkeit des Rades, das Eisen gar nicht erreichen würde.

Um die Zeit eines Schlages abzukürzen, läßt man gewöhnlich den Hammer nicht zu der ganzen Höhe H steigen, zu der, vermög der ihm von dem Daumen mitgetheilten Geschwindigkeit, er steigen würde; sondern bringt in einer Höhe, $h < H$, einen Prellbalken an, damit der Hammer im Auffliegen daran stosse, und so desto eher wieder zurückfalle. Dürfte man den Prellbalken als vollkommen elastisch annehmen, so hätte der Kopf dieselbe Endesgeschwindigkeit, wenn er auf den Ambos herabfällt, als wenn er seine ganze Höhe H erreicht hätte, dann würde also der Prellbalken der Stärke des Schlages nichts rauben. Allein diese Voraussetzung findet in der Ausübung nicht statt.

Es ist $P.R.L$ oder $P.C.3t = Q.H$, wo C die mittlere Geschwindigkeit der Radperipherie bedeutet. Ferner ist

$$t = \sqrt{\frac{H}{g}} - \sqrt{\frac{H-h}{g}}$$; denn würde der Hammer zu der ganzen Höhe H steigen, so brauchte er hiezu die Zeit =

$$= \sqrt{\frac{H}{g}}$$; nun steigt er aber nur bis auf die Höhe h, also ist die Zeit seines Aufsteigens t nur

$$= \sqrt{\frac{H}{g}} - \sqrt{\frac{H-h}{g}}, \text{ woraus}$$

$$H = \frac{(h + gt^2)^2}{4gt^2}, \text{ folglich}$$

$$3P.C.t = Q.\frac{(h + gt^2)^2}{4gt^2} \text{ ist.}$$

Man sieht leicht ein, daß das im vorhergehenden Gesagte, nicht bloß von Schwanzhämmern, sondern auch von den Aufwurfhämmern gelte. Bei diesen letztern besteht der wesentliche Vortheil, daß die Hammerhülse ungleich weniger leidet. Daher sollen, in der Regel, nur **leichte** Hämmer, z. B. Zainhämmer, als Schwanzhämmer getrieben werden, hingegen **schwere** Hämmer als Aufwurfhämmer.

Es wurde früher gesagt, daß man sich, um die erforderliche Kürze des Schlags bei Hammerwerken zu erhalten, des Prellbalkens bediene, durch welchen der Hammerkopf gehindert wird, seine volle Flughöhe zu erreichen, und daher gezwungen wird, in kürzerer Zeit wieder auf den Ambos zurück zu fallen. Allein dieß Mittel führt zwei wesentliche Nachtheile mit sich; denn erstens geht, wegen der **unvollkommenen** Elastizität des Prellbalkens, ein beträchtlicher Theil des ökonomischen Effekts verloren; und zweitens ist das fortwährende heftige Stossen des Hammers an den Prellbalken, mit dem Zugrunderichten des Hammergerüstes verbunden. Wir wollen demnach hier zeigen, wie man bei einerlei Flughöhe, und einerlei mechanischem Momente der Arbeit, die Schlagzeit abkürzen könne, ohne eines Prellbalkens zu bedürfen; indem man nemlich das Gewicht des ganzen Hammers auf eine eigene Weise vertheilt. Die mathematische Analyse, verbunden mit den Grundsätzen der höhern Dynamik, mögen uns hierüber Aufschluß ertheilen.

Wir bestimmen hier vorläufig folgende Bezeichnungen: Der Hammer bestehe aus dem Hammerkopfe, einem prismatischen Hammerhelme, der Hammerhülse, und einer am Hammerhelme angebrachten Masse, z. B. einem Eisenklumpen, zwischen der Hammerhülse und dem Hammerkopfe. Wir bezeichnen das Gewicht dieser Masse durch B, das Gewicht des Hammerkopfes durch C, den Abstand der Masse B von der Hülse durch a, den Abstand des Hammerkopfes von der Hülse, d. h. die Länge des Hammerhelms durch l; ferner, den Querschnitt des Helms (senkrecht durch dessen Axe) durch q, und das Gewicht der kubischen Einheit jener Masse, woraus der Hammerhelm besteht, durch γ. Der, binnen irgend einer Zeit t, vom Hammerhelme um die Hammerhülse beschriebene Bogen sey $= \varphi$, und es bestehe am Ende jener Zeit t, und dieses beschriebenen Bogens φ, die Winkel-Geschwindigkeit $=$ w. Die Summe der Trägheitsmomente, der sich um die Hammerhülse (als Umdrehungsaxe betrachtet) bewegenden Masse ist $=$

$= \frac{\gamma . q}{3} . l^3 + a^2 B + l^2 C$. Die am Ende der Zeit t bestehende Summe der statischen Momente, welche auf die Hammerhülse (als Umdrehungsaxe) bezogen wird, ist $= \frac{\gamma . q}{2} \text{Cos}\, \varphi . l^2 + a . B . \text{Cos}\, \varphi + l . C . \text{Cos}\, \varphi$. Das mechanische Moment der Kraft (z. B. an der Peripherie des Wasserrades), bezogen auf die Dauer eines mechanischen Cyclus, nemlich vom Angriffe eines Daumens bis zum nächsten Angriffe des folgenden Daumens, setzen wir $= M$. Der Bogen, welchen der Hammer bis zu seiner vollen ungehinderten Flughöhe beschreibt, das heißt, der größte Werth von φ, werde durch f bezeichnet. Das mechanische Moment des Widerstandes, nemlich des Auffliegens des Hammers, bezogen auf die ganze Dauer dieses Auffliegens, nemlich vom Amboße an, bis zu der vollen ungehinderten Flughöhe, welche dem Bogen f entspricht, dieß mechanische Moment der totalen verrichteten Arbeit ist

$$= \frac{\gamma . q . \text{Sin}\, f}{2} . l^2 + B . a . \text{Sin}\, f + C . l . \text{Sin}\, f.$$

Es ist

$$\frac{wdw}{2g} = - \frac{\left(\frac{\gamma q}{2} l^2 + a . B . + l . C\right) \text{Cos}\, \varphi\, d\, \varphi}{\frac{\gamma . g}{3} . l^3 + a^2 B + l^2 C}$$

also ist (mit abgekürzten Ausdrücken)

$\frac{c^2 - w^2}{4g} = \frac{A}{D} . \text{Sin}\, \varphi$, worinn c die anfängliche Aufflugsgeschwindigkeit ist. Wenn $\varphi = f$ wird, so wird $w = o$, also haben wir

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{A}{D} . \text{Sin}\, f.$$ Es ist aber

$$\frac{\gamma\, q\, l^2 . \text{Sin}\, f}{2} + B . a . \text{Sin}\, f + C . l . \text{Sin}\, f = M, \text{ also}$$

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{A}{D} . \frac{M}{\frac{\gamma . q . l^2}{2} + B . a + C . l}, \text{ folglich ist}$$

$$w^2 = \frac{4 g . A . M}{D \left(\frac{\gamma . q . l^2}{2} + B . a + C . l\right)} - \frac{4 g A}{D} . \text{Sin}\, \varphi, \text{ oder abgekürzt:}$$

$w = (K - N. \operatorname{Sin} \varphi)^{\frac{1}{2}}$, und, da $d\varphi = w\,dt$ ist, $t =$

$$= \int \frac{d\varphi}{(K - N \operatorname{Sin} \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da wir annehmen können, es werde φ nie sehr groß, so setzen wir $\operatorname{Sin} \varphi = \varphi$, und erhalten hiedurch

$$t = \frac{2}{N}\left(K^{\frac{1}{2}} - (K - N\varphi)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Nennen wir die Dauer des Auffliegens $= t'$, so ist

$t' = \frac{2}{N}\left(K^{\frac{1}{2}} - N. f)^{\frac{1}{2}}\right)$, oder, da wir $f = \operatorname{Sin} f$ setzen dürfen,

$$t' = \frac{\left(\frac{\gamma . q . l}{3} + a^2 B + l^2 C\right)^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma q l^2}{2} + a B + l C\right)}.$$

Für das Herabfallen besteht die Gleichung:

$$\frac{dw}{2g\,dt} = \frac{w\,dw}{2g . d(f - \varphi)} = - \frac{w . dw}{2g . d\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{\gamma . q . \operatorname{Cos} \varphi}{2} l^2 + a . B . \operatorname{Cos} \varphi + l . C . \operatorname{Cos} \varphi}{\frac{\gamma . q . l^3}{3} + a^2 B + l^2 C.}$$, woraus folgt:

$$\frac{w^2}{4g} = \frac{\left(\frac{\gamma q l^2}{2} + a . B + l . C\right)}{\frac{\gamma . q . l^3}{3.} + a^2 B + l^2 C} (f - \varphi).$$

Nun ist

$$d(f - \varphi) = w\,dt, \text{ also } w = - \frac{d\varphi}{dt}, \text{ folglich:}$$

$$t = \frac{\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l^3}{3} + a^2 B + l^2 C\right)^{\frac{1}{2}} (f - \varphi)^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma\, q\, l^2}{2} + a B + l C\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nennen wir die Dauer des Herabfallens $= t''$, so ist

$$t'' = \frac{\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l^3}{3} + a^2 B + l^2 C\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l^2}{2} + a \cdot B + l \cdot C\right)}.$$

Es ist demnach die Dauer des Auffliegens und Herabfallens

$$= t' + t'' = 2\, \frac{\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l^3}{3} + a^2 B + l^2 C\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l^2}{2} + a \cdot B + l \cdot C\right)}.$$

Daß dieser Ausdruck einen kleinen Werth erhalte, das heißt, daß der Schlag kurz ausfalle, wenn kein Prellbalken verwendet wird, hängt (bei übrigens gegebenen Größen) davon ab, was a für einen Werth erhält. Es wird nemlich der Schlag am kürzesten, wenn

$$a = \frac{\left(\frac{\gamma \cdot q \cdot l}{3} + C\right) \cdot l}{\frac{\gamma \cdot q \cdot l}{2} + C} \text{ wird,}$$

wenn also die Masse B näher an die Hülse als der Hammerkopf zu liegen kömmt.

Setzen wir $l = 1$, so ist der Ausdruck, von dem die Dauer des Schlags bei gegebenem mechanischen Momente M abhängt

$$= \frac{\left(\frac{\gamma\, q}{3} + a^2 B + C\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\gamma\, q}{2} + a B + C};$$

und a ist dann für die kürzeste Dauer des Schlages

$$= \frac{\frac{\gamma q}{3} + C}{\frac{\gamma q}{2} + C}.$$ Hieraus läßt sich nun leicht zeigen, daß die Kürze des Schlages befördert werde, wenn man die Masse B vergrößert. Denn, ist C gegen γq beträchtlich groß, so ist a beinahe $= 1$, und unser Ausdruck

$$= \frac{1}{(B + C)^{\frac{1}{2}}};$$ ist hingegen C gegen γq sehr klein, so ist a beinahe $= \frac{2}{3}$, und unser Ausdruck beinahe

$$= \frac{1}{2\,(3\gamma q + 4B)^{\frac{1}{2}}}.$$ In beiden Fällen wird unser Ausdruck kleiner, wenn B zunimmt.

Die Dauer des Schlages wird in beiden Fällen (die überdieß einerlei mechanischem Momente der Arbeit entsprechen) gleich groß, wenn das B, im zweiten Falle, das wir $= B'$ setzen, jenen Werth hat, wodurch

$$(B + C)^{\frac{1}{2}} = 2\,(3\gamma q + 4B')^{\frac{1}{2}}$$

wird, wenn also

$$B' = \frac{B + C}{16} - \frac{3}{4}.\gamma.q.$$ ist. Dann ist aber im ersten Falle die Flughöhe

$$f = \frac{M}{\frac{\gamma q}{2} + Ba + C} = \frac{M}{B + C},$$ im zweiten Falle hingegen

$$f = \frac{M}{\frac{\gamma q}{2} + B'a + C'} =$$

$$\frac{M}{\frac{\gamma q}{2} + \frac{2}{3}.B'} = \frac{24.M}{B + C}.$$

Es wird also, bei einerlei mechanischem Momente der Arbeit, und bei einerlei Dauer des Schlages, die Flughöhe im zweiten Falle größer als im ersten. Daher besteht der Satz: Eine beträchtlichere Flughöhe, verbunden mit einer kurzen Dauer des Schlags, wird erhalten, wenn man das Gewicht des Hammerkopfs möglichst vermindert; hingegen jenes der Masse B erwähntermassen vermehrt, und B nach der Hammerhülse hin nähert, und zwar beinahe so weit, daß B von der Hammerhülse um $\frac{2}{3}$ jenes Abstandes entfernt sey, um welchen Abstand der Hammerkopf von der Hülse entfernt ist.

Bei der hier entwickelten Rechnung ward angenommen, es dürfe, da φ immer nur sehr klein sey, statt $\sin \varphi$ gesetzt werden φ. Genauer wären wir aber zu Werke gegangen, wenn wir in dem Ausdrucke

$\int \frac{d\varphi}{(K - N \sin \varphi)^{\frac{1}{2}}}$ den Ausdruck $\sin \varphi$ durch

$\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{160}$ (Gleichung 13) substituirt hätten, u. s. w.

Druckfehleranzeige.

Seite 7 Zeile 1 von oben gezählt, statt: $\frac{xm + 1}{m + 1}$ lese: $\frac{x^{m+1}}{m+1}$

— 36 — 18 — — ——, —: Klumpen ist, —: Klumpen Eisen ist,

— 37 — 15 — — ——, —: =, so ist φ —: = φ, so ist

— 40 — 1 — — ——, —: $\frac{Nn^2 . W'^2}{4g}$ —: $\frac{Nn^2 . U'^2}{4g}$

Auf das wiederholt ergangene Ansuchen um Zusendung von Programmen wird bemerkt, daß die vor dem Schuljahre 1892/93 erschienenen Programme **völlig vergriffen** sind.

XXXVIII.

Jahresbericht

des

k. II. deutschen Staats-Gymnasiums

in Brünn

für das Schuljahr 1908/09.

Inhalt:

1. Die Γ-Funktion für komplexe Argumente. (Fortsetzung.) Von Professor Dr. Georg Burggraf.
2. Schulnachrichten.

BRÜNN, 1909.

Druck von Ant. Kindl. — Verlag des k. k. II. deutschen Staats-Gymnasiums.

Programm-Abhandlungen

a) des vormaligen k. k. Real- und Ober-Gymnasiums:

1871—72. „Die Realgymnasien, ihr Wesen, ihr Zweck und ihr Ziel“ vom k. k. Direkt Dr. Josef Parthe.

1872—73. „Die wichtigeren Lehren von Raum und Zeit in der neueren Philosophie“ vo k. k. Gymnasiallehrer Dr. Moritz Grolig.

1873—74. „Über das Schwinden des naiven Anteiles aus der Bildung der Gegenwar vom k. k. Professor Dr. Moritz Grolig.

„Zur Methodik des Unterrichtes in der geometrischen Anschauungslehre“ vo k. k. Direktor Dr. Josef Parthe.

1874—75. „Theorie der elektromagnetischen Wirkung spiralförmiger Stromleiter“ vo k. k. Gymnasiallehrer Dr. Ignaz Wallentin.

1875—76. „Zum Gebrauche des griechischen Konjunktivs, insbesondere des Konjunkti Aoristi“ vom k. k. Professor Ignaz Rup. Kummerer.

1876—77. „Das Ende Kaiser Friedrichs I.“ vom k. k. Gymnasiallehrer Christop Würfl.

1877—78. „Quaestionum Nonnianarum pars I“ vom k. k. Gymnasiallehrer Dr. Au Scheindler.

b) des nunmehrigen k. k. II. deutschen Staats-Gymnasiums:

1878—79. „Zum Gebrauche des griechischen Optativs, insbesondere des Optativs Aorist vom k. k. Professor Ignaz Rup. Kummerer.

1879—80. „Prinzipien der Newtonischen Induktionsmethode“ vom k. k. Professor Johar Pajk.

1880—81. „Zum Gebrauche des griechischen Imperativs Aoristi“ vom k. k. Profess Ignaz Rup. Kummerer.

1881—82. „Grundzüge der wissenschaftlichen Forschung“ vom k. k. Professor Johar Pajk.

1882—83. „Ein Beitrag zur Kenntnis des Sprachgebrauchs Klopstocks“ vom k. k. Profess Christoph Würfl.

1883—84. „Ein Beitrag zur Kenntnis des Sprachgebrauchs Klopstocks“ (Fortsetzun vom k. k. Professor Christoph Würfl.

1884—85. „Ein Beitrag zur Kenntnis des Sprachgebrauchs Klopstocks“ (Schluß) vo k. k. Professor Christoph Würfl.

1885—86. „Zur Theorie der menschlichen Nachahmungen“. Psychologische Studie vo k. k. Professor Johann Pajk.

1886—87. „Zur Theorie der menschlichen Nachahmungen“ (Fortsetzung und Schlu vom k. k. Professor Johann Pajk.

1887—88. „Die Melodie der Sprache in den Gesängen Pindars“ vom k. k. Profess Wilhelm Perathoner.

1888—89. „Über den Gebrauch der Präpositionen bei Hesiod“ (II. T.) vom k. k. sup Gymnasiallehrer Dr. Franz Illek (I. T. s. Programm des Staa Gymnasiums in Mähr.-Trübau 1887—88).

1889—90. „Die Melodie der Sprache in den Gesängen Pindars“ (Fortsetzung) vom k. Professor Wilhelm Perathoner.

1890—91. „Eine Reise nach und durch Unterägypten“ vom k. k. wirklichen Lehr Albin Kocourek.

1891—92. „Die griechischen Lyriker und deren Verwertung im Gymnasial-Unterricht vom k. k. suppl. Lehrer Viktor Mattel.

1892—93. „Der homerische Gebrauch der Partikel εἰ. Εἰ mit dem Indikativ und Übe blick über die Formen der Bedingungssätze bei Homer“ vom k. Professor Gottfried Vogrinz.

(Fortsetzung rückwärts!)

Die Γ-Funktion für komplexes Argument.

(Fortsetzung.)

Bei Benützung der von Legendre gegebenen Integraldefinition:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1}\, dx$$

ist zu berücksichtigen, daß dieses bestimmte Integral nur dann eine eindeutige Funktion des Argumentes: $u = \alpha + i\beta$ definiert, wenn der reelle Teil von u:

$$\alpha > o;$$

denn, setzt man in obiger Definition: $u = \alpha + i\beta$, so ist

$$\Gamma(\alpha + i\beta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha + \beta i - 1}\, dx.$$

Zufolge der Gleichung: $x = e^{lx}$, wird nun

$$x^{\alpha - 1 + \beta i} = x^{\alpha - 1} e^{\beta i l x} = x^{\alpha - 1} e^{i l (x^\beta)}$$

und

$$x^{\alpha - 1} e^{i l (x^\beta)} = x^{\alpha - 1} \left[\cos\left[l(x)^\beta\right] + i \sin\left[l(x^\beta)\right] \right]$$

mit Verwendung der Moivreschen Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Es ist also $\Gamma(u)$ in der Form darstellbar:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} \left[\cos\left[l(x^\beta)\right] + i \sin\left[l(x^\beta)\right] \right] dx$$

oder:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} \cos\left[l(x^\beta)\right] dx + i \int_0^\infty e^{-x} . x^{\alpha - 1} \sin\left[l(x^\beta)\right] dx.$$

Da aber jedes der beiden Integrale auf der rechten Seite unserer letzten Gleichung nur unter der Bedingung: $\alpha > o$ besteht, so ist diese Bedingung auch jene für die Existenz der Funktion $\Gamma(u)$. Durch das Eulersche Integral zweiter Art wird also eine eindeutige Funktion nur für den Teil der Ebene dargestellt, welcher rechts von der imaginären Achse Oy liegt. Aus dieser Definition der Funktion $\Gamma(u)$ in der genannten Halbebene kann man nun die Existenz einer in der ganzen Ebene eindeutigen, analytischen Funktion ableiten, die mit $\Gamma(u)$ in deren Definitionsbereich übereinstimmt. Setzt man nämlich unter der Voraussetzung, daß ω eine reelle positive Größe ist:

$$\Gamma(u) = P(u) + Q(u)$$

und

$$P(u) = \int_0^\omega e^{-x} x^{u-1}\, dx, \quad Q(u) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{u-1}\, dx,$$

so zeigt es sich, daß $Q(u)$ in der ganzen Ebene eindeutig und stetig is während $P(u)$ auch nur für den reellen Teil von u:

$$\alpha > o$$

definiert ist. Entwickelt man aber in der Funktion $P(u)$ den Faktor e^{-} in eine Reihe, so nimmt $P(u)$ die Form an:

$$P(u) = \frac{\omega^u}{u} - \frac{\omega^{u+1}}{u+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{\omega^{u+2}}{u+2} - \ldots\ldots\ldots,$$

aus welcher hervorgeht, daß $P(u)$ für jeden Wert von u konvergiert, wen er nur von Null oder einer negativen ganzen Zahl verschieden ist. Dies Zerlegung der Funktion $\Gamma(u)$ in die beiden Funktionen $P(u)$ und $Q(u$ bildet den Ausgangspunkt der zweiten Methode zur Erweiterung der Γ-Funktio für komplexes Argument und rührt von Gasparis her, während Pryn aus dieser Zerlegung die bemerkenswertesten Folgerungen zieht. Letztere benützt in seiner im Crelleschen Journal für die reine und angewandt Mathematik Bd. 82 erschienenen Abhandlung, betitelt: „Zur Theorie de Γ-Funktion“ sowohl die von Gauß gegebene Produktdefinition, als auc die Legendresche Integraldefinition der Γ-Funktion, schließlich auch da von Weierstraß gefundene Ergebnis, daß $\Gamma(u)$ eine eindeutige Funktio der komplexen Veränderlichen u ist, die mit Ausnahme der Stellen: $y = 0$ $-1, -2, \ldots$, wo sie unendlich groß wird, und mit Ausschluß des unendlic fernen Punktes der Zahlenebene, in welchem sie eine Unstetigkeit der dritte Art aufweist, in der ganzen Ebene überall sonst stetig ist.

Es kann nun im Anschlusse an die von Gauß und Weierstra gegebene Definition von $\Gamma(u)$:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} P(u,n) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)\,n^u}{u\,(u+1)\ldots(u+n-1)},$$

wo dem n^u jener Wert der Reihe:

$$n^u = e^{u\,l\,n} = 1 + u\,l\,n + \frac{u^2}{2}\,l^2(n) + \ldots\ldots$$

beizulegen ist, welcher dem reell gewählten Logarithmus der positiven, ganze Zahl n entspricht, zunächst die Relation:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)$$

bewiesen werden für alle u mit Ausnahme der Werte: $u = 0, -1, -2, \ldots$ da für diese Werte $\Gamma(u)$ keine Bedeutung hat. Es ist nämlich:

$$P(u+1,n) = \frac{(n-1)\,n^{u+1}}{(u+1)\,(u+2)\ldots(u+n)} = \frac{(n-1)\,n^u}{u\,(u+1)\ldots(u+n-1)} \cdot \frac{u}{u+n}$$

$$P(u+1,n) = u\,P(u,n)\,\frac{1}{1+\frac{n}{u}},$$

$$\lim_{n=\infty} P(u+1,n) = u \lim_{n=\infty} P(u,n) \text{ oder}$$

$$\underline{\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u).}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser eben gefundenen Relation ergebe sich folgende Gleichungen:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)$$
$$\Gamma(u+2) = (u+1)\;\Gamma(u+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(u+n-1) = (u+n-2)\;\Gamma(u+n-2)$$
$$\Gamma(u+n) = (u+n-1)\;\Gamma(u+n-1),$$

leren Multiplikation mit einander zu dem Resultate führt, daß:

$$\Gamma(u+n) = u\,(u+1)\,(u+2)\ldots(u+n-1)\;\Gamma(u)$$

oder $$\frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = \frac{u\,(u+1)\ldots(u+n-1)}{(n-1)!\,n^u}\cdot\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u)}{P(u,n)}.$$

Daraus folgt wieder beim Übergang zur Grenze, daß

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = \frac{\Gamma(u)}{\lim\limits_{n=\infty} P(u,n)} = \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u)} = 1,$$

velche Relation für jedes endliche u gilt.

Die Verwandschaft der Funktion $\Gamma(u)$ mit den rationalen Funktionen ritt, trotzdem sie sich nicht wie jene in ein Produkt von linearen Faktoren nit den Exponenten ± 1 zerlegen läßt, sondern im Zähler immer eine Exponentialfunktion $e^{u\,l\,n} = n^u$ enthält, doch in der Eigenschaft zutage, daß $\Gamma(u)$ durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von u, wie us der Produktentwicklung der $\Gamma(u)$ ersichtlich ist, sich darstellen läßt. n Anschluß an diese Eigenschaft der Funktion $\Gamma(u)$ zeigt nun Prym, daß ie in Rede stehende Funktion in zwei einfache Funktionen zerlegbar ist, velche durch die $\Gamma(u)$ definierenden Gleichungen vollständig bestimmt werden önnen. Um zu dieser Darstellung zu gelangen, berücksichtige man, daß im ndlichen $\Gamma(u)$ nur für $u = 0, -1, -2, \ldots$ unstetig und zwar unendlich roß von der ersten Ordnung wird. Ist nun in $u' = u + \nu : \nu$ eine ganze ositive Zahl mit Einschluß der Nullstelle, so ist:

$$\Gamma(u'+1) = (u+\nu)\;\Gamma(u') = (u+\nu)\;\Gamma(u+\nu)$$
$$\Gamma(u+\nu) = (u+\nu-1)\;(u+\nu-2)\ldots(u+1)\,u\,\Gamma(u).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(u+\nu+1) = (u+\nu)\;(u+\nu-1)\ldots(u+1)\,u\,\Gamma(u).$$

Mithin ergibt sich aus der Zusammenfassung der letzten Gleichungen:

$$\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u+\nu+1)}{u\,(u+1)\;(u+2)\ldots(u+\nu)},$$

$$\lim_{u=-\nu}\Gamma(u)\,(u+\nu) = \lim_{u=-\nu}(u+\nu)\,\frac{\Gamma(u+\nu+1)}{u\,(u+1)\ldots(u+\nu)},$$

$$= \lim_{u=-\nu}\frac{\Gamma(1)}{u(u+1)\ldots(u+\nu-1)} = \lim\frac{\Gamma(1)}{-\nu(-\nu+1)\ldots-2\ldots-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{(-1)^\nu.\,\nu!}.$$

Aus der letzten Gleichung nun:

$$\lim_{u=-\nu}(u+\nu)\;\Gamma(u) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

folgt, daß $\Gamma(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u-\nu)}$ für $u = -\nu$ stetig bleibt, wenn eine hebba[r]
Unstetigkeit ausgeschlossen ist.

Bildet man nun die unendliche Reihe:

$$P(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{1!\,(u+1)} + \frac{1}{2!\,(u+2)} - \frac{1}{3!\,(u+3)} + \ldots + \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)} + \ldots$$

so konvergiert dieselbe für jedes u mit Ausnahme der Stellen $u = 0, -$
$-2, \ldots$ Ist a eine von den letztgenannten verschiedene Stelle der Eben[e], so läßt sich jedes Glied der Reihe für die Umgebung der Stelle a in ein[e] nach aufsteigenden Potenzen von $(u-a)$ fortschreitende Reihe entwickel[n], die für das Innere eines aus a als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, d[er] keine der Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots$ einschließt, konvergiert. Auf die[se] Weise entsteht eine doppelte unendliche Reihe, die unbedingt konvergie[rt], da die ihr entsprechende Modulenreihe konvergiert. Diese so definier[te] Funktion $P(u)$ genügt nun folgenden Gleichungen:

1.) $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 0$ für jedes endliche u,

2.) $P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e}$ nur für jene u, welche von den Wert[en] $u = 0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind, da nur für solche u: $P(u)$ ein[e] Bedeutung hat. Die Richtigkeit der Gleichung 1.) erhellt aus der Eigensch[aft] der Funktion $P(u+n)$, für unbegrenzt wachsendes n gegen Null zu ko[n]vergieren, während der Modul von $(n-1)!\,n^u$ über alle Grenzen wächs[t], während sich die Richtigkeit der Gleichung 2.) an der Hand der Definition[s]gleichung der Funktion $P(u)$ nachweisen läßt. Gemäß der Definition is[t]

$$P(u+1) = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{1!\,(u+2)} + \frac{1}{2!\,(u+3)} - \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,(u+\nu)} + \ldots$$

und $u\,P(u) = 1 - \frac{u}{1!\,(u+1)} + \frac{u}{2!\,(u+2)} - \ldots + \frac{(-1)^\nu u}{\nu!\,(u+\nu)} + \ldots$

Bildet man nun die Differenz:

$$P(u+1) - u\,P(u) = -1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} + \ldots$$

$$= -\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} + \ldots\right.$$

so ist $P(u+1) - u\,P(u) = -\frac{1}{e}$, woraus sich ohne weiteres die Gl[ei]chung ergibt: $P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e}$.

Durch wiederholte Anwendung der letzten Gleichung ergibt sich zunäch[st] folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} P(u+1) &= u\,P(u) - \frac{1}{e} \\ P(u+2) &= (u+1)\,P(u+1) - \frac{1}{e} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(u+n) &= (u+n-1)\,P(u+n-1) - \frac{1}{e}, \end{aligned}\right.$$

welchem man den einzelnen Gleichungen auch folgende Gestalt geben
nn:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{P(u+1)}{u} = P(u) - \frac{1}{e\,u} \\ \frac{P(u+2)}{u+1} = P(u+1-) \frac{1}{e(u+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{P(u+n)}{u+n-1} = P(u+n-1) - \frac{1}{e(u+n-1)}. \end{array}\right.$$

Ferner folgt aus den beiden Relationen:

$$\frac{P(u+1)}{u} = P(u) - \frac{1}{e\,u}$$

$$\frac{P(u+2)}{u(u+1)} = \frac{P(u+1)}{u} - \frac{1}{e\,u(u+1)}$$

cht die Formel: $\frac{P(u+2)}{u(u+1)} = P(u) - \frac{1}{e\,u} - \frac{1}{e\,u(u+1)}$,

lche mit der Gleichung

$$\frac{P(u+3)}{u(u+1)\,(u+2)} = \frac{P(u+2)}{u(u+1)} - \frac{1}{e\,u(u+1)\,(u+2)}$$

ammengefaßt zur Gleichung:

$$\frac{P(u+3)}{u(u+1)\,(u+2)} = P(u) - \frac{1}{e\,u} - \frac{1}{e\,u(u+1)} - \frac{1}{e\,u(u+1)\,(u+2)}$$

rt. Durch Wiederholung des hier angedeuteten Verfahrens gelangt man
nn allgemein zur Beziehung:

$$\frac{P(u+n)}{u+1)\ldots(u+n-1)} = P(u) - \frac{1}{e}\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(u+1)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\right].$$

Geht man nun für über alle Grenzen wachsendes n zur Grenze über
l berücksichtigt, daß

$$\lim_{n=\infty} P(u+n) = 0,$$

erhält man:

$$P(u) = \lim_{n=x} \frac{1}{e}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \ldots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\right].$$

Also ist auch die Funktion:

$$e\,P(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \ldots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} + \ldots$$

die ganze Ebene durch die unendliche Reihe dargestellt.

Der Beweis dafür, daß die beiden Gleichungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 0$$

$$P(u+1 = u\,P(u) - \frac{1}{e}$$

sich allein die Funktion $P(u)$ vollständig bestimmen, wird an einer späteren
le erbracht werden.

Bilden wir nun die Differenz $\Gamma(u) - P(u)$ und setzen wir

$$Q(u) = \Gamma(u) - P(u),$$

so ist $Q(u)$ als einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen u au fassen mit Rücksicht auf ihre Zusammensetzung aus den eindeutigen Funktio $P(u)$ und $\Gamma(u)$, welche im Endlichen nur für die Werte $u = 0, -1, -2$ unstetig werden, aber so, daß

$$\lim_{u=-\nu}\left[\Gamma(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)}\right] \text{ und } \lim_{u=-\nu}\left[P(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)}\right]$$

bestimmte Größen sind. Definiert man $Q(u)$ für den Punkt $u = -\nu$ so, die Differenz $\Gamma(u) - P(u)$ immer den für $u = -\nu$ existierenden Grenzw annimmt, so ist $Q(u)$ vollständig definiert als einwertige Funktion vor die für jeden endlichen Wert des u stetig ist und nur in dem unendlich fe Punkte eine Unstetigkeit zweiter Art aufweist. Infolgedessen läßt sich Q in eine für jeden Modul des u konvergierende unendliche Reihe entwick so daß

$$Q(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots\ldots,$$

wobei unter den Größen $c_0, c_1, c_2 \ldots$ von u freie Konstanten zu verstehen s Nun ist bekanntlich unter der Voraussetzung, daß der reelle Teil von u grö als Null, also positiv ist:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-\xi}\, \xi^{u-1}\, d\xi$$

und ferner:

$$P(u) = \int_0^1 e^{-\xi} \cdot \xi^{u-1}\, d\xi;$$

denn:

$$e^{-\xi} = 1 - \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} + \ldots \text{ und}$$

$$e^{-\xi}\,\xi^{u-1} = \xi^{u-1} - \frac{\xi^u}{1!} + \frac{\xi^{u+1}}{2!} - \frac{\xi^{u+2}}{3!} + \ldots\ldots,$$

also ist:

$$\int_0^1 e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi = \frac{1}{u} - \frac{1}{1!\,(u+1)} + \frac{1}{2!\,(u+2)} - \ldots = P(u).$$

Mithin nimmt $Q(u)$ folgende Form an:

$$Q(u) = \Gamma(u) - P(u) = \int_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi - \int_0^1 e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi = \int_1^\infty e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d$$

Da ferner:

$$\xi^{u-1} = e^{(u-1)l\xi} = e^{ul\xi}\,e^{-l\xi} = \frac{e^{ul\xi}}{e^{l\xi}} = \frac{e^{ul\xi}}{\xi},$$

so ist:

$$e^{-\xi}\,\xi^{u-1} = \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,e^{ul\xi} = \frac{e^{-\xi}}{\xi}\left[1 + \frac{z\,l\xi}{1!} + \frac{z^2 l^2\xi}{2!} + \ldots\right]$$

und mithin ist:

$$Q(u) = \int_1^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \frac{u}{1!}\int_1^\infty e^{-\xi}\,l\xi\,\frac{d\xi}{\xi} + \ldots + \frac{u^\nu}{\nu!}\int_1^\infty e^{-\xi}\,l^\nu\xi\,\frac{d\xi}{\xi} + \ldots$$

Da wir aber früher:

$$Q(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots$$

gesetzt haben, so folgt aus der Identität, daß

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!} \int_1^\infty e^{-\xi} l^\nu \xi \frac{d\xi}{\xi}.$$

Daß auch $Q(u)$ für jedes endliche u den Gleichungen genügt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1,$$

$$Q(u+1) = u\, Q(u) + \frac{1}{c},$$

welche, wie später gezeigt wird, die Funktion $Q(u)$ vollständig bestimmen, wenn zu dem für $z = 0$ eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist, läßt sich folgendermaßen nachweisen: Es ist

$$Q(u+n) = \Gamma(u+n) - P(u+n),$$

$$\frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\, n^u} - \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u},$$

da ferner $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 0$, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1.$$

Subtrahiert man ferner von der Gleichung:

$$\Gamma(u+1) = u\, \Gamma(u)$$

die Gleichung: $P(u+1) = u\, P(u) - \frac{1}{e}$, so erhält man:

$$Q(u+1) = \Gamma(u+1) - P(u+1) = u\, \Gamma(u) - u\, P(u) + \frac{1}{e} \text{ oder}$$

$$Q(u+1) = u\left[\Gamma(u) - P(u)\right] + \frac{1}{e} \text{ und somit;}$$

$$Q(u+1) = u\, Q(u) + \frac{1}{e}.$$

Ist nun bisher als Resultat der vorhergehenden Untersuchungen die Darstellbarkeit der Γ-Funktion durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von u nachgewiesen worden, so daß die Gleichung besteht:

$$\Gamma(u) = P(u) + Q(u),$$

so erübrigt es noch zu zeigen, daß die beiden Bedingungsgleichungen, die für $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$ früher aufgestellt wurden, die Funktion $\Gamma(u)$, beziehungsweise $P(u)$, beziehungsweise $Q(u)$ vollständig bestimmen. Diese Behauptung ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Falles, der sich folgendermaßen aussprechen läßt:

α) $S(u)$ sei ein dem Punkte u der Ebene zugeschriebenes Symbol, so daß nach dieser Bezeichnungsweise den äquidistanten Punkten: $u+1$, $u+2, \ldots u+n \ldots$ die Symbole $S(u+1)$, $S(u+2) \ldots S(u+n) \ldots$ zukommen.

β) Von einer durch das u, von dem man ausgeht, bestimmten ganze Zahl n (die auch Null sein kann), möge sich $S(u+n)$ so ändern, da

$$\lim_{n=\infty} \frac{S(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = k, \quad \ldots\ldots\ \text{I.)}$$

wo k eine von z freie Konstante von beliebigem Werte bedeutet.

γ) $S(u)$ sei mit $S(u+1)$ durch die Gleichung verknüpft.

$$S(u+1) = u\, S(u) + l, \quad \ldots\ldots\ \text{II.)}$$

wo l wieder als eine von u freie, beliebige Konstante aufzufassen is und zwar in dem Sinne, daß die letzte Gleichung $S(u+1)$ oder $S(u$ erklärt und bestimmt, je nachdem feststeht, daß $S(u)$ oder $S(u+1$ für das betreffende u nicht bedeutungslos und überdies für $u =$ eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Genügt $S(u)$ all diese Bedingungen, so ist für jeden Punkt u der Ebene $S(u)$ von der Form

$$S(u) = (k - le)\, P(u) + k\, Q(u).$$

Zunächst genügt $S(u)$ der Bedingung I.); denn:

$$\frac{S(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = (k-le) \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u} + k \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u};$$

geht man ferner für $n = \infty$ zur Grenze über, so verschwindet das erste Glie auf der rechten Seite, während:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1.$$

Somit ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = k.$$

In analog einfacher Weise ist auch zu zeigen, daß $S(u)$ der Bedin gung II. genügt. Es bleibt nunmehr nur noch übrig zu zeigen, daß jed Funktion $S(u)$, welche den Bedingungen I. und II. genügt, mit der Funktio $(k - le)\, P(u) + k\, Q(u)$ übereinstimmt. Zu diesem Zwecke wählt man ein das von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden ist, dann läßt sich gemäß der Bedingung α dazu eine positive ganze Zahl n finden, so daß $S(u+n)$ eine bestimm Zahl bedeutet, folglich nach II auch $S(u+n-1) \ldots S(u+1)$, $S(u)$, d u von 0 und $-1, -2, -3, \ldots$ verschieden vorausgesetzt ist. Damit i bewiesen, daß $S(u)$ für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene u eine bestimmten Wert hat. Schließt man weiters für u die Werte $u = 0, -1, -2, \ldots$ aus und wendet man Gleichung II n mal an, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
S(u+1) &= u\, S(u) + l \\
S(u+2) &= (u+1)\, S(u+1) + l \\
S(u+3) &= (u+2)\, S(u+2) + l \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S(u+n) &= (u+n-1)\, S(u+n-1) + l
\end{aligned}\right\}$$

und daraus:

$$\frac{S(u+1)}{u} = S(u) + \frac{l}{u},$$

$$\frac{S(u+2)}{u+1} = S(u+1) + \frac{l}{u+1},$$

$$\frac{S(u+2)}{u(u+1)} = \frac{l}{u} + \frac{l}{u(u+1)} + S(u),$$

$$\frac{S(u+3)}{u+2} = S(u) + S(u+2) + \frac{l}{u+2},$$

$$\frac{S(u+3)}{u(u+1)(u+2)} = l\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \frac{1}{u(u+1)(u+2)}\right] + S(u)$$

nd schließlich allgemein:

$$S(z) = -l\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \dots + \frac{1}{u(u+1)\dots(u+n-1)}\right] -$$

$$-\frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} \cdot \frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}.$$

Läßt man nun n unbegrenzt wachsen, so wird der Wert von $S(u)$ und lglich auch der Wert der rechten Seite unserer Gleichung nicht beeinflußt nd man findet:

$$(u) = \lim_{n=\infty}\left[-l\left\{\frac{1}{u} + \dots + \frac{1}{u(u+1)\dots(u+n-1)}\right\}\right] + \lim_{n=\infty}\frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u}\,.$$

$$.\lim \frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)\dots(u+n-1)}.$$

Da aber nach dem Früheren:

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \dots + \frac{1}{u(u+1)\dots(u+n-1)}\right] = e\,P(u),$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{S(u+n)}{(n-1)\,n^u} = k,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)\dots(u+n-1)} = \lim_{n=\infty} P(u,n) = \Gamma(u) = P(u) + Q(u),$$

ird

$$S(u) = -el\,P(u) + k\,[P(u) + Q(u)] = (k + el)\,P(u) + k\,Q(u).$$

Es besitzt also $S(u)$ für jeden von $0, -1, -2, \dots$ verschiedenen Punkt r Ebene denselben Wert wie die Funktion $(k - el)\,P(u) + k\,Q(u)$. Bemmen wir uns nun, um das Verhalten der Funktion $S(z)$ in den Punkten $= 0, -1, -2, \dots$ untersuchen zu können, vorerst den Wert für $S(1)$;

$$S(1) = (k - el)\,P(1) + k\,Q(1),$$

n ist:

$$P(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots.$$

d:

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots..$$

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots = P(1) = 1 - e^{-1}$$

d: $Q(1) = \Gamma(1) - P(1) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$. Mithin ist:

$$S(1) = (k - el)\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{k}{e} = k - el + l.$$

Untersucht man nun das Verhalten der Funktion $S(u)$ an den Stellen $= 0, -1, -2, \dots$ selbst, so sind zunächst die beiden Fälle zu unterscheiden:

1.) $k - el \neq 0$

2.) $k - el = 0.$

Ad 1.) In diesem Falle ist das Symbol $S(0)$ bedeutungslos; denn nach erer früheren Bedingung II.) ist, wenn $S(0)$ eine Bedeutung hätte,

$$S(1) = 0\,S(0) + l = l,$$

während doch $S(1)$ den Wert $k - el + l$ besitzt. Zugleich mit $S(0)$ aber auch die Symbole $S(-1), S(-2)$ .. bedeutungslos; denn wäre $S(-$ eine bestimmte Zahl, so wären zufolge der Bedingung II.) auch $S(-v+$ $S(v+2) \dots S(0)$ eine bestimmte Zahl; für $u = 0, -1, -2, \dots$ ist aber a $(k - el)\,P(u) + k\,Q(u)$ ohne Bedeutung. Es stimmt also in diesem F das Verhalten von $S(u)$ mit dem der Funktion $(k - le)\,P(u) + k\,Q(u)$ über

Ad 2.) Ist $k - el = 0$ oder $k = el$, so ist für alle u-Werte mit A nahme $u = 0, -1, -2, \dots$

$$S(u) = k\,Q(u) = el\,Q(u).$$

Wäre $S(0)$ bedeutungslos oder hätte es einen von $el\,Q(0)$ verschiede Wert, so besäße $S(u)$, da $Q(u)$ für $u = 0$ stetig ist, in $u = 0$ entge unserer früheren Voraussetzung eine hebbare Unstetigkeit. Es ist also wirk

$$S(0) = el\,Q(0).$$

Nun ist aber gemäß unserer früheren Voraussetzung:

$$S(u+1) = u\,S(u) + l$$

und für $u = -1$:

$$S(0) = -S(-1) + l,$$

$$Q(0) = -Q(-1) + \frac{1}{e},$$

$$el\,Q(0) = -el\,Q(-1) + l \;\dots\dots\; S(-1) = el\,Q(-1),$$

für $u = -2$:

$$S(-1) = -2\,S(-2) + l,$$

$$Q(-1) = -2\,Q(-2) + \frac{1}{e},$$

$$S(-1) = el\,Q(-1) = -2\,el\,Q(-2) + l,$$

$$-2\,S(-2) + l = -2\,el\,Q(-2) \;\dots\dots\; S(-2) = el\,Q(-2) \text{ etc.}$$

$S(u)$ stimmt also in diesem Falle für jeden Punkt u der Ebene mit Funktion $el\,Q(u) = k\,Q(u)$ überein und demnach auch mit der Funk $(k - el)\,P(u) + k\,Q(u)$, da ja $k - el = 0$ ist. Damit ist also unser gemeiner Satz über $S(u)$ bewiesen, damit aber auch die früher zitie Sätze über $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$, da dieselben nur spezielle Fälle diese gemeinen Satzes sind; denn

1.) für $k = 1$ und $l = 0$ erhält man die Bedingungen, die $\Gamma(u)$ ständig bestimmen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 1 \text{ und } \Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u).$$

2.) für $k = 0$, $l = -\frac{1}{e}$ erhält man die $P(u)$ vollständig definiere Gleichungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 0,\quad P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e}.$$

3.) für $k = 1$, $l = +\frac{1}{e}$ ergeben sich die Bedingungsgleichungen $Q(u)$ vollständig definieren:

$$\lim \frac{Q(u+n)}{(n-1)\,n^u} = 1,\quad Q(u+1) = u\,Q(u) + \frac{1}{e}.$$

Im Anschlusse an die früher genannte Abhandlung von Prym versucht nun L. Scheefer in seiner im Bande 97 des Crelleschen Journales für reine und angewandte Mathematik erschienenen Abhandlung „Zur Theorie der Funktionen $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$" die von Prym aufgestellten Bedingungsgleichungen, welchen die drei genannten Funktionen genügen müssen und die unmittelbar zur analytischen Darstellung dieser Funktionen führen, durch andere zu ersetzen, welche den Vorzug haben, daß sie an den Integralen, lurch welche $\Gamma(z)$, $P(z)$ und $Q(z)$ definiert werden, direkt erkannt werden können. Dabei führen die neuen Bedingungen direkt sowohl zu den die Funktionen definierenden Integralen, als auch zu den anderen analytischen Ausdrücken der Funktionen. Scheefer beginnt seine Abhandlung mit dem Beweise eines später verwendeten Hilfssatzes, dessen Inhalt sich in folgender Weise zusammenfassen läßt: $f(z)$ sei eine eindeutige Funktion der komplexen Veränderlichen z und genüge folgenden Bedingungen:

1.) $f(z)$ sei für alle Werte von $z = \xi + \xi' i$, für welche $a \leqq \xi \leqq a+1$ ist, holomorph und: $|f(z)| < g$, wo a und g reelle positive Konstanten sind.

2.) Die Gleichung $f(z+1) = z f(z)$ bestehe für alle möglichen Werte von z, dann läßt sich beweisen, daß: $f(z) f(1-z) = f(1)^2 \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

Zur Vereinfachung des Beweises möge noch a als eine ganze Zahl angenommen werden; denn von dem für diesen Fall gültigen Beweis gelangt man zu dem Beweise des allgemeinen Falles durch leicht erkennbare Modifikationen. Setzt man nun:

$$\varphi(z) = f(z) f(1-z),$$

so genügt $\varphi(z)$ wegen der Bedingung 2.) auch der Gleichung

$$\varphi(z+1) = -\varphi(z);$$

denn es ist:

$$\varphi(z+1) = f(z+1) f(-z) = z f(z) f(-z)$$

$$\varphi(z) = f(z) f(1-z) = -z f(z) f(-z).$$

Mithin ist:

$$\varphi(z+1) = -\varphi(z).$$

Ferner ist:

$$f(z+1) = z f(z)$$

$$\varphi(z) = f(z) f(1-z),$$

von welchen beiden Gleichungen die erste für den Wert $z = 2a - z$ die folgende Gestalt annimmt und durch wiederholte Anwendung die nächsten Relationen liefert:

$$\begin{aligned} f(2a+1-z) &= (2a-z) f(2a-z) \\ f(2a-z) &= (2a-1-z) f(2a-z-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(3-z) &= (2-z) f(2-z) \\ f(2-z) &= (1-z) f(1-z). \end{aligned}$$

Somit ist:

$$f(2a+1-z) = (1-z)(2-z)(3-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z) f(1-z),$$

woraus folgt, daß:

$$f(1-z) = \frac{f(2a+1-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z)}.$$

Es geht als $\varphi(z)$ mit Berücksichtigung dieses eben erhaltenen Wertes über i

$$\varphi(z) = \frac{f(z) f(2a+1-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z)}.$$

Wählt man nun in $z = \xi + \xi' i : \xi$ so, daß $a \leqq \xi \leqq a+1$, so ist zufol

der Gleichung: $$|f(z)| < g$$

auch: $$|f(2a+1-z)| < g$$

und $$|\varphi(z)| < \left| \frac{g^2}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-z)} \right|.$$

Daraus folgt zunächst, daß $\varphi(z)$ in dem zur imaginären Achse parallel Streifen $a \leqq \xi \leqq a+1$ nur für $z = a$ und $z = a+1$ und demnach mit Rüc sicht auf die Relation: $\varphi(z+1) = -\varphi(z)$ überhaupt nur für reelle, ganzzahlige Werte von z unendlich groß werd kann. Da ferner:

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{g^2}{\xi'^{2a}}$$

so sinkt $|\varphi(z)|$ sobald ξ' ins Unendliche wächst unter jede angebbare Größe

Endlich ist

$$z\varphi(z) = f(1+z) f(1-z) = \frac{f(a+z)}{(1+z)(2+z)\ldots(a-1+z)} \cdot \frac{f(a-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(a-1-z)}$$

Da aber gemäß der ersten Bedingung, welcher $f(z)$ entsprechen mu $f(a+z)$ und $f(a-z)$ nach positiven Potenzen von z entwickelt werd können, so ist dies auch bei $z\varphi(z)$ der Fall und man erhält:

$$z\varphi(z) = f(1)^2 + z\, P(z).$$

Die Differenz $D(z) = \varphi(z) - f(1)^2 \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ läßt sich also in der U gebung der Stelle $z = 0$ nach positiven Potenzen von z entwickeln. Da hat $D(z)$ folgende Eigenschaften: Vermehrt man z um 1, so nimmt $D(z)$ d entgegengesetzten Wert an. Ferner läßt sich $D(z)$ in der Umgebung je endlichen Wertes z_0 nach positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickeln. Der solute Betrag von $D(z)$ ist für keinen Wert von z größer als eine gewi Konstante G. Definieren wir nämlich einen Streifen der z-Ebene durch Bedingung $c \leqq \xi \leqq c+1$ und zerlegen diesen Streifen in drei Teile du zwei Parallele zur reellen Achse beziehungsweise in den Abständen c' und – von derselben, so wird in dem von diesen Parallelen eingeschlossenen Sti des Streifens $D(z)$ wegen seiner an zweiter Stelle genannten Eigensch überall kleiner als eine angebbare Größe G_1 sein; in den beiden unendl langen Stücken wird $|\varphi(z)|$ nach kleiner sein als $\dfrac{g^2}{c'^{2a}}$; und

$$\left| f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| < f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}},$$

also: $$|D(z)| < \frac{g^2}{c'^{2a}} + f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}}.$$

Jede Zahl G, die größer als die beiden hier genannten Grenzen ist, wird lso für keinen Wert des Streifens, mithin gemäß der ersten hier aufgezählten igenschaft von $D(z)$ überhaupt für keinen Wert von z erreicht. Folgt nun us der an zweiter und dritter Stelle genannten Eigenschaft von $D(z)$, daß iese Funktion eine Konstante sein muß, so folgt aus der Tatsache, daß $D(z)$ ür $\xi' = \infty$ verschwindet, daß diese Konstante selbst Null sein muß. Damit ist ie Behauptung, daß: $\varphi(z) - f(1)^2 \dfrac{\pi}{\sin \pi z} = 0$, bewiesen.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß nur eine Funktion $F(z)$ der komplexen Veränderlichen z existiert, welche den folgenden Bedingungen genügt:

I.) $F(z)$ sei für alle $z = \xi + \xi' i$, für welche $a \leqq \xi \leqq a + 1$ ist, holomorph nd

$$|F(z)| < \frac{g}{2} \cdot (a \text{ und } g \text{ reell.})$$

II.) Für jedes z sei $F(z+1) = z F(z) + c$.

III.) $F(1) = c$ und ist $C = c$, so tritt noch die Bedingung hinzu

III a.) $F(z)$ habe im Punkte $z = 0$ keine durch Abänderung des einlnen Wertes $F(o)$ hebbare Unstetigkeit.

Beweis: Gäbe es zwei Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$, welche die genannten genschaften besäßen, so genügte deren Differenz:

$$f(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

n Bedingungen $|f(z)| < g$ und $f(z+1) = z F_1(z) - z F_2(z) = z f(z)$ und erdies wäre: $f(1) = 0$. Nach dem Hilfssatze also wäre

$$f(z) f(1-z) = f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird aber nur Null für diejenigen dlichen Werte von z, für welche $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ endlich bleibt. Dies ist der Fall für e endlichen z, die von den ganzzahligen Werten des z verschieden sind. eraus folgt, wie sogleich gezeigt werden soll, daß $f(z)$ nur an den Stellen $-1, -2, \ldots$ von Null verschieden sein kann. Ist nämlich z_0 irgend ein dlicher Wert des z, der von den Werten der Reihe $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ verhieden ist, so kann man $f(z)$ mit Rücksicht darauf, daß:

$$f(z) = \frac{f(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

er:

$$f(z) = \frac{f(z-n)}{z(z-1)\ldots(z-n-1)},$$

f die Form bringen:

$$f(z) = R(z) f(z \pm n),$$

bei $R(z)$ eine rationale Funktion von z bedeutet. Wählt man nun die lle $z = z_0$, so liegt $z_0 \pm n = \xi + \xi' i$ in dem Streifen, der durch die Begung $a \leqq \xi \leqq a + 1$ charakterisiert ist, und $R(Z)$ ist in der Umgebung z_0 endlich und von Null verschieden. Da $f(z \pm n)$ zufolge der Begung I.) sich nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln läßt, so ist dies auch $f(z)$ der Fall. Wäre nun $f(z_0) \neq 0$, so läßt sich um die Stelle $z = z_0$ ein iner Kreis beschreiben, innerhalb dessen $f(z)$ überall von Null verschieden

ist. Daher müßte für alle innerhalb dieses Kreises gelegenen Werte von
wegen $f(z)\,f(1-z)=f(1)^2\,\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$

$$f(z)\,f(1-z)=0$$

also
$$f(1-z)=0$$

sein. Bringt man nun $f(1-z)$ gleichfalls auf die Form:

$$f(1-z)=R_1(z)\,f(1-z\pm n_1),$$

so daß $1-z_0\pm n_1=\xi_1+i\,\xi'_1$ in unserem früher definierten Streifen lieg während die rationale Funktion $R_1(z)$ in der Umgebung von z_0 von Nu verschieden ist, so müßte der Faktor von $R_1(z)$ für alle innerhalb ein kleinen Kreises gelegenen Werte von z verschwinden, d. h. $f(z)$ wäre inne halb eines um den Punkt $z=1-z_0\pm n_1$ als Mittelpunkt geschlagene Kreises überall Null. Es wäre also nach einem bekannten Satze $f(z)$ inne halb des Streifens, in dem sie monogen ist, überall Null, mithin wäre zufolg

$$f(z)=R(z)\,f(z\pm n)\quad\text{auch}\quad f(z_0)=0.$$

Dies wäre aber ein Widerspruch, da $f(z_0)$ von Null verschieden angenomme wurde. $f(z)$ ist also jedenfalls gleich Null für alle Werte von z, die nicht der Reihe $0, \pm 1, \pm 2\ldots$ vorkommen. Wegen der Bedingung I.) ist $f($ auch Null für denjenigen ganzzahligen Wert (respektive diejenigen Wert welcher in dem unter I.) definierten Streifen liegt. Daraus folgt nach II daß $f(z)$ für alle positiven ganzzahligen Werte Null ist. Es kann also $f($ nur für solche Werte von z von Null verschieden sein, die der Reil $0, -1, -2, \ldots$ angehören. Bis auf diese Stellen der Ebene ist also $F($ durch die Bedingungen I—III vollständig bestimmt. Sie ist aber auch a diesen Stellen bestimmt, wenn die in II und III vorkommenden Konstant C und c von einander verschieden sind; denn in diesem Falle folgt aus I

$$z\,F(z)=F(z+1)-c,$$

also:
$$[z\,F(z)]_{z=0}=C-c,\quad\text{da}\quad F(1)=C$$

und
$$F(0)=\left(\frac{C-c}{z}\right)_{z=0}=\infty$$

oder allgemein: $F(-n)=\dfrac{F(-n+1)-c}{-n}$, d. h. $F(-1)$, $F(-2)$. der Reihe nach gleich ∞. Ist dagegen $C=c$, so folgt aus

$$F(z+1)=z\,F(z)+c,$$

$$F(z)=\frac{F(z+1)-c}{z}$$

und da:
$$F(1)=C=c,$$

so ist
$$F(z)=\frac{F(z+1)-F(1)}{z}.$$

Nun ist aber nach IIIa $F(0)=\lim\limits_{z=0} F(z)$

$$F(0)=\lim_{z=0}\frac{F(z+1)-F(1)}{z}=F'(1).$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel II.) erhält man

$$F(-n) = c\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right] + \frac{(-1)^n}{n!} F'(1).$$

Damit ist nun gezeigt, daß $F(z)$ durch die Bedingungen von I—IIIa voll-
ndig bestimmt ist. Es soll nun im folgenden die Indentität dieser so defi-
rten Funktion $F(z)$ mit der von Prym aufgestellten Funktion:

$$(C-c)\,P(z) + (C-c+ce)\,Q(z)$$

chgewiesen werden.

Setzt man:
$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx$$

l
$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx,$$

ist $Q(z)$ für alle Werte von z, $P(z)$ nur für die rechts von der imagi-
en Achse gelegenen Werte definiert, wie schon Prym gezeigt hat. Durch
tielle Integration zeigt es sich nun, daß $P(z)$ und $Q(z)$ den Bedingungen
und III.), denen $F(z)$ genügt, entsprechen, indem man den Konstanten
und c spezielle Werte beilegt:

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx = \frac{e^{-x} x^z}{z} + \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-x} x^z\,dx,$$

$$P(z) = \frac{1}{ez} + \frac{1}{z} P(z+1)$$

$$z\,P(z) = \frac{1}{e} + P(z+1) \;\dots\; P(z+1) = z\,P(z) - \frac{1}{e}$$

:
$$P(1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$P(z)$ genügt also den Bedingungen II.) und III.) für $F(z)$, wenn

$$c = -\frac{1}{e} \text{ und } C = 1 - \frac{1}{e}$$

tzt wird. Nun ist:

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx = \left[\frac{e^{-x} x^z}{z}\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_1^\infty e^{-x}.\,x^z\,dx,$$

$$Q(z) = -\frac{1}{ez} + \frac{1}{z}\int_1^\infty e^{-x} x^z\,dx = \frac{1}{z}\,Q(z+1) - \frac{1}{ez},$$

$$Q(z+1) = z\,Q(z) + \frac{1}{e},$$

$$Q(1) = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^\infty = \frac{1}{e}.$$

$Q(z)$ genügt also II. und III. für $F(z)$, wenn $c = \frac{1}{c}$ und $C = \frac{1}{e}$ gesetzt wird.

dies erfüllt $Q(z)$ auch noch die Bedingung III^a für $F(z)$, indem es für

$z = 0$ keine durch Abänderung des einzelnen Wertes $Q(o)$ hebbare Unste keit hat. Außerdem kann man, da $P(z)$ der Funktionalgleichung II, schon oben gezeigt wurde, genügt, durch wiederholte Anwendung von II, Bereich von $P(z)$ nach und nach nach links erweitern und schließlich ganz beliebige Werte von z ausdehnen.

Wir können nun zeigen, daß die Funktionen $P(z)$ und $Q(z)$ auch Bedingung I.) genügen. Aus den evidenten Beziehungen:

$$\left| e^{-x} x^{\xi + \xi' i - 1} \right| \leqq e^{-x} x^{a-1} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ \xi \geqq a \end{cases}$$

$$\left| e^{-x} x^{\xi + \xi' i - 1} \right| \leqq e^{-x} x^{a} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 1 \leqq x \\ x \leqq a + 1 \end{cases}$$

folgt zunächst unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \left| P(\xi + \xi' i) \right| &\leqq P(a) \\ \left| Q(\xi + \xi' i) \right| &\leqq Q(a+1) \end{aligned}\right\} \text{für } a \leqq \xi \leqq a + 1,$$

so daß für die früher genannte Konstante $\frac{g}{2}$ jeder Wert angenommen wer kann, der größer als $P(a)$, beziehungsweise $Q(a+1)$ ist. Zum Beweise e lich, daß $P(z)$ und $Q(z)$ holomorphe Funktionen von z darstellen, dient folgende allgemeine Satz:

Wenn $f(x, z)$ und $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ in einem endlichen Gebiete G der komple Veränderlichen z eindeutige, stetige Funktionen von x und z sind, lange $x_0 \leqq x \leqq x_1$ ist; oder wenn für den Fall, daß $x = x_1$ diese Beding nicht mehr gilt, die Integrale:

$$\int_{x_1 - \delta}^{x_1} f(x, z)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1 - \delta}^{x_1} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\, dx$$

mit abnehmendem δ im ganzen Gebiete G gleichmäßig gegen Null kon gieren, so ist der Differentialquotient der Funktion

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, z)\, dx$$

innerhalb des Gebietes G von der Richtung der Differentiation unabhän endlich und gleich $\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dz} f(x, z)\, dx$. Für $x = \infty$ ist $\frac{1}{\delta}$ statt $x_1 - \delta$ zu set

Aus diesem Satze folgt, daß der Differentialquotient von $P(z)$ und $Q(z)$ lich und von der Richtung der Differentiation unabhängig ist für $a \leqq \xi \leqq a$ wenn wir $a > 1$ annehmen; denn unter dieser Voraussetzung sind:

$$f(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = e^{-x} x^{z-1}\, lg\, x.$$

eindeutige und stetige Funktionen von x und z für alle Werte x von schließlich 0 bis einschließlich 1, und für alle Werte x von 1 bis Außerdem übersteigen die absoluten Beträge der Integrale:

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} d x \text{ und } \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} lg\, x\, d x$$

icht die Größen:

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a} d x \text{ und } \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a} lg\, x\, d x,$$

onvergieren also mit abnehmenden δ gleichmäßig gegen Null.

Wir wollen nun zum Schlusse der Abhandlung noch zeigen, daß die rüher aufgestellten Eigenschaften der Funktion $F(z)$ genügen, um analytische usdrücke für dieselbe herzuleiten. Setzt man in:

$$F(z) = (C - c)\, P(z) + (C - c + e c)\, Q(z)$$

$c = 0$, $C = 1$, so wird $F(z) =$ zur $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} d x.$$

Aus den Bedingungen, denen $\Gamma(z)$ genügt, folgt sofort die wichtige elation:

$$\Gamma(z)\, \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \cdot \Gamma^2(1) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

a nach dem früheren $\Gamma(1) = 1$ ist. Aus der letzten Gleichung aber folgt, aß $\Gamma(z)$ für kein endliches z, das nicht in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ orkommt, Null werden kann, da sonst $\Gamma(1 - z)$ unendlich groß werden müßte.

Aus der letztgenannten Eigenschaft von $\Gamma(1 - z)$ aber würde wegen r Gleichung: $\Gamma(z + 1) = z\, \Gamma(z)$ folgen, daß:

$$\Gamma(1 - z) = -z(-z + 1)(-z + 2)\ldots(-z + 1 \pm n)\, \Gamma(1 - z \pm n)$$

t $\Gamma(1 - z)$ auch die Funktion $\Gamma(1 - z \pm n)$ unendlich groß würde.

Diese Annahme ist aber mit der Bedingung I.) bei geeigneter Wahl s n unverträglich. Untersuchen wir das Verhalten der Funktion $\Gamma(z)$ an n Stellen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so ist, da $F(z)$ in $\Gamma(z)$ für $C = 1$ übergeht d $F(1) = C$ ist: $\Gamma(1) = 1$.

Durch wiederholte Anwendung der Bedingungsgleichung:

$$\Gamma(z + 1) = z\, \Gamma(z)$$

gt:

$$\Gamma(n) = n!$$

Ebenso $\Gamma(0) = \infty$ und $\Gamma(-n) = \infty$. $\Gamma(z)$ wird also für kein endliches z, von den Werten $0, -1, -2, \ldots -n$ verschieden ist, Null. Dagegen d $\Gamma(z)$, sobald z einen der Werte aus der Reihe $0, -1, -2, \ldots -n$, immt, unendlich groß mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$ von der 1. Ordnung. $\frac{\ldots g\, \Gamma(z)}{d z^2}$ wird an denselben Stellen und nur da unendlich von der zweiten dnung, das Residuum ist 0, der Koeffizient der -2^{ten} Potenz 1. Dieses halten der $\frac{d^2 lg\, \Gamma(z)}{d z^2}$ führt unmittelbar auf die Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Die Differenz $\frac{d^2\, lg\, \Gamma(z)}{dz^2} - \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ läßt sich offenbar in de Umgebung jedes endlichen Wertes $z = z_0$ nach positiven Potenzen von $z -$ z entwickeln und muß daher einer beständig konvergierenden Potenzreihe P (z gleich sein. Damit gewinnt man die Gleichung:

$$\frac{d^2}{dz^2}\, lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + P(z).$$

Die rechte Seite kann zwischen den Grenzen k und z gliedweis integriert werden, da sie in jedem endlichen Gebiete von z mit Ausschlu der Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ konvergiert. Dies gibt, wenn man di Integrationskonstante auf der linken Seite auf die rechte Seite bringt:

$$\frac{d}{dz}\, lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right) + P_1(z) \ldots\ldots \quad \alpha.)$$

Daß nun die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls gleichmäßig i jedem endlichen Gebiete, welches die Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ nicht enthäl konvergiert, folgt schon aus dem mit der früheren Gleichung vorgenommene Integrationsprozeß. Da wir nämlich die Zahl m so bestimmen können, da in einem Gebiete, welches die Stellen k und z enthält, $\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ übera absolut kleiner als die beliebig vorgegebene Größe δ wird, muß für denselbe Wert von m das Integral jener Summe, das ist $\sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right.$ notwendig kleiner sein als $\delta\,(kz)$, wo kz die absolute Länge einer von nach z gezogenen, ganz im Gebiete verlaufenden Integrationskurve ist. D Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Summe $\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right.$ ist also erfüllt. Integrieren wir Gleichung $\alpha.$) nochmals zwischen den Grenz k_1 bis z, so erhalten wir:

$$lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \left[lg \left(\frac{k_1+n}{z+n} \right) + \frac{z-k_1}{k+n} \right] + P_2(z)$$

und daraus:

$$\Gamma(z) = e^{P_2(z)} \prod_{0}^{\infty}{}_{n} \left(\frac{k_1+n}{z+n} \right) e^{\frac{z-k_1}{k+n}} \ldots\ldots\ldots \quad A.)$$

Die rechte Seite genügt unter allen Umständen der unter I.) auf stellten Bedingung der Funktion $F(z)$. Die diesbezüglichen Bedingung II. und III. werden erfüllt, wenn man setzt:

$$B.\begin{cases} P(z)=pz+q \\ p=-\lim\limits_{n=\infty}\left(\sum\limits_{\mu=0}^{n}\frac{1}{k+\mu}-lg(k+n)\right) \\ q=\lim\limits_{n=\infty}\left[\sum\limits_{\mu=0}^{n}\frac{1}{k+\mu}-lg(k_1+n)\right]-\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\left[lg\frac{k_1+\mu}{1+\mu}-\frac{k_1-1}{k+\mu}\right]. \end{cases}$$

Da nur eine einzige Funktion existiert, die den Bedingungen I.—III. genügt, so ist der durch A und B gegebene analytische Ausdruck von den Werten der Konstanten k und k_1 unabhängig. Für $k=k_1=1$ geht q über in die Mascheronische Konstante λ, p in $-\lambda$ und man erhält:

$$\Gamma(z)=e^{\lambda(1-z)}\prod_{0}^{\infty}{}_{n}\left(\frac{1+n}{z+n}e^{\frac{z-1}{1+n}}\right),$$

welcher Ausdruck von dem Euler-Gaußschen Produkt sich nur durch die Schreibweise unterscheidet.

Zur analytischen Darstellung von $P(z)$ gelangt man durch die Benützung der Bedingung II., aus deren wiederholten Anwendung für $c=-\frac{1}{e}$ die Formel folgt:

$$P(z)=\frac{1}{e}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)}+\frac{P(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

Das erste Glied rechts nähert sich für jeden Wert von z mit wachsenden einer Grenze, also auch das zweite Glied. Bezeichnen wir diese beiden Grenzwerte mit $P_1(z)$, beziehungsweise $P_2(z)$, so ist

$$P(z)=P_1(z)+P_2(z).$$

Setzt man in $P_1(z): c=-\frac{1}{e}$, $C=P(1)=1-\frac{1}{e}$, so sieht man leicht n, daß schon $P_1(z)$ den Bedingungen I.—III. genügt. Es muß also da ur eine einzige solche Funktion existieren kann, $P_2(z)=0$ sein und man hält:

$$P(z)=\frac{1}{e}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)}$$

(z) läßt sich aber auch noch in einer anderen Form analytisch darstellen. is den Bedingungen I.—III. geht hervor, daß $P(z)$ nur an den Stellen $-1, -2, \ldots\infty^1$ mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$ wird. Dieser Umstand führt der Reihe: $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$, welche allen Bedingungen I.—III. für $c=-\frac{1}{e}$, $=1-\frac{1}{e}$ genügt. Diese Reihe stellt ebenfalls die Funktion $P(z)$ dar:

$$P(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

welche Darstellung man direkt aus $\int\limits_0^1 e^{-x} x^{z-1} d x$ erhält, wenn man e^{-x} nach Potenzen von x entwickelt und gliedweise integriert.

Für die analytische Darstellung von $Q(z)$ ist es von Wichtigkeit, daß $C = c$ wird. Dies hat in Anbetracht der Bedingungen II und III[a] zur Folge, daß die Funktion für keinen endlichen Wert von z ∞ wird und demnach durch eine beständig konvergierende Potenzreihe dargestellt werden kann, deren Koeffizienten aus der Relation: $Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$ bestimmt werden können.

Dr. Georg Burggraf.

Schulnachrichten.

I. Der Lehrkörper.

1. Veränderungen.

Aus dem Lehrkörper schieden:

1. Prokop Karl, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, der über eigenes Ansuchen mit dem Ministerial-Erlasse vom 16. Oktober 1908, Z. 41.639 (intimiert mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 24. Oktober 1908, Z. 28.695) mit 1. November 1908 in den dauernden Ruhestand versetzt wurde.
2. Mattel Viktor, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, der mit Allerhöchster Entschließung Sr. k. u. k. Apostolischen Majestät vom 23. Oktober 1908 (Ministerial-Erlaß vom 5. November 1908, Z. 44.581, intimiert mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 10. November 1908, Z. 30.879) zum Direktor des deutschen Staatsgymnasiums in Kremsier ernannt wurde.
3. Krichenbauer Benno, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, dem mit Ministerial-Erlaß vom 6. Juni 1908, Z. 14.562 (intimiert mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 3. Juli 1908, Z. 16.273) eine Lehrstelle am Elisabeth-Gymnasium in Wien verliehen wurde.
4. Hurch Johann, wirklicher Lehrer an der hiesigen Landes-Oberrealschule und Nebenlehrer für Französisch an der hiesigen Anstalt, infolge Versetzung von seinem bisherigen Dienstposten.

In den Lehrkörper traten ein:

1. Derbeck Anton, bisher Supplent am deutschen Staatsgymnasium in Prag, Stephansgasse, der an Stelle des Professors Krichenbauer mit Ministerial-Erlaß vom 28. August 1908, Z. 34.622 (intimiert mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 8. September 1908, Z. 23.046) zum wirklichen Lehrer an der hierortigen Anstalt ernannt wurde.
2. Dr. Dostal Josef, geprüft für deutsche Sprache als Hauptfach, Latein und Griechisch als Nebenfach, welcher an Stelle des beurlaubten Professors Albin Kocourek mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 26. September 1908, Z. 24.421, zum Supplenten bestellt wurde.
3. Wellner Leopold, geprüft für klassische Philologie als Hauptfach, deutsche Sprache als Nebenfach, an Stelle des zum Direktor ernannten Professors Mattel mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 1. Dezember 1908, Z. 32.540, zum Supplenten bestellt.
4. Dr. Berkowicz Michael, an Stelle des für das II. Semester beurlaubten Professors Dr. Heinrich Redisch zum Supplenten bestellt (Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 12. März 1909, Z. 5214).
5. Tanzer Emanuel, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse an der Zweiten deutschen Staatsrealschule, der mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 15. Oktober 1908, Z. 27.209, zum Nebenlehrer für Französisch bestellt wurde.

Außerdem waren die Lehramtskandidaten Gustav Häusler und Dr. Rudolf Heinz Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 18. September 1908, Z. 24.297, beziehungsse vom 10. November 1908, Z. 30.668, zur Ablegung der Probepraxis an der hierortigen talt unter der fachmännischen Leitung des Professors Dr. Georg Burggraf zugelassen.

2. Personalstand und Lehrfächerverteilung.

A. Lehrer, die dem Stande der Anstalt angehören.

1. Schwertassek Karl August, k. k. Direktor, lehrte Latein in VIII in wöchentlich 5 Stunden.
2. Dr. Burggraf Georg, k. k. Professor, Verwalter der physikalischen Lehrmittel, lehrte (im 1. Semester in 19, im 2. Semester in 20 wöchentlichen Lehrstunden) Mathematik und Physik sowie Chemie am Obergymnasium und war Vorstand in VIII.
3. Derbeck Anton, k. k. Gymnasiallehrer, Verwalter der Lehrerbücherei, Vorstand in I, lehrte in wöchentlich 18 Stunden Latein in I, Deutsch in I, VII, VIII.
4. Kocourek Albin, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, war im abgelaufenen Schuljahre krankheitshalber beurlaubt.
5. Dr. Kubánek Cyrill, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, lehrte in wöchentlich 16 Stunden katholische Religion in sämtlichen Klassen und hielt die Erbauungsreden für das Unter- und Obergymnasium; außerdem lehrte er (wöchentlich 3 Stunden) Böhmisch im IV. Kurse.
6. Malfertheiner Anton, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, Verwalter der archäologischen Lehrmittel, Vorstand in II, lehrte in wöchentlich 17 Stunden Latein und Deutsch in II, Griechisch in VIII.
7. Mayer Johann, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, k. k. Leutnant der n. a. Landwehr im Verhältnis der Evidenz, Verwalter der geographisch-historischen Lehrmittel und der ethnographischen Sammlung, lehrte in wöchentlich 21 Stunden Geographie und Geschichte in II, III, IV, VI, VII, VIII und war Vorstand in IV.
8. Mendl Karl, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, lehrte in wöchentlich 12 Stunden (Ermäßigung der Lehrverpflichtung bewilligt mit Ministerial-Erlaß vom 31. August 1908, Z. 34.811, intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 8. September 1908, Z. 23.272) Latein und Logik in VII, Deutsch in III und war Vorstand in VII.
9. Polach Johann, k. k. Professor, lehrte Latein in V und VI, Griechisch in VI in 1[illegible] wöchentlichen Stunden, Vorstand in VI; außerdem lehrte er Böhmisch im Kurse II (wöchentlich 3 Stunden).
10. Dr. Redisch Heinrich, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, lehrte im 1. Semester in wöchentlich 14 Stunden israelitische Religion in 7 Abteilungen; im 2. Semester war er krankheitshalber beurlaubt.
11. Rinesch Romuald, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse, Verwalter der Lehrmittel für Mathematik und Gesang, lehrte in wöchentlich 12 Stunden (Ermäßigung der Lehrverpflichtung bewilligt mit Ministerial-Erlaß vom 20. Oktober 1908, Z. 41.63[illegible] intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 24. Oktober 1908, Z. 29.07[illegible]) Mathematik in II, III, Physik in IV und Geographie in I, außerdem als Nebenlehrer (wöchentlich 4 Stunden) Gesang in 2 Abteilungen.
12. Salzmann Leo, k. k. Professor in der IX. Rangsklasse, Verwalter der Turn- und Spielgeräte, lehrte (wöchentlich 16 Stunden) Turnen in allen Klassen und leitete die Jugendspiele.
13. Schüch Franz, k. k. Professor, k. k. Leutnant in der nicht aktiven Landwehr, Verwalter des Zeichenkabinettes, lehrte in wöchentlich 16 Stunden Zeichnen in I—IV sowie am Obergymnasium (wöchentlich 3 Stunden) und in 2 Stunden Kalligraphie in 2 Abteilungen.
14. Spandl Josef, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, Verwalter der Schülerbücherei und der Münzensammlung, Vorstand in III, lehrte Latein in III, Griechisch in III und VII (15 wöchentliche Stunden).
15. Zatloukal Vinzenz, k. k. Professor in der VII. Rangsklasse, Verwalter der naturgeschichtlichen Lehrmittel und der Unterstützungsbibliothek, Mitverwalter der Schülerlade, lehrte (wöchentlich 16 Stunden) Mathematik in I und IV, Naturgeschichte, beziehungsweise Naturlehre in I, II, III, V, VI, ferner in 6 wöchentlichen Stunden Böhmisch in den Kursen I A und II.

B. Supplenten und Hilfslehrer.

1. Dr. Berkowicz Michael, k. k. Supplent, übernahm im 2. Semester den Unterricht in der israelitischen Religion (14 wöchentliche Stunden).
2. Dr. Dostal Josef, k. k. Supplent, lehrte Griechisch in IV, Deutsch in IV, V, [illegible] Psychologie in VIII in wöchentlich 15 Stunden, ferner Böhmisch im III. Kurs (wöchentlich 3 Stunden).
3. Jahn Richard, Pfarrer der evangelischen Gemeinde A. B., unterrichtete (wöchentlich 4 Stunden) in 4 Abteilungen die evangelischen Schüler beider Gymnasien in Brünn.

4. Wellner Leopold, k. k. Supplent, Vorstand in V, übernahm Latein in IV, Griechisch und Geschichte in V vom 1. Dezember 1908 nach Professor Mattel (14 wöchentliche Stunden); außerdem lehrte er Stenographie (4 wöchentliche Stunden) in 2 Abteilungen.

C. Nebenlehrer.

1. Tanzer Emanuel, k. k. Professor in der VIII. Rangsklasse an der k. k. Zweiten deutschen Staatsrealschule in Brünn, lehrte französische Sprache als Freifach in 2 Abteilungen (wöchentlich 4 Stunden).

3. Beurlaubungen.

1. Professor Kocourek Albin war krankheitshalber für das 1. Semester beurlaubt (Ministerial-Erlaß vom 13. August 1908, Z. 34.816, intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 6. September 1908, Z. 22.140); da sich sein Gesundheitszustand leider nicht besserte, war er gezwungen, auch für das 2. Semester einen Krankheitsurlaub zu erbitten, der ihm mit Ministerial-Erlaß vom 21. Februar 1909, Z. 5455 (intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 27. Februar 1909, Z. 5331) gewährt wurde.
2. Auch Professor Dr. Redisch Heinrich war aus Gesundheitsrücksichten für das 2. Semester des laufenden Schuljahres beurlaubt (Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 2. März 1909, Z. 5213).

II. Lehrplan.

1. Obligate Lehrgegenstände.

Der Lehrplan wurde gemäß den bestehenden Verordnungen durchgeführt.

Im folgenden sind bloß die Lektüre, der Memorierstoff, die Stellen zu den schriftlichen Übersetzungsaufgaben aus den klassischen Sprachen und der Lesestoff aus dem Deutschen sowie die Themen der schriftlichen Arbeiten aus dem Deutschen am Obergymnasium und die Redeübungen in den beiden obersten Klassen angeführt.

A. Lateinische Sprache.

1. Schullektüre.

III. Klasse (wöchentlich 3 Stunden): Cornelius Nepos (nach Weidner): Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cimon, Thrasybulus, Conon, Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus.

IV. Klasse (wöchentlich 3 Stunden): Caesar, de bello Gallico (ed. Prammer): I; IV 18—38; V 1—23; VI 11—28; VII 1—14. — Ovid (nach Golling): Metam. I 1—4 (Vorwort); 89—252 (Die vier Weltalter, Vernichtung des Menschengeschlechtes); III 1—130 (Thebens Gründung).

V. Klasse (wöchentlich 5 Stunden): Livius (ed Zingerle): I; XXI 21—63. — Ovid (nach Golling): Metam. V 385—445, 462—571 (Raub der Proserpina); VI 146—312 (Niobe); VIII 611—724 (Philemon und Baucis) X 1—77 (Orpheus und Eurydice); XI 85—145 (Midas); XV 871—879 (Epilog); Fast. II 83—118 (Arion); 193—242 (Untergang der 306 Fabier); 687—710 (Einnahme von Gabii); IV 393—416 (Ludi Cereales); Trist. IV 4, 55—88 (Iphigenie auf Tauris); IV 10 (Selbstbiographie); Ex Ponto III 2, 45—96 (Orestes und Pylades); Amor. I 15 (Dichters Unsterblichkeit).

VI. Klasse (wöchentlich 5 Stunden): Sallust (ed. Scheindler): Bellum Iugurthinum. — Cicero (ed. Nohl): Oratio in Catilinam I. — Vergil (ed. Klouček): Ecl. I, V; Georg. I 1—42; II 136—176, 458—540; IV 315—558; Aen. I. — Caesar (ed. Paul): de bello civili I 1—50.

VII. Klasse (wöchentlich 4 Stunden): Cicero (ed. Nohl): Oratio de imperio Cn. Pompei, pro Archia poëta; Tusculanae disputationes (ed. Schiche) I. — Vergil (ed. Klouček): Aen. II, IV, VI, XII 697—886.

VIII. Klasse (wöchentlich 5 Stunden): Tacitus (ed. Prammer): Germania 1—27; Annal. I 1—15, 72—81; II 27—43, 53—61, 69—83; III 1—19; IV 1—13, 39—42, 52—54, 57—60. — Horaz (ed Huemer): Carm. I 1, 3, 22, 31, 32, 34; II 2, 3, 6, 7, 13, 15, 16, 18, 20; III 1—6, 8, 13, 16, 24, 29, 30; IV 2, 3, 7, 9, 12; Epod. 2, 7; Sat. I 1, 6, 9; II 6; Epist. I 2, 16; II 2.

2. Memorierstoff.

I. Klasse: Einzelne Gedächtnisverse und Sprüche.

II. Klasse: Sprichwörter und Gedächtnisverse.

III. Klasse: Cornelius Nepos: Miltiades 1, Themistocles 9, Epaminondas 8.

IV. Klasse: Caesar, de bello Gallico I 1, 11 1–4; IV 25. — Ovid, Metam. I 1–4, 89–150, 163–176.

V. Klasse: Livius I 1 1–5, 48 1–4. — Ovid, Metam. I 253–273, XV 871–879; Trist. IV 10 115–132.

VI. Klasse: Cicero, in Catilinam I 1, 2. — Vergil, Ecl. V; Aen. I 1–34.

VII. Klasse: Cicero, de imperio Cn. Pompei §§ 6, 27, 28; Tusc. disp. I §§ 118, 119. — Vergil, Aen. IV 173–197.

VIII. Klasse: Tacitus, Germ. 14; Annal. I 1: Horaz, Carm. III 3; III 30; IV 3; Sat. I 6, 65–88.

3. Schriftliche Übersetzungen aus der lateinischen Sprache.

V. Klasse: 1. Sem.: Livius XXII 7 6–11 und XXII 7 11–14. — 2. Sem.: Ovid Metam. XIII 180–198.

VI. Klasse: 1. Sem.: Sallust, Epist. Cn. Pompei ad senatum 12–28. — 2. Sem.: Vergil, Aen. III 374–393 und III 506–525.

VII. Klasse: 1. Sem.: Cicero, de off. I §§ 74, 75. — 2. Sem.: Vergil, Aen. II 224–245.

VIII. Klasse: 1. Sem.: Tacitus, Annal. I 53 und VI 51. — 2. Sem.: Horaz, Sat. I 3 1–20 und I 3 55–72.

4. Privatlektüre.

V. Klasse:

Berkowitz Otto: Caesar, de bello Gallico II; III; IV 1–15; V 24–58.
Hofer Walter: Caesar, de bello Gallico II; III.
Jellinek Artur: Ovid, Metam. IV 615–662, XI 1–70, 73–84; XII 64–145; 580–611.
Kneifel Hugo: Caesar, de bello Gallico II; Livius III 26–29; XXVI 9; Ovid, Metam. IV 615–662; VIII 183–235.
Löwenstein Hermann: Livius XXII 1–20; Ovid, Metam. III 527–733; IV 55–73, 76–166; IV 615–662; VI 313–381; VII 528–660; VIII 183–235, X 110–142; XII 39–62; 64–145; 580–611; XV 178–223; 746–870; Fast. IV 809–860; V 57–72; Trist. I 2 1–70; I 3; I 4; III 10; IV 6; Amor. II 6; Ex Ponto II 1.
Mayer Gustav: Caesar, de bello Gallico II; III; IV 1–15; V 24–58; VI 30–44; Livius III 26–29, 33–35; Ovid, Metam. I 5–88; VIII 183–235; XII 39–63; 580–611; Fast. I 709–722: Trist. I 4; Amor. III 13.
Rosenfeld Alfred: Ovid, Metam. IV 615–662; VI 313–381; VIII 183–235; XII 39–63; 64–145; 586–611; XIV 581–608; XV 178–213; Fast. IV. 419–618; 809–860; V 57–72; Trist. I 2 1–70; I 3; I 4; I 7; III 3; III 4; III 7; III 10; IV 458–88; IV 6.
Wiesner Erwin: Ovid, Metam. II 1–332.
Winkler Hermann: Caesar, de bello Gallico IV 1–15; Ovid, Metam. XII 588–611.

VI. Klasse:

Bailonj Adolf: Cicero, in Catilinam II.
Fleischer Hugo: Ovid, Met. IV 55–73, 76–116; VI 313–381; VIII 183–235.
Habermann Günter: Caesar, de bello civili II; Livius XXI 1–20.
Knöpfelmacher Alfred: Vergil, Aen. III; V 1–300.
Loria Felix: Caesar, de bello civili II.
Srnec Karl: Sallust, bellum Catilinae 1–20.
Ungar Hermann: Caesar, de bello civili II.

VII. Klasse:

Bader Edwin: Cicero, de off. I.
Brief Otto: Vergil, Aen. III.
Löffler Leo: Vergil, Aen. IX.
Reich Bernhard: Plautus, Miles gloriosus III–V; Martial, Auswahl.

Schafranek Viktor: Vergil, Aen. III.
Sersawy Richard: Vergil, Aen. V.
Wachsmann Bruno: Vergil, Aen. VIII.
Weger Friedrich: Vergil, Aen. V.
Weißkopf Fritz: Vergil, Aen. IX.
Wiesner Gustav: Propertius V.
Wolf Helmut: Cicero, Tusc. disp. V.
Zenker Adolf: Vergil, Aen. III.
Ziffer Felix: Cicero, Cato maior; Catull, Auswahl.

VIII. Klasse:

Bauer Paul: Horaz, Epist. II 3; Carm. IV 6; Carmen saeculare.
Lampl Viktor: Cicero, de oratore.
Winkler Emil: Briefe des jüngeren Plinius. (Auswahl von Kukula); Horaz, Epist. II 3; Carm. IV 6; Carmen saeculare.

B. Griechische Sprache.

1. Schullektüre.

V. Klasse (wöchentlich 4 Stunden): Xenophon (nach Schenkls Chrestomathie): Kyrup. I 2 $_{1-15}$; 3, 4 $_{1-3}$; Anab. I 1; 2 $_{1-14}$; 4 $_{11-19}$; 5; 6; 7; 8; II 5; 6; IV 7; 8. — Homer, Ilias (ed. Christ) I, II.

VI. Klasse (wöchentlich 4 Stunden): Homer, Ilias (ed. Christ): VII, XII, XVIII, XXII, XXIV. — Herodot (ed. Hintner): V 100—102, 105; VI 43—45, 48, 49, 102—108, 109—117, 119—120; VII 32—36, 138—141, 145—148, 172—183, 205—209; VIII 6—14, 49—55, 56—64, 66—72, 74, 101. — Xenophon (nach Schenkls Chrestomathie): Memorab. II 1 $_{21-34}$; 3 $_{1-15}$; Kyrup. VII 2.

VII. Klasse (wöchentlich 3 Stunden): Demosthenes (ed. Wotke): die 3 olynthischen Reden, die 1. philippische und die über den Frieden. — Homer, Odyssee (ed. Christ): I 1—74, V—X.

VIII. Klasse (wöchentlich 4 Stunden): Platon: Apologie, Kriton, Euthyphron (ed Christ). — Sophokles (ed Schubert-Hüter); Antigone. — Homer, Odyssee (ed Christ): XXII.

2. Memorierstoff.

III. Klasse: Eine Anzahl von Sprichwörtern und Fabeln.
IV. Klasse: Sentenzen und Disticha; einige Epigramme.
V. Klasse: Homer, Ilias I 1—100.
VI. Klasse: Homer, Ilias VI 317—381.
VII. Klasse: Demosthenes. Phil. I 1—3; Olynth. III 1, 2; Homer, Odyssee I 1—20; I 115—128.
VIII. Klasse: Platon. Apologie 1, 29; Sophokles, Antigone, 1—38; 100—125.

3. Schriftliche Übersetzungen aus der griechischen Sprache.

V. Klasse: 1. Semester: Xenophon, Kyrup. VIII 7 $_{8-10}$ und VIII 7 $_{17-20}$.
2. Semester: Homer, Ilias V 522—572 (Christ).
VI. Klasse: 1. Semester: Homer, Ilias XVI 426—443 und XVI 444—461.
2. Semester: Herodot VII 212 f. und VII 215—218 (teilweise).

4. Privatlektüre.

V. Klasse:

…fer Walter: Xenophon, Kyrup. I 4 $_{16-26}$; I 5; Anab. I 9.
…linek Artur: Xenophon, Kyrup. VIII 5 1, $_{17-28}$; Anab. I 9.
…wenstein Hermann: Xenophon, Hell. II 1, 2, 3; Kyrup. I 4 $_{4-15}$; Convivium; Homer. Ilias III; IV.
…yer Gustav: Xenophon, Anab. I 9; Homer, Ilias III.
…senfeld Alfred: Xenophon, Anab. III 1 $_{1-14}$.
…z Ernst: Xenophon, Kyrup. I 4 $_{16-26}$.

VI. Klasse:

Fleischer Hugo: Homer, Ilias XIV.
Habermann Günter: Herodot I 23, 24; III 39—43, 120—125.
Srnec Karl: Xenophon, Memorab. I 4.
Ungar Hermann: Herodot VI 94—101; VII 5—7, 20—31, 37—53, 100—120.

VII. Klasse:

Bachrich Paul: Homer, Odyssee I 75—311; III.
Bader Edwin: Homer, Odyssee XI; XII.
Brief Otto: Demosthenes, Olynth. I; Homer, Odyssee I 75—311; XI.
Löffler Leo: Homer, Odyssee XI; XII; Griechische Lyriker (Auswahl nach Biese).
Luze Wilhelm: Homer, Odyssee I 75—311; III.
Reich Bernhard: Homer, Odyssee I 75—311; XI; XII.
Schafranek Viktor: Homer, Odyssee III; XII.
Sersawy Richard: Homer, Odyssee III; XII.
Wachsmann Bruno: Homer, Odyssee XI; XII.
Weger Friedrich: Homer, Odyssee XXIII; XXIV.
Weißkopf Fritz: Homer, Odyssee XI; XII.
Wiesner Gustav: Homer, Odyssee XVIII; XIX; XXI.
Wolf Helmut: Homer, Odyssee III, XV; XVIII; XXIII.
Zenker Adolf: Homer, Odyssee I 75—311; XI; XII; XXIII.
Ziffer Felix: Homer, Odyssee I 75—311; III; IV; XI; Griechische Lyriker (Auswahl na Biese).

VIII. Klasse:

Bauer Paul: Plutarch, Perikles.
Lampl Viktor: Plutarch, Perikles.
Winkler Emil: Demosthenes, de corona.

C. Lesestoff aus dem Deutschen am Obergymnasiun

V. Klasse: Die epischen, lyrischen und didaktischen Dichtungsarten; Lektü Auswahl nach Lampels Lesebuch für die V. Klasse; Reineke Fuchs I, IV, V; Mess I, IV teilweise; Wielands Oberon I, V, XII.

VI. Klasse: Lektüre nach Lampels Lesebuch für die VI. Klasse. Ausgewäh Stücke aus dem Nibelungenliede und eine Auswahl aus den Liedern Walthers von Vogelweide im Urtext; Auswahl aus Klopstocks Oden, Lessings Fabeln und Epigramm und Auswahl aus den Literaturbriefen, ferner Lessings Minna von Barnhelm. Die Privatlekt umfaßte Kleists Frühling, Lessings Philotas, Emilia Galotti und Nathan den Weisen.

VII. Klasse: Auswahl aus Lampels Lesebuch für die VII. Klasse. Außerd Goethes Iphigenie auf Tauris und Schillers Tell. Privatlektüre: Goethes Götz, Egmo Torquato Tasso; Schillers Räuber, Kabale und Liebe, Fiesko, Don Carlos, Wallenste Maria Stuart, Jungfrau von Orleans, Braut von Messina; Shakespeares König Lear.

VIII. Klasse: Auswahl nach Lampels Lesebuch für die VIII. Klasse. Außerd Goethes Hermann und Dorothea und ausgewählte Kapitel aus Lessings Laokoon u der Hamburgischen Dramaturgie, Grillparzers König Ottokars Glück und Ende. I Privatlektüre umfaßte Schillers Demetrius, Kleists Prinz von Homburg, Grillparz Ahnfrau, Shakespeares Julius Cäsar.

D. Aufgaben für die deutschen schriftlichen Arbeite und Redeübungen am Obergymnasium.

V. Klasse:

a) Schularbeiten.

1. Vom Eumenidenchor geschrecket, zieht sich der Mord, auch nicht entdecket, d Los des Todes aus dem Lied. (Schiller.) — 2. Tue das Gute, wirf es ins Meer: Weiß der Fisch nicht, so weiß es der Herr. (Hammer-Purgstall.) Mit Bezugnahme auf „Johan Kant“ von Gustav Schwab. — 3. Wie bewährte sich Tamms Wahlspruch: „Gutes gew mit Vertraun und Beharrlichkeit führet zum Ausgang!“ an seinem und seiner Angehörig Schicksal? — 4. Winter in der Natur, doch Frühling im Herzen der Jugend. — 5. D Leben ist ein Kampf: darum rüste dich! — 6. Die Weisheit ist mehr als Gold zu verehr

Goethe, Reineke Fuchs.) — 7. Die Talismane in Wielands Oberon, ihre Geschichte und Bedeutung. — 8. Über den Nutzen der Stenographie. — 9. Zur Wahl: Warum grollt Achill? oder: Die Götterszene im Olymp (nach Homers Ilias I.) — 10. Einigkeit macht stark. (Viribus unitis.)

b) Hausarbeiten.

1. „Der Fischer" von Goethe und „Der Taucher" von Schiller. Eine Parallele. — 2. Die Macht des Gesanges, verherrlicht in deutschen Balladen und Romanzen. — 3. Wieso wurden die Phönizier das bedeutendste Handelsvolk des alten Orients? — 4. Die Ballade. Ihr Wesen und ihre Bedeutung. — 5. Charakteristik Hagens. — 6. Ans Vaterland, ans teure, schließ dich an! (Schiller, Wilhelm Tell.) — 7. Das Motiv der Treue in Wielands Oberon. — 8. Inhalt und Grundgedanke der Goetheschen Fabel „Adler und Taube". — 9. Hannibals Zug über die Alpen (nach Livius). — 10. Thersites, eine Kontrastfigur. (Ilias II.)

VI. Klasse:

a) Schularbeiten.

1. Mythus, Sage und Geschichte im Nibelungenliede. — 2. Die märchenhaften Elemente in der deutschen Heldensage. — 3. Daß wir nur Menschen sind, das beug' in Ergebung das Haupt uns; daß wir Menschen sind, richt' es uns herrlich empor. (Ernst v. Feuchtersleben.) — 4. Was man ist, das blieb man andern schuldig. (Goethe, Tasso.) — 5. Schaffe, weil es noch Tag ist! — 6. Die Natur ist ein sehr lehrreiches Buch. — 7. Die Exposition in Lessings Minna von Barnhelm nach Umfang, Form und Inhalt.

b) Hausarbeiten.

1. Geringes ist die Wiege des Großen. — 2. Die Dichtung, ein Abbild ihrer Zeit. — 3. Inwiefern ist Wolframs Parzival ein psychologisches Epos zu nennen? — 4. Auch der Krieg hat sein Gutes. — 5. Ir ensult niht vil gevrâgen. (Wolfram v. Eschenbach.) — 6. Teuer ist mir der Freund, doch auch den Feind kann ich nützen. Zeigt mir der Freund, was ich kann, lehrt mich der Feind, was ich soll. — 7. Den man ze êren bringen mac, dem ist ein wort als ein slac. (Walther von der Vogelweide.)

VII. Klasse:

a) Schularbeiten.

1. Die verschiedenen Konfessionen in Lessings Drama „Nathan der Weise". — 2. Der Mensch, ein Kind der Sorge. — 3. Die Gegensätze in den beiden Goetheschen Gedichten „Prometheus" und „Grenzen der Menschheit". — 4. In deiner Brust sind deines Schicksals Sterne. (Schiller, Piccolomini.) — 5. Kurze Charakteristik der zur Bande Karl Moors gehörigen Räuber. — 6. Sperat infestis, metuit secundis alteram sortem bene praeparatum pectus. (Horaz, Carm. II 10.) — 7. Wilhelm Tell, der Mann der Tat.

b) Hausarbeiten.

1. An der heimatlichen Scholle hängt wohl jedes gute Herz: Dort empfand es erste Wonne, dort empfand es ersten Schmerz. — 2. Was kostet unser Fried'? O, wieviel Zeit und Jahr! Was kostet unser Fried'? O, wieviel graue Haar! Was kostet unser Fried'? O, wieviel Ströme Blut! Was kostet unser Fried'? O, wieviel Tonnen Gut! (Logau, Sinngedicht auf den dreißigjährigen Krieg.) — 3. Die politischen und sozialen Verhältnisse zu Götzens Zeit nach Goethes Götz von Berlichingen. — 4. Der Mensch der Herr, aber auch der Sklave der Natur. — 5. Schillers Kabale und Liebe ein Produkt der Sturm- und Drangperiode. — 6. Mensch und Natur in ihrem gegenseitigen Verhältnis in Schillers Elegie „Der Spaziergang". — 7. Des Daseins Kelch kredenzt bald süß, bald herb den Trank; der herbe heilt oft den, der von dem süßen trank. (Anastasius Grün.)

c) Redeübungen.

1. Die Aufklärungsphilosophie in Frankreich und ihre bedeutendsten Vertreter. (Adler Friedrich.) — 2. Die Bedeutung der Dreikaiserschlacht bei Austerlitz. (Bachrich Paul.) — 3. Dichtung und Wahrheit in Otto Ludwigs Makkabäern. (Bader Edwin.) — 4. Prähistorische Kultur. (Brief Otto.) — 5. „Die Leiden des jungen Werthers". (Grosser Franz.) — 6. Die Entwicklung der Notenschrift. (Herisch Franz.) — 7. Maria Theresias Verdienste um den österreichischen Staat. (Kohn Hugo.) — 8. Bedeutung der Hermannschlacht. (Kolařik Richard.) — 9. Nikolaus Lenau. (Löffler Leo.) — 10. Napoleon I. und Friedrich II.: Eine Parallele. (Macheck Viktor.) — 11. Die französische Revolution. (Machatschek

Bruno.) — 12. Das Jahr 1809. (Karpelis Egon.) — 13. Die Ägypter und ihre Bauwerk (Petřiček Hermann.) — 14. Das astronomische Wissen im 17. Jahrhunderte. (Prusenovsk Ulrich.) — 15. Christian Dietrich Grabbe. (Reich Bernhard.) — 16. Das Verkehrswesen d Römer. (Schafranek Viktor.) — 17. Karl von Linnée. (Schrottek Karl.) — 18. Die Spi leute und ihre Lieder. (Sersawy Richard.) — 19. Die Programmusik und Hektor Berli (Steinermayr Franz.) — 20. Robert Hamerling. (Wachsmann Bruno.) — 21. Goeth Clavigo. (Weczerza Armin.) — 22. Die Erdbeben und ihre Entstehung. (Weger Friedricl — 23. Karl Maria v. Weber: Leben, Schaffen und Bedeutung. (Weißkopf Friedrich.) — 24. B deutung des Theaters. (Wiesner Gustav.) — 25. „John Gabriel Borkmann“ von Ibse (Wolf Helmut.) — 26. Franz Schubert und das deutsche Lied. (Zenker Adolf.) — 27. D Ballade. (Ziffer Felix.) — 28. Goethes zweite Schweizerreise. (Luze Wilhelm.)

VIII. Klasse.

a) Schularbeiten.

1. „Wilhelm Tell“, das Hohelied der Freiheit. — 2. Hermanns Mutter. (Goeth „Hermann und Dorothea“.) — 3. Der junge Goethe als Stürmer und Dränger. — 4. E edler Mensch kann einem engen Kreise nicht seine Bildung danken, Vaterland und We muß auf ihn wirken. (Tasso I, 2.) — 5. Die Familie Borotin in Grillparzers Ahnfra — 6. Mensch, was ist dein Zweck auf Erden? Durch die Arbeit groß zu werden; gro nach außen, groß nach innen, sei dein Trachten, sei dein Sinnen!

b) Hausarbeiten.

1. Es gibt nur ein Glück: die Pflicht, nur einen Trost: die Arbeit, nur eine Genuß: das Schöne. (Carmen Sylva.) — 2. Des fürsten milte ûz Ôsterrîche froit, de süezen regen gelîche, beidiu liute unt ouch daz lant. (Walther von der Vogelweide.) - 3. Die Leichenrede des Antonius in Shakespeares Julius Cäsar. — 4. Wem zu glaube ist, redlicher Freund, das kann ich dir sagen: Glaube dem Leben! Es lehrt besser a Redner und Buch. (Tabulae votivae.) — 5. Das Gegenspiel in „König Ottokars Glüc und Ende“. — 6. Österreich vor hundert Jahren. Eine Gedenkrede auf den 22. Mai de Jahres 1809.

c) Redeübungen.

1. Grillparzers „Ein Bruderzwist in Habsburg“. (Bauer Paul.) — 2. Lenau „Savonarola“ (Czerny Wilhelm.) — 3. Der Wandel in Goethes künstlerischen Anschauungen seit dem Erscheinen des „Götz“ bis „Hermann und Dorothea“. (Deutsch Emanuel.) — 4. Grillparzer Sappho. (Exel Heinrich.) — 5. Grillparzers Esther. (Fürst Erwin.) — 6. Die Charakter in Goethes Hermann und Dorothea. (Fürst Leo.) — 7. Die politischen und wirtschaftliche Folgen des dreißigjährigen Krieges. (Futter Hermann.) — 8. Kurze Geschichte Böhmens (Herzel Franz.) — 9. Anton Bruckner. (Hüttel Walther.) — 10. Grillparzers „Di Jüdin von Toledo“. (Hüttel Walter.) — 11. Die Ausgrabungen in Pompeji. (Japp Richard. — 12. Ludwig Uhland als Dramatiker. (Jarosch Ottokar.) — 13. Die Frauengestalten i Schillers Tell. (Kantor Philipp.) — 14. Das Romantische in Schillers Jungfrau vo Orleans. (Klappenbach Adolf.) — 15. Walther von der Vogelweide. (Kolarz Richard.) - 16. Kurze Geschichte Österreichs von 803—1526. (Lampl Viktor.) — 17. Grillparzers „Da goldene Vließ“. (Lampl Artur.) — 18. Goethes „Hermann und Dorothea“ und Voßens „Luise“ (Mandl Josef.) — 19. Einiges aus der Lokalgeschichte Brünns. (Mautner Leo.) — 20. Jose Ressel. (Mokry Gottlieb.) — 21. „Die Gespenster“. (Schild Ignaz.) — 22. Gustav Adol von Schweden. (Schuster Rudolf.) — 23. Gottfried August Bürger. (Schwed Ernst.) - 24. Quellen, Geschichte, Charakter und Bedeutung des Dramas „Der Traum ein Leben“ von Grillparzer. (Schwed Ernst.) — 25. Goethes Wahlverwandtschaften. (Spieler Otto. — 26. Die Liebe in Goethes Hermann und Dorothea. (Stern Ludwig.) — 27. Inhalts angabe von Grillparzers „Der Traum ein Leben“. (Strebinger.) — 28. Die Faustsage un ihre volkstümlichen Bearbeitungen. (Winkler Emil.) — 29. Die Faustsage in der Kunst dichtung bis zum Erscheinen des Goetheschen Faust. (Winkler Emil). — 30. Grillparzer „Weh dem, der lügt“. (Winkler Emil.) — 31. Friedrich Hebbel als Dramatiker. (Wuczkowsk Josef.) — 32. Ludwig Anzengruber. (Zeilender Josef.) — 33. Über das Lied. (Zerzaw Adalbert.

2. Bedingt obligate Lehrgegenstände.

a) Der evangelische Religionsunterricht.

Der Unterricht wurde gemeinsam für die evangelischen Schüler der beiden Gymnasie am Ersten deutschen Gymnasium in wöchentlich 4 Stunden erteilt.

II. Abteilung (wöchentlich 1 Stunde): 2 Schüler aus der IV. Klasse. Geschichte de Volkes Israel und Urgeschichte der christlichen Kirche nach Palmer. Lehre von der Er lösung mit Heranziehung einschlägiger Stellen aus der heiligen Schrift.

IV. Abteilung (wöchentlich 1 Stunde): 1 Schüler aus der VIII. Klasse. Der Römerbrief im griechischen Urtext, c. 1—8. Zusammenfassende Darstellung der Geschichte der evangelischen Kirche bis heute.

b) Mosaische Religionslehre.

Der Unterricht wird in 7 Abteilungen mit wöchentlich je 2 Stunden erteilt.

I. Abteilung: 14 Schüler der I. Klasse. Biblische Geschichte von ihrem Beginne bis zum Tode Moses (nach Levy). — Hebräische Lektüre: Ausgewählte Stücke aus dem Exodus.

II. Abteilung: 21 Schüler der II. Klasse. Biblische Geschichte von Josua bis zum Tode Sauls (nach Levy). — Hebräische Lektüre: Ausgewählte Stücke aus dem Deuteronomium.

III. Abteilung: 15 Schüler der III. Klasse. Biblische Geschichte vom Tode Sauls bis zum Untergange des Reiches Israel (nach Levy). — Hebräische Lektüre: Auswahl aus Proverbia.

IV. Abteilung: 15 Schüler der IV. Klasse: Biblische Geschichte: Das Reich Juda. Die Bücher Esther, Daniel, Esra und Nehemia (nach Levy). Religions- und Sittenlehre (nach Wolf). — Lektüre: Auswahl aus Proverbia.

V. Abteilung: 23 Schüler der V. und VI. Klasse. Geschichte der Juden vom Exil bis zur Zerstörung Jerusalems (nach Levy und Ehrmann II). — Lektüre: Liturgische Psalmen.

VI. Abteilung: 14 Schüler der VII. Klasse. Geschichte von R. Jochanan ben Sakei bis zum Schlusse des 16. Jahrhunderts mit besonderer Berücksichtigung der Leistungen der spanischen Juden (nach Ehrmann). — Lektüre: Auswahl aus den prophetae posteriores (Haphtaroth) und Pirke Aboth.

VII. Abteilung: 15 Schüler der VIII. Klasse. Neuere Geschichte der Juden und Wiederholung literarhistorischer Abschnitte (nach Ehrmann). — Lektüre: Auswahl aus den prophetae posteriores (Haphtaroth) und Pirke Aboth.

3. Freie Lehrgegenstände.

1. Böhmische Sprache.

Der Unterricht wird in 4 Abteilungen (darunter eine Doppelabteilung) mit je 3 wöchentlichen Stunden erteilt.

I. Abteilung: A 24 Schüler der I. Klasse, B 22 Schüler der II. Klasse. Nach dem Lehrgange der böhmischen Sprache für deutsche Mittel- und Bürgerschulen von Karl Charvát, I. Teil.

Einführung in die Formenlehre aller Redeteile. Die Deklination der regelmäßigen und der wichtigsten unregelmäßigen Substantiva, des Adjektivs einer und dreier Endungen, die gebräuchlichsten Formen des prädikativen und possessiven Adjektivs, das Adverb, die Komparation der Adjektiva, der Nominativ singul. und plural. des Personal- und Possessivpronomens, die Grund- und Ordnungszahlwörter bis 100, die Konjugation von býti, die regelmäßige Konjugation der Verba im Infinitiv, Indikativ des Präsens und Perfekts im Aktiv und die wichtigsten Präpositionen. — Lektüre: Laut- und sinnrichtiges Lesen. Memorieren erklärter Lesestücke; Sprechübungen im Anschluß an den durchgenommenen Lesestoff, freie Übungen im Bereiche des Wortschatzes des gewöhnlichen Lebens.

Seit Dezember alle 4 Wochen eine Schularbeit: Diktate, wörtliche Reproduktionen, Beantwortung einfacher Fragen, in bescheidenem Maße grammatische Umformungen.

II. Abteilung: 28 Schüler der III. und IV. Klasse. Nach dem Lehrgange der böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen von Karl Charvát, II. Teil.

Wiederholung des Lehrstoffes der ersten Stufe. Das Pronomen, das Numerale, das Verbum im Aktiv und Passiv samt der quantitativen Bedeutung des Verbums in Grundzügen. Zusammenfassung der auf Grund der Lektüre gewonnenen Kenntnisse aus der Syntax. — Lektüre: Lesen einfacher, dann schwierigerer Prosastücke und leichterer Gedichte; Sprechübungen; Übersetzungen aus dem Deutschen ins Böhmische; Memorieren erklärter Lesestücke.

10 Schularbeiten: Beantwortung von Fragen, grammatische Umformungen, Reproduktionen in etwas freierer Wiedergabe, kurze Inhaltsangaben gelesener Prosastücke sowie von Gedichten erzählenden Inhalts, Übersetzungen.

III. Abteilung: 9 Schüler der IV.—VI. Klasse. Nach dem Lehrgange der böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen von Karl Charvát, II. Teil.

Wiederholung und Erweiterung des früheren Lehrstoffes, besonders des Verbums und seiner quantitativen Bedeutung, die unregelmäßigen und defektiven Verba, die Deklination der Fremdwörter; Syntax: Casuslehre, Präpositionen, Satzverbindung, Satzgefüge, direkte und indirekte Rede, die Transgressive u. a. — Lektüre schwierigerer prosaischer und poetischer Stücke; Sprachübungen; Übersetzungen aus dem Deutschen; Memorieren.

6 Schul- und 6 Hausarbeiten: Inhaltsangaben oder freie Wiedergabe durchgenommene Prosastücke und von Gedichten erzählenden Inhalts, Übersetzungen, Briefe, Nacherzählungen vorgelesener Stücke, kleinere freie Aufsätze.

IV. Abteilung: 14 Schüler der VII. und VIII. Klasse. Nach dem Lehrgange de böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen von Charvát-Oufedníček.

Wiederholende und vertiefende Durcharbeitung der Formenlehre und der wichtigsten syntaktischen und stilistischen Erscheinungen im Anschluß an die Lektüre. Memorier übungen. Pflege der böhmischen Konversation und nach Tunlichkeit der Privatlektüre Aus der Literaturgeschichte wurden die wichtigsten Repräsentanten, besonders de modernen böhmischen Literatur behandelt.

6 Schul- und 6 Hausarbeiten: Übersetzungen, Inhaltsangaben von Prosastücken un Gedichten erzählenden Inhalts, freie Aufsätze (leichtere Beschreibungen; Schilderungen Charakteristiken mit Benützung der Schullektüre, Aufsätze aus der Literatur-, Welt- un Naturgeschichte auf Grund der Lektüre, Sprüche).

2. Französische Sprache.

I. Abteilung (2 Stunden wöchentlich): 18 Schüler der IV.—VIII. Klasse. Leseübungen regelmäßige Formenlehre. Die wichtigsten unregelmäßigen Verba. Lektüre und Aneignung leichter Lesestücke. Im Anschlusse daran Sprechübungen. Übersetzungen aus der fremden Sprache in die Muttersprache und Rückübersetzung. Aneignung des nötigen Wortschatzes unter Hinweis auf den Zusammenhang des Französischen und Lateinischen. Im I. Semester 1 Diktat, im II. Semester 3 Diktate. (Nach dem „Lehrgang der französischen Sprache für Realschulen und Gymnasien“ von J. Fetter und R. Alscher, Ausgabe B).

II. Abteilung (2 Stunden wöchentlich): 9 Schüler der VI.—VIII. Klasse. Wieder holung und Erweiterung des Lehrstoffes der I. Abteilung. Nacherzählen, freie Konver sation. In jedem Semester 3 Schularbeiten. (Nach dem „Lehrgang der französischen Sprache für Realschulen und Gymnasien“ von J. Fetter und R. Alscher, Ausgabe B).

3. Freihandzeichnen.

3 Stunden wöchentlich: 9 Schüler der V.—VIII. Klasse. Kopfstudien nach geeigneten Musterblättern und Gipsmodellen. Hiezu wurden den Schülern die Verhältnisse des Kopfes und des Gesichtes zum übrigen Körper und die Proportionen der Gesichtsteile erklärt Fortgesetzte Übungen im perspektivischen Zeichnen sowie im Zeichnen des polychromen un plastischen Ornamentes. Übungen im Zeichnen von Stilleben und im Skizzieren. Gelegent liche Studien nach landschaftlichen Motiven. Temperamalerei und Studien mit Ölfarben Zeichnen nach dem lebenden Modell.

4. Stenographie.

I. Kurs (2 Stunden wöchentlich): 44 Schüler der IV.—VII. Klasse. Die Wortbildung und Wortkürzung (nach Schellers Lehr- und Lesebuch) unter sorgsamer Pflege einer kalli graphischen und korrekten Schreibweise. Schreib- und Leseübungen. Die Elemente de Satzkürzung.

II. Kurs (2 Stunden wöchentlich): 16 Schüler der V.—VII. Klasse. Fortsetzung un Beschluß der Satzkürzung in ihrer Anwendung als Stamm-, Form- und gemischte Kürzung (nach Scheller). Schnellschriftliche Diktate in zwei Gruppen bis zu 70, beziehungsweise 9 Worten in der Minute und Übertragung derselben in die stenographische Korrespondenzschrift

5. Kalligraphie.

I. Abteilung (wöchentlich 1 Stunde): 38 Schüler der I. Klasse. Übungen im Schreiben der kurrenten und lateinischen Schrägschrift, zunächst nach Vorschreibungen des Lehrer auf der Schultafel, später Diktate; Übertragungen aus der kurrenten in die lateinisch Schrägschrift und umgekehrt unter steter Beobachtung einer richtigen Sitzart und Feder führung. Probeschriften in Kurrent- und Lateinschrift.

II. Abteilung (wöchentlich 1 Stunden): im I. Semester 21 Schüler der II. Klasse Fortsetzung der Übungen der I. Abteilung. — Im II. Semester 43 Schüler. Die griechisch Schrift (Buchstaben, Hauch- und Tonzeichen).

6. Gesang.

I. Abteilung (2 Stunden wöchentlich): 26 Schüler der I.—IV. Klasse. (Nach Michae Bauers „Chorschule“). Tonlehre, das Noten- und Liniensystem. Kenntnis der Noten un Pausen, sowohl im Violin- als auch im Baßschlüssel, Taktstrich, Takt, Taktordnungen

ınd Taktieren sämtlicher Taktarten. Notenschreiben. Entwicklung der wichtigsten Dur- ınd Moll-Tonleitern. Treffübungen. Ein- und zweistimmige Lieder.

II. Abteilung (2 Stunden wöchentlich): 31 Schüler der III.—VIII. Klasse. Erweiterung ler Theorie. — Zur Einübung gelangten Chöre und Gesänge geistlichen und weltlichen nhaltes für gemischten und für Männerchor (nach Mendes „Liederbuch", ferner nach ,iebschers „Österreichischer Liederkranz"), weiter Messen und Hymnen mit deutschem ınd lateinischem Texte, wie die deutschen Messen von Michael Haydn, Franz Schubert, ;chiedemayer, Gesänge für die Adventzeit, für Weihnachten und für die Fastenzeit; ndlich gemischte Chöre mit Orchesterbegleitung; „Holder Friede" von Andreas Romberg ınd Patriotische Festhymne", zusammengestellt nach Méhul.

III. Verzeichnis

der für das Schuljahr 1909/10 vorgeschriebenen Lehrbücher.

I. Klasse (Realgymnasium):

roßer Katechismus der katholischen Religion. Salzburg 1896. Geb. K —·80.

ischer, Lehrbuch der katholischen Liturgik. 11.—15. Auflage. Geb. K 1·56.

Villomitzer, Deutsche Grammatik. 10. bis 12. Auflage. Geb. K 2·40.

ampel, Deutsches Lesebuch für die I. Klasse. Nur die 13. und 14. Auflage. Geb. K 2·18.

egeln für die deutsche Rechtschreibung nebst Wörterverzeichnis. Kleine Ausgabe mit einheitlicher Schreibweise. K 0·20.

chmidt, Lateinische Schulgrammatik, herausgegeben von V. Thumser. 8., 9. und 10. Auflage. Geb. K 2·40.

auler, Lateinisches Übungsbuch. Abteilung für das I. Schuljahr. Ausgabe A. 17. bis 19. Auflage. Geb. K 1·40.

eiderich, Österreichische Schulgeographie. I. Teil. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·40.

ehrbuch der Arithmetik: wird später bekannt gegeben.

ehrbuch der Geometrie: wird später bekannt gegeben.

okorny, Tierkunde für die unteren Klassen der Mittelschulen, bearb. von Latzel. Ausgabe B. 26. bis 28. Auflage. Geb. K 3·60.

okorny, Naturgeschichte des Pflanzenreiches, bearb. von Fritsch. Ausgabe B. 22. bis 24. Auflage. Geb. K 3·20.

ozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

II. Klasse (Gymnasium):

roßer Katechismus der katholischen Religion. Salzburg 1896. Geb. K —·80.

ischer, Lehrbuch der katholischen Liturgik. 11.—15. Auflage. Geb. K 1·56.

illomitzer, Deutsche Grammatik. 10. bis 12. Auflage. Geb. K 2·40.

ımpel, Deutsches Lesebuch für die II. Klasse. Nur die 11. Auflage. Geb. K 2·40.

egeln für die deutsche Rechtschreibung wie in I.

hmidt, Lateinische Schulgrammatik, bearb. von V. Thumser. 8. bis 10. Auflage. Geb. K 2·40.

auler, Lateinisches Übungsbuch. Abteilung für das II. Schuljahr. 15. bis 17. Auflage. Geb. K 2·20.

ayer, Lehrbuch der Geschichte für Unterklassen. I. Teil. 2. bis 6. Auflage. Geb. K 2·—.

eiderich, Österreichische Schulgeographie. II. Teil. Nur die 2. Auflage. Geb. K 3·20.

tsche, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die I. und II. Klasse. Geb. K 2·—.

očnik, Geometrische Anschauungslehre, bearb. von Spielmann. I. Abteilung. 26. und 27. Auflage. Geb. K 2·—.

korny, Tierkunde für die unteren Klassen der Mittelschulen, bearb. von Latzel. Ausgabe B. 26. bis 28. Auflage. Geb. K 3·60.

korny, Naturgeschichte des Pflanzenreiches, bearb. von Fritsch. Ausgabe B. 22. bis 24. Auflage. Geb. K 3·20.

ozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

ıtzger, Historischer Schulatlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

III. Klasse:

Fischer Lehrbuch der katholischen Liturgik. 15. Auflage. Geb. K 1·56.
Deimel, Altes Testament. Geb. K 1·90.
Willomitzer, Deutsche Grammatik. 10. bis 12. Auflage. Geb. K 2·40.
Lampel, Deutsches Lesebuch für die III. Klasse. 7. bis 10. Auflage. Geb. 2·30.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung wie in I.
Schmidt, Lateinische Schulgrammatik, bearb. von V. Thumser. 8. bis 10. Auflage. Geb K 2·40.
Hauler, Übungsbuch zur Einübung der lateinischen Syntax. I. Teil. 7. bis 11. Auflage Geb. K 1·82.
Cornelii Nepotis vitae ed. Weidner. 4. und 5. Auflage. Geb. K 1·60.
Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 24. bis 26. Auflage. Geb. K 3·10.
Schenkl, Griechisches Elementarbuch. 19. bis 21. Auflage. Geb. K 2·85.
Mayer, Lehrbuch der Geschichte für Unterklassen. II. Teil. 2. bis 5. Auflage. Geb. K 1·70
Heiderich, Österreichische Schulgeographie. II. Teil. Nur die 2. Auflage. Geb. K 3·20
Lehrbuch der Arithmetik: wird später bekannt gegeben.
Gajdeczka, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. 2. Auflage Geb. K 2·—.
Krist, Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Klassen. 19. und 20. Anflage. Geb K 2·50.
Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.
Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

IV. Klasse:

Fischer, Geschichte der Offenbarung des Neuen Bundes. 5. bis 10. Auflage. Geb. K 2·—
Willomitzer, Deutsche Grammatik. 10. bis 12. Auflage. Geb. K 2·40.
Lampel, Deutsches Lesebuch für die IV. Klasse. 8. bis 10. Auflage. Geb. K 2·10.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung wie in I.
Schmidt, Lateinische Schulgrammatik, bearb. von V. Thumser. 8. bis 10. Auflage. Geb K 2·40.
Hauler, Aufgaben zur Einübung der lateinischen Syntax. II. Teil. 6. bis 8. Auflage Geb. K 2·10.
Caesar, de bello Gallico. Herausgegeben von Pramer. 10. Auflage. Neu bearb. von Kappelmacher. Geb. K 2·80.
Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 24. bis 26. Auflage. Geb. K 3·60.
Schenkl, Griechisches Elementarbuch. 19. bis 21. Auflage. Geb. K 2·85.
Mayer, Lehrbuch der Geschichte für Unterklassen. III. Teil. 2. bis 5. Auflage. Geb. K 2·—
Mayer, Geographie der österr.-ung. Monarchie. 3. bis 8. Auflage. Geb. K 2·40.
Nitsche, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die III. und IV. Klasse. Geb. K 2·—.
Gajdeczka, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. 2. Auflage. Geb. K 2·—.
Krist, Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Klassen. 19. und 20. Auflage. Geb. K 2·50.
Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.
Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

V. Klasse:

Wappler, Lehrbuch der katholischen Religion. I. Teil. 7. bis 9. Auflage. Geb. K 2·—.
Deutsches Lesebuch: wird später bekannt gegeben.
Leitfaden der Literaturgeschichte: wird später bekannt gegeben.
P. Ovidii Nasonis carmina selecta ed. Golling. 1. bis 5. Auflage. Geb. K 2·20.
Caesar, de bello Gallico. Herausgegeben von Pramer. 10. Auflage. Neu bearb. von Kappelmacher. Geb. K 2·80.
T. Livi ab urbe condita lib. I, II, XXI, XXII, ed. Zingerle. 2. bis 7. Auflage. Geb K 2·—.
Schmidt, Lateinische Schulgrammatik, bearb. von V. Thumser. 8. bis 10. Auflage Geb. K 2·40.

Hauler, Lateinische Stilübungen. Nur die 6. Auflage, bearbeitet von Dorsch und Fritsch. Geb. K 3·20.

Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon. 13. und 14. Auflage. Geb. K 3·20.

Homer, Ilias von Christ. 1. bis 3. Auflage. Geb. K 3·—.

Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 24. bis 26. Auflage. Geb. K 3·10.

Schenkl, Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Griechische. 11. und 12. Auflage. Geb. K 2·25.

Zeehe, Lehrbuch der Geschichte I. Teil. 4. und 5. Auflage. Geb. K 2·80.

Heiderich, Österreichische Schulgeographie. II. Teil. Geb. K 3·20.

Gajdeczka, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. bis 6. Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Arithmetik und Algebra. 4. bis 7. Auflage. Geb. K 3·—.

Gajdeczka, Lehrbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·50.

Hochstetter und Bisching, Leitfaden der Mineralogie und Geologie. 18. bis 20. Auflage. Geb. K 2·80.

Wettstein, Leitfaden der Botanik. 1. bis 3. Auflage. Geb. K 3·70.

Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

VI. Klasse:

Wappler, Lehrbuch der katholischen Religion. II. Teil. 5. bis 8. Auflage. Geb. K 2·40.

Lampel, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen. II. Teil. Ausgabe I. mit mhd. Text. Nur die 6. Auflage. Geb. K 2·70.

Sallust, bellum Iugurthinum ed. Scheindler. 2. Auflage. Geb. K 1·20.

Ciceros Reden gegen Katilina. Herausgegeben von Nohl. 3. Auflage. Geb. K 1·—.

Vergils Aeneis. Herausgegeben von Klouček. 5. Auflage. Geb. K 2·60.

Schmidt, Lateinische Schulgrammatik. 8. bis 10. Auflage. Geb. K 2·40.

Hauler, Lateinische Stilübungen. I. Teil. Nur die 6. Auflage, bearb. von Dorsch und Fritsch. Geb. K 3·20.

Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon. 13. Auflage. Geb. K 3·20.

Homer, Ilias von Christ. 1. bis 3. Auflage. Geb. K 3·—

Herodot, Perserkriege. Herausgegeben von Hintner. 2 bis 6. Auflage. Geb. K 1·36.

Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 24. bis 26. Auflage. Geb. K 3·10.

Schenkl, Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Griechische. Nur die 11. Auflage. Geb. K 2·10.

Zeehe, Lehrbuch der Geschichte. I. Teil. 4. und 5. Auflage. Geb. K 2·80.

Zeehe, Lehrbuch der Geschichte. II. Teil. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·80.

Gajdeczka, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. bis 6. Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Arithmetik und Algebra. 4. bis 7. Auflage. Geb. K 3·—.

Gajdeczka, Lehrbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3 Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·58.

Adam, Logarithmen. Geb. K 1·70.

Graber, Leitfaden der Zoologie. 4. und 5. Auflage. Geb. K 3·80.

Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

VII. Klasse:

Wappler, Lehrbuch der katholischen Religion. III. Teil. 6. und 7. Auflage. Geb. K 2·40.

Lampel, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen. III. Teil. 1. bis 3. Auflage. Geb. K 2·54.

Ciceros Rede für den Oberbefehl des Pompejus. Herausgegeben von Nohl. 2. und 3. Auflage. Geb. K 0·70.

Ciceros Rede für den Dichter Archias. Herausgegeben von Nohl. 2. und 3. Auflage. Geb. K 0·50.

Ciceronis Tusculanarum disputationum libri ed. Schiche. Geb. K 1·80.

Vergil, Äneis. Herausgegeben von Klouček. 5. Auflage. Geb. K 2·60.

Schmidt, Lateinische Schulgrammatik. 8. bis 10. Auflage. Geb. K 2·40.

Hauler, Lateinische Stilübungen. Nur die 6. Auflage, bearb. von Dorsch und Fritsch. Geb. K 3·20.

Demosthenes' ausgewählte Reden. Herausgegeben von Wotke. 2. bis 5. Auflage. Geb. K 1·50.

Homers Odyssee von Christ. 1. bis 4. Auflage. Geb. K 2·50.

Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 24. bis 26. Auflage. Geb. K 3·10.

Schenkl, Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Griechische. Nur die 11. Auflage. Geb. K 2·10.

Zeehe, Lehrbuch der Geschichte. III. Teil. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·50.

Gajdeczka, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. bis 6. Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Arithmetik und Algebra. 4. bis 7. Auflage. Geb. K 3·—

Gajdeczka, Lehrbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·70

Gajdeczka, Übungsbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·50

Wallentin, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Gymnasien. 12. und 13. Auflage. Geb. K 3·—.

Höfler, Grundlehren der Logik. 1. bis 3. Auflage. Geb. K 2·90.

Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

VIII. Klasse:

Kaltner, Lehrbuch der Kirchengeschichte. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·20.

Lampel, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen. IV. Teil. 1. und 2. Auflage. Geb. K 2·84.

Taciti Germania, ed. Prammer. Kart. K 0·60.

Taciti ab excessu divi Augusti lib. I—VI, ed. Prammer. Kart. K 1·80.

Horatii Flacci carmina selecta, ed Huemer. 1. bis 7. Auflage. Geb. K 1·72.

Scheindler, Lateinische Grammatik. 3. und 4. Auflage. Geb. K 2·60.

Hauler, Lateinische Stilübungen. Nur die 6. Auflage, bearb. von Dorsch und Fritsch. Geb. K 3·20.

Platons Apologie des Sokrates und Kriton. Herausgegeben von Christ. 2. bis 4. Auflage. Geb. K 1·—.

Platons Euthyphron. Herausgegeben von Christ. 3. und 4. Auflage. Geb. K 0·80.

Sophokles' Aias. Herausgegeben von Schubert-Hüter. 5. und 6. Auflage. Geb. K 1·50.

Homer, Odyssee von Christ. 1. bis 4. Auflage. Geb. K 2·58.

Curtius-Hartel, Griechische Schulgrammatik. 20. bis 24. Auflage. Geb. K 3·11.

Schenkl, Übungsbuch für Obergymnasien. 8. bis 10. Auflage. Geb. K 2·85.

Hannak, Österreichische Vaterlandskunde für die oberen Klassen der Mittelschulen. 14. und 15. Auflage. Geb. K 2·38.

Gajdeczka, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. bis 6. Auflage. Geb. K 2·70.

Gajdeczka, Übungsbuch der Arithmetik und Algebra. 4. bis 7. Auflage. Geb. K 3·—

Gajdeczka, Lehrbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·70

Gajdeczka, Übungsbuch der Geometrie für obere Klassen. 2. und 3. Auflage. Geb. K 2·50

Wallentin, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Gymnasien. 12. und 13. Auflage. Geb. K 3·—.

Höfler, Grundlehren der Psychologie. 1. und 2. Auflage. Geb. K 2·70.

Kozenn, Geographischer Schulatlas. 36. bis 41. Auflage. Geb. K 8·—.

Putzger, Historischer Atlas. 11. bis 29. Auflage. Geb. K 3·60.

Evangelische Religion.

I.—IV. Klasse: Biblische Geschichte für den evangelischen Religionsunterricht in den Schulen des Großherzogtums Baden, Karlsruhe 1872 (K 0·72).

Palmer, Der christliche Glaube und das christliche Leben. 11. Auflage. Darmstadt 1905. (Geh. K 1·68, geb. K 1·88); auch die 9. und 10. Auflage.

Gesangsbuch für die evangelische Kirche in Württemberg, Stuttgart 1881 (60 Pf.

V.—VIII. Klasse: Hagenbach, Leitfaden zum christlichen Religionsunterrichte für die oberen Klassen. Nur die 8. Auflage. (Geh. K 2·40, geb. K 2·88).

Israelitische Religion.

I.—IV. Klasse: Levy, Biblische Geschichte. (Ausgabe B für Österreich-Ungarn), herausgegeben von Badt. 13. Auflage. (Geh. K 1·50, geb. K 1·80); auch die früheren Auflagen.

IV. Klasse: Wolf, Kurzgefaßte Religions- und Sittenlehre. 9. Auflage. (Geh. K 0·40); auch ältere Auflagen.

V. und VI. Klasse: Brann, Lehrbuch der jüdischen Geschichte für die obere Stufe der österreichischen Mittelschulen. I. Teil. 2. verbesserte Auflage. (Geb. K 1·80).

VII. und VIII. Klasse: Ehrmann, Geschichte der Israeliten. II. Teil. 3. Auflage. (Geb. K 1·60).

Bibeltexte. I. Klasse: 2. Buch Mosis. (Geb. K 1·—). — II. Klasse: 5. Buch Mosis. (Geb. K 0·90); beide in der Schulausgabe von Kayserling. — III.—VI. Klasse: Hagiographen. (Geb. K 1·30). — VII. und VIII. Klasse: Prophetae posteriores. (Geb. K 1·30). — I.—VIII. Klasse: Gebetbuch in jeder Ausgabe.

Böhmische Sprache.

I. Abteilung: Charvát, Lehrgang der böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen. I. Teil. 2. und 3. Auflage. (Geb. K 1·50).

II. Abteilung: Charvát, Lehrgang der böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen. II. Teil. 2. und 3. Auflage. (Geb. K 2·20).

III. Abteilung: Charvát, wie in der II. Abteilung.

IV. Abteilung: Charvát-Ouředníček, Lehrgang der böhmischen Sprache für deutsche Mittelschulen. III. Teil. (Geh. K 2·—, geb. K 2·40).

Französische Sprache.

Fetter und Alscher, Lehrgang der französischen Sprache. I. und II. Teil. 10. und 11. Auflage. (Geh. K 2·—, geb. K 2·30).

Stenographie.

Scheller, Lehr- und Lesebuch der Gabelsbergerschen Stenographie. 5. bis 12. Auflage. (Geb. K 3·60).

Gesang.

I. Abteilung: Friedländer, Chorschule nach Stockhausens Methode. (Geb. K 1·30).

II. Abteilung: Mendl, Liederbuch für Studierende an österreichischen Mittelschulen. 2. Auflage. (Geb. K 2·20).

IV. Lehrmittel.

1. Verfügbare Geldmittel.

a) Barrest aus dem Schuljahre 1907/08	K	163·46
b) Aufnahmegebühren von 46 neu eingetretenen Schülern à K 4·20	K	193·20
c) Lehrmittelbeiträge von 269 Schülern à K 2·—	K	538·—
d) Gebühren für Ersatzzeugnisse (5 Semestralzeugnisse und 1 Maturitätszeugnis)	K	32·—
e) Zuschuß zur Normaldotation von K 880·—	K	116·80
Zusammen	K	1.043·46

2. Zuwachs der Lehrmittel-Sammlungen.

1. Lehrer-Bibliothek.

Stand im Vorjahre: 2860 Inv.-Nr. in 5297 St.

Inv.-Nr.	Fortl. Zahl	I. Encyklopaedie.	
861.	3.	Bibliotheca philologica. Jahrg. 1908. Leipzig 1908. 8.	I. 3
862.	55.	Jahrbuch der Naturwissenschaften 1907/08. 23. Jahrg. Hggb. von Dr. M. Wildermann. Freiburg in Breisgau 1908. Gr. 8.	I. 53

Inv.-Nr.	Fortl. Zahl	
2863.	15.	Jahrbücher, Neue, für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Literatur und für Pädagogik. Hggb. von J. Ilberg und B. Gerth. 12. Jahrg. 1909. Leipzig 1909. 2 Bände. Lex. 8. . . . . I. 14
2864.	26.	Literaturblatt für germanische und romanische Philologie. Hggb. von C. Behagel und Fr. Neumann. 30. Jahrg. Leipzig 1909. Hoch 4 . . . . I. 25
2865.	47.	Zeitschrift für österreichische Gymnasien. Gegenwärtig redigiert von J. Huemer, E. Hauler und H. v. Arnim. 60. Jahrg. Wien 1909. Gr. 8 . . . . I. 45

II. Philosophie.

2866.	102.	Wundt, Völkerpsychologie. Eine Untersuchung der Entwicklungsgesetze von Sprache, Mythus und Sitte. I. Band, 1. und 2. Teil. Leipzig 1904. Gr. 8 2 Bände . . . . II. 80
2867.	103.	Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Hggb. von H. Ebbinghaus und A. König. Hamburg und Leipzig 1893—97. V.—XIV. Band. Gr. 8. (Geschenk des H. Prof. Mendel.) II. 81

III. Paedagogik.

2868.	81.	Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis der Gymnasien und Realschulen. Hggb. von W. Fries und R. Menge. Halle a. S. 1908/09. 4 Hefte. Gr. 8. . . . . III. 66
2869.	190.	Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Begründet von Karl Kehrbach. 18. Jahrg. Berlin 1908. Gr. 8 . . . . III. 158
2870.	198.	— Beiheft zu den Mitteilungen Nr. 15.: Historisch-pädagogischer Literaturbericht über das Jahr 1906. Hggb. von der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Berlin 1908. Gr. 8. . . III. 158
2871.	199.	— Beiträge zur österreichischen Erziehungs- und Schulgeschichte. Hggb. von der österreichischen Gruppe der Gesellschaft. X. Heft.: Geschichte der Theresianischen Schulreform in Böhmen von A. Weiß. Wien und Leipzig 1908. Gr. 8. . . . . III. 159
2872.	156.	Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Kultus und Unterricht. Jahrg. 1909. Wien 1909. Lex. 8. . . . III. 127
2873.	200.	Die Mittelschul-Enquete im k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht, 21.—25. Jänner 1908. Hggb. im Auftrage des Ministeriums für Kultus und Unterricht. Wien 1908. Gr. 8. . . . III. 160

V. Klassische Philologie, ferner Archäologie und Epigraphik.

C. Grammatik, Literaturgeschichte, Lexika, Erklärungsschriften, Archäologie und Epigraphik.

2874.	89.	Jahresbericht über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft; begründet von C. Bursian. Hggb. von W. Kroll. 36. Jahrg. 1908. Leipzig o. J. Gr. 8 . . . . V. C. 85
2875.	89.	— Dazu Supplementband: Jahresbericht über die Literatur zur antiken Mythologie und Religionsgeschichte aus den Jahren 1898—1905. Von O. Gruppe. Leipzig 1908. Gr. 8 . . . . V. C. 85
2876.	220.	Jahreshefte des österreichischen archaeologischen Institutes in Wien. XI. Band. Wien 1908. (Geschenk des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht) 4 . . . . V. C. 213
2877.	113.	Lexikon, Ausführliches, der griechischen und römischen Mythologie. Hggb. von W. Roscher. 57.—59. Heft. Leipzig 1908/09. Lex. 8 V. C. 108
2878.	243.	Mitteilungen des Kaiserlich deutschen archaeologischen Institutes. Athenische Abteilung. XXXIII. Band. Athen 1908. Lex. 8 V. C. 235
2879.	230.	Thesaurus linguae latinae. Editus auctoritate et consilio academiarum quinque Germanicarum Beroliensis, Gottingensis, Lipsiensis, Monacensis, Vindobonensis. Vol. III. fasc. 3., 4.; vol. IV. fasc. 4., 5. Supplement fasc. 1. Leipzig 1908/09. Fol. . . . . V. C. 223

VI. Moderne Philologie.

2880.	88.	Herders sämtliche Werke. XIV. Band. Hggb. von B. Suphan. Berlin 1909. Gr. 8 . . . . VI. 86
2881.	257.	Literaturgeschichte, Deutsch-österreichische. Hggb. von J. W. Nagl und J. Zeidler. 13. und 14. Lieferung des Schlußbandes. Wien 1909. Lex. 8 . . . . VI. 245

Inv.-Nr.	Fortl. Zahl	VIII. Erd-, Länder- und Völkerkunde.
2882.	100.	Zeitschrift für Schulgeographie. Hggb. von G. Rusch. 30. Jahrg. 1908/09. Wien 1908. Gr. 8 . . . . VIII. 82

X. Geschichte der österr.-ung. Monarchie und deren Länder.

2883.	156.	Časopis moravského musea zemského. Vydává moravská musejní společnost. Ročník VIII. V Brně 1908. Lex. 8. (Geschenk des mähr. Landesmuseums) . . . . X. 134
2884.	158.	Zeitschrift des mähr. Landesmuseums. Hggb. von der mähr. Museumsgesellschaft. VIII. Band. Brünn 1908. Lex. 8. (Geschenk des mähr. Landesmuseums) . . . . X. 136

XI. Mathematik.

2885.	119.	Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 und bis 1901 hggb. von J. C. V. Hoffmann. Gegenw. hggb. von H. Schotten. 40. Jahrg. Leipzig und Berlin 1909. Gr. 8 XI. 114

XII. Naturgeschichte.

2886.	215.	Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn. 46. Band. 1907. Brünn 1908. Gr. 8. (Geschenk des H. Prof. Zatloukal) XII. 108
2887.	230.	Zeitschrift, Österreichische, botanische. Hggb. und redig. von Dr. Richard R. v. Wettstein. 59. Jahrg. Wien 1909. Gr. 8 . . . . XII. 118

XIII. Physik (mit Astrologie und Meteorologie).

2888.	169.	Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre. Hggb. von Dr. Karl Rosenberg. 2. Auflage, I. Band. Wien und Leipzig 1908. Gr. 8 . . . . XIII. 102

XVII. Verkehr, Handel und Industrie.

2889.	21.	Jahrbuch der Export-Akademie des k. k. österreichischen Handelsmuseums. 10. Studienjahr. Wien 1908. Gr. 8. (Geschenk des k. k. österreichischen Handelsmuseums) . . . . XVII. 22

Stand am Schlusse 1908/09: 2889 Inv.-Nr. in 5343 St.

2. Programmsammlung.

Stand im Vorjahre: 22.304 St.

Dazu kamen im Laufe des Schuljahres im Tauschwege 869 St., davon 357 österreichische und 512 reichsdeutsche Programme, teils mit wissenschaftlichen Abhandlungen, teils ohne solche; mithin

Stand am Schlusse 1908/09: 23.173 St.

3. Schülerbibliothek.

Stand im Vorjahre: 1106 Inv.-Nr. in 1217 St.

Zuwachs im Schuljahre 1908/09:

Inv.-Nr.	
1092.	E. S. Thompson, Bingo und andere Tiergeschichten.
1109.	K. Simrock, Rheinsagen.
1045.	J. Nießen, Kunsthandwerk im Tierreich.
1107.	Fritz Reuters Werke (4 Bände).
1108.	Th. Etzel, Fabeln und Parabeln der Weltliteratur.
1110.	Chr. Musmacker, Das Wasser im Dienste des Menschen.
1111.	Kügelgen, Jugenderinnerungen eines alten Mannes.
1112.	Das neue Universum, Jahrg. 1908.

Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09 nach Ausscheidung von 9 Inventar-Nummern in 9 Stücken: 1105 Inv.-Nr. in 1219 St.

4. Geographisch-historisches Kabinett.

Diese Sammlung wurde unter Ausscheidung unbrauchbar gewordener und veralteter Lehrmittel neu inventarisiert. Der Stand des Kabinettes nach dem neuen, durch Erlaß des k. k. Landesschulrates vom 2. März 1909, Z. 5619, genehmigten Inventar betrug: 290 St. in 114 Inv.-Nr.

Zuwachs im Schuljahre 1908/09:

115. Kiepert, Wandkarte von Europa (physikalisch).
116. Kiepert, Wandkarte von Frankreich (physikalisch stumm).

Inv.-Nr.
117. Deutsches Sprachgebiet in Mitteleuropa. Entw. von Paul Langhans.

Stand am Schlusse 1908/09: 117 Inv.-Nr. in 293 St., und zwar:

Globen und Tellurien	3 St.
Wandkarten	111 „
Atlanten	9 „
Bilder	146 „
Reliefs und Modelle	7 „
Wandtafeln u. Bildwerke	17 „
	293 St.

5. Münzensammlung.

Stand wie im Vorjahre 2289 St., und zwar: 699 Silbermünzen, 68 Papierwertzeichen; der Rest, darunter 45 Denkmünzen, aus verschiedenem Metall; der antike Teil der Sammlung, der im archäologischen Kabinette untergebracht ist, zählt 185 St.

6. Sammlung der math. Lehrmittel.

Stand wie im Vorjahre: 142 Inv.-Nr. in 261 St.

7. Sammlung der Lehrmittel für Physik und Chemie.

Stand im Vorjahre: 610 Inv.-Nr. in 1021 St. Zuwachs im Schuljahre 1908/09:

Inv.-Nr.
611. Doppelpendel nach Airy zur Darstellung der Lissajouschen Figuren . . 2 St.
612. Henleys allgemeiner Entlader . 2 „
613. Konduktorkugeln . . . . 2 „
614. Apparat zur Demonstration der Hertz'schen Spiegelversuche . . . 7 „
615. Röntgenröhre mit Regenerierung für 20 $^{m}/_{m}$ . . . . 1 „

Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09: 615 Inv.-Nr. in 1035 St.

8. Sammlung der naturgeschichtlichen Lehrmittel.

Stand im Vorjahre: 2302 Inv.-Nr. in 9497 St. Zuwachs im Schuljahre 1908/09:

A. Durch Schenkung:

Inv.-Nr.
A 780. Teichmuschel (Kustos d. Kabinettes).
A 781. Rötlicher Seestern (ders.).
A 782. Haeckel, Kunstformen der Natur. (Singer Otto, II. Kl.).
C 1207. Analcim, 4 St. (Prof. Dr. Burggraf).
C 1208. Natrolith, 3 St. (ders.).
C 1209. Graphit (Kustos des Kabinettes).
C 1210. Weißes Roheisen (ders.).
C 1211. Arsennickelkies (ders.).
C 1212. Markasit (ders.).
C 1213. Fahlerz (ders.).
C 1214. Quarz-Quarzfels (ders.).
C 1215. Steinsalz (ders.).
C 1216. Kalkspat — bunter Marmor (ders.).
C 1217. Körniger Kalkspat (ders.).
C 1218. Kalkspat-Tropfstein, 2 St. (ders.).
C 1219. Kalkspat-Mergel (ders.).
C 1220. Eisenspat (ders.).
C 1221. Schwerspat, 2 St. (ders.).
C 1222. Turmalin-Schörl (ders.).
C 1223. Andalusit (ders.).
C 1224. Chrysoberyll (ders.).
C 1225. Granat-Kaneelstein (ders.).
C 1226. Granat (ders.).
C 1227. Kaliumglimmer (ders.).
C 1228. Epidot, 2 St. (ders.).
C 1229. Mikroklin (ders.).
C 1230. Albit (ders.).
C 1231. Gelberde (ders.).
C 1232. Grauwacke, 2 St. (ders.).
C 1233. Granatfels, 2 St. (ders.).
C 1234. Talkschiefer (ders.).
C 1235. Sandstein mit Dendriten (ders.).
C 1236. Muschelsandstein (ders.).
C 1237. Quarz-Bergkristall (Prof. Salzmann).
C 1238. Turmalin-Rubellit (ders.).
C 1239. Opal (ders.).
C 1240. Schwerspat (ders.).
C 1241. Quarz-Bergkristall (Universitätshörer Jochim).
C 1242. Quarz-Amethyst (ders.).
C 1243. Orthoklas (Universitätshörer Jedlička).
C 1244. Antimonglanz (Universitätshörer Engel).
C 1245. Kalkspat (ders.).
C 1246. Schwerspat (ders.).
C 1247. Kalisalpeter, 2 St. (Lampl A., VIII. Kl.).
C 1248. Kupferkies, 2 St. (Schafranek, VII. Kl.).
D 275. Palaeoniscus sp. (Kustos des Kabinettes).
D 276. Terebratula biplicata (ders.).
D 277. Terebratula quinqueplicata, 2 St. (ders.).
D 278. Terebratula sp. (ders.).
D 279. Lepidodendron laricinum (ders.).
D 280. Flabellaria sp. (ders.).

B. Durch Kauf:

A 783. Meerschweinchen.
A 784. Skelett eines Erdmolches.
A 785. Metamorphose des Seidenspinners.
A 786. Metamorphose der Kiefernblattwespe.

A Zoologie	759 Inv.-Nr.	in 3707 St.
B Botanik	45 „	„ 1961 „
C Mineralogie	1245 „	„ 2503 „
D Petrefakten	280 „	„ 399 „
E Verschiedenes	28 „	„ 995 „

Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09: 2357 Inv.-Nr. in 9565 St.

9. Sammlung der Zeichenlehrmittel.

Stand im Vorjahre: 406 Inv.-Nr. in 2293 St.

Zuwachs im Schuljahre 1908/09:

Inv.-Nr.
407. Segelfalter.
408. Aurorafalter.
409. Schwalbenschwanz.
410. Nonne.
411. Vasen, 3 St.
412. Posthorn.

Inv.-Nr.
413. Laterne aus Papiermaché.
414. Fußbank.
415. Uferlandschaft.
416.—423. Holzmodelle, 26 St.
424. Dreiteilige Laterne.
425. Künstliche Rosenzweige, 2 St.
426. Bildnis Sr. Majestät.

Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09: 426 Inv.-Nr. in 2334 St.

10. Musikaliensammlung.

Stand wie im Vorjahre: 211 Inv.-Nr. in 1681 St.

11. Turnlehrmittel.

Stand wie im Vorjahre: 45 Inv.-Nr. in 209 St.

12. Geographisch-ethnographische Sammlung.

Diese Sammlung erfuhr insofern eine Veränderung, als die Nummern C L_1—C L_{28} Lehmanns Geographische Charakterbilder, 22 Stück, Inv.-Nr. 37—54, 155, 694, 695, 697; Lehmanns Geographische Charakterbilder, 6 Stück, Inv.-Nr. 55—60) und C H_1—C H_3 Hölzels Städtebilder, 3 Stück, Inv.-Nr. 698 bis 700) in 31 Stücken in das geographisch-historische Kabinett übertragen wurden. (Landesschulrats-Erlaß vom 2. März 1909, Z. 5619.)

Stand am Schlusse des Schuljahres 1907/08: 954 Inv.-Nr. in 1095 St.
Übertragen ins geogr.-historische Kabinett . 31 „ „ 31 „
Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09 . 923 Inv.-Nr. in 1064 St.

13. Archäologisches Kabinett.

Stand im Vorjahre 149 Inv.-Nr. in 306 St.

Anläßlich der Anlage eines neuen Inventars der geographisch-historischen Sammlung wurden folgende Inventarnummern aus dieser Sammlung übertragen:

Inv.-Nr.
VII 18. Launitz, Wandtafeln: Olympia.
VII 19. Launitz, Wandtafeln: Hoplit.
VII 20. Langl, Griechische Götter- und Heldengestalten (18 Lieferungen).
VII 21. Conze, Heroen- und Göttergestalten der griechischen Kunst (2 Abteilungen).

Stand am Schlusse des Schuljahres 1908/09: 153 Inv.-Nr. in 328 St.

Hinsichtlich der Anlage und Einrichtung dieser Sammlung wird auf den einschlägigen Aufsatz im Programme des Schuljahres 1894/95, Seite 18—25, verwiesen.

Aus jenen Geldern, die in früheren Jahren mehrere Gönner der Anstalt für Anstaltszwecke zur Verfügung gestellt haben, bleibt nach Abzug einer Auslage für Reparaturen noch ein Guthaben von K 15·20.

Die Gymnasialkapelle

besitzt als Barvermögen die Sparkasse-Einlage Nr. 154.237 in der Höhe von K 117·34.

V. Reifeprüfungen.

a) Nachtrag zum Schuljahre 1907/08.

1. Die mündlichen Reifeprüfungen im Sommertermine 1908 fanden vom 6. bis 8. Juli unter dem Vorsitze des Herrn k. k. Direktors Karl Ritter von Reichenbach statt. Von den 27 gemeldeten öffentlichen Schülern der VIII. Klasse und 2 Externen wurden 2 Schüler nicht zugelassen, 1 trat vor der Prüfung zurück. Von den 23 öffentlichen Schülern und 2 Externen, die sich der Prüfung unterzogen, wurde ein Schüler für reif mit Auszeichnung erklärt, 20 öffentliche Schüler und die beiden Externen erhielten ein Zeugnis der Reife.
2. Zur Reifeprüfung im Herbsttermine wurden 2 öffentliche Schüler, die eine Wiederholungsprüfung abzulegen hatten, und 3 Externe zugelassen; ein Externer trat jedoch vor der schriftlichen Prüfung zurück.

Bei der vom 21. bis 23. September 1908 vorgenommenen schriftlichen Prüfung wurden den Kandidaten nachstehende Aufgaben gestellt:

1. Aus der deutschen Sprache:
   a) Wenn das Leben eine Reise ist, wer sind die Führer?
   b) Italien, das Land der Sehnsucht für die Deutschen.
   c) Unvergessen bleibt dem Volke, wer des Volkes nicht vergaß. (Zum Regierungsjubiläum des Kaisers.)
2. Aus der lateinischen Sprache: Tacitus, ab excessu divi Augusti I 55—56.
3. Aus der griechischen Sprache: Homer, Odyssee XVIII 243—289.

Bei der am 28. September 1908 unter dem Vorsitze des Herrn Direktors Karl Ritter von Reichenbach abgehaltenen mündlichen Prüfung wurde ein öffentlicher Schüler und ein Externer für reif erklärt.

3. Zur Reifeprüfung im Februartermine waren 4 Abiturienten der Anstalt zugelassen.

Bei der schriftlichen Prüfung, die vom 28. bis 30. Jänner abgehalten wurde, waren folgende Aufgaben vorgelegt worden:

1. Aus der deutschen Sprache:
   a) Eisen, Kohle, Wasser, eine mächtige Trias.
   b) Reisen führt zur Vaterlandskunde und Vaterlandskunde in Österreich zur Vaterlandsliebe.
   c) Not ist die Wage, die des Freundes Wert erklärt, Not ist der Prüfstein auch von deinem eigenen Wert.
2. Aus der lateinischen Sprache: Tacitus, Dialogus 28 f.
3. Aus der griechischen Sprache: Homer, Odyssee XVII 26—64.

Bei der am 17. Februar 1909 unter dem Vorsitze des k. k. Direktors des Ersten deutschen Gymnasiums in Brünn, Herrn Regierungsrates Karl Ritter von Reichenbach, abgehaltenen mündlichen Prüfung wurden 3 Abiturienten für reif erklärt.

Übersicht über das Ergebnis der Reifeprüfungen

in den drei Terminen:

Termin	Kategorie	Gemeldet	Nicht zugelassen		Vor der Prüfung zurückgetreten	Geprüft	Ergebnis der Prüfung				
			wegen zweiter Fortgangsklasse	wegen einer Wiederholungsprüfung			reif mit Auszeichnung	reif	nicht reif; reprobiert auf ½ Jahr	1 Jahr	unbestimmte Zeit
Sommer (6.—8. Juli 1908)	Öffentl. Schüler	27	1	2	1	23	1	20	1	—	1[1])
	Privatisten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Externe	2	—	—	—	2	—	2	—	—	—
Herbst (28. Septemb. 1908)	Öffentl. Schüler	2[2])	—	—	—	2	—	1	1	—	—
	Privatisten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Externe	3	—	—	1	2	—	1	—	1	—
Februar (17. Februar 1909)	Öffentl. Schüler	4[3])	—	—	—	4	—	3	—	—	1[4])
	Privatisten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Externe	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

[1]) Wurde mit Zustimmung des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 1. August 1908, Z. 33.349, ausnahmsweise zur zweiten Wiederholung der Reifeprüfung nach einem halben Jahre zugelassen. (Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 4. September 1908, Z. 21.279).

[2]) Abiturienten, welche eine Wiederholungsprüfung abzulegen hatten.

[3]) Drei Abiturienten waren im Sommer, beziehungsweise Herbsttermine reprobiert worden; einer im Sommertermine 1907, zugelassen mit Zustimmung des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 18. Jänner 1909, Z. 1049 (Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 27. Jänner 1909, Z. 2423).

[4]) Zur zweiten Wiederholung der Reifeprüfung im Sommertermine 1909 zugelassen durch Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 14. April 1909, Z. 8843.

Im ganzen meldeten sich zu den 3 Terminen 28 Abiturienten der Anstalt und 5 Externe. Ein öffentlicher Schüler wurde nicht zugelassen, ein öffentlicher Schüler und ein Externer traten vor der Prüfung zurück. Im ganzen unterzogen sich demnach 26 Abiturienten der Anstalt und 4 Externe der Prüfung.

Für reif wurden erklärt 25 öffentliche Schüler, darunter einer mit Auszeichnung und 3 Externe; von den Approbierten legten die Prüfung in dem Termine, in dem sie

diese mit Erfolg bestanden, zum ersten Male ab 22 öffentliche Schüler und zwei Externe, zum zweiten Male 5 öffentliche Schüler und 1 Externer, zum dritten Male ein öffentlicher Schüler. Reprobiert wurden im ganzen 2 Prüflinge, 1 öffentlicher Schüler und 1 Externer.

b) Schuljahr 1908/09:

Im Sommertermine 1909 meldeten sich zur Ablegung der Prüfung 26 öffentliche Schüler der VIII. Klasse und 6 Externe, und zwar:

Lauf. Nr.	Name	Ort	Land	Jahr	Von den Kandidaten erklärten sich zuzuwenden:
		der Geburt			
1	Bauer Paul	Wien	N.-Österreich	1891	Philosophie (human.)
2	Czerny Wilhelm	Brünn	Mähren	1891	Beamtenlaufbahn
3	Deutsch Emanuel	Lissitz	Mähren	1889	Technik
4	Exel Heinrich	Brünn	Mähren	1890	Medizin
5	Futter Hermann	Brünn	Mähren	1889	Tierarzneikunde
6	Fürst Erwin	Austerlitz	Mähren	1891	unbestimmt
7	Fürst Leo	Austerlitz	Mähren	1891	unbestimmt
8	Herzel Franz	Brünn	Mähren	1891	Medizin
9	Hüttl Walter	Olmütz	Mähren	1891	Philosophie (human.)
10	Japp Richard	Rzikowitz	Mähren	1891	Beamtenlaufbahn
11	Jarosch Ottokar	Brünn	Mähren	1890	Beamtenlaufbahn
12	Kantor Philipp	Butschowitz	Mähren	1890	unbestimmt
13	Kolarž Richard	Brünn	Mähren	1890	Beamtenlaufbahn
14	Lampl Viktor	Brünn	Mähren	1890	unbestimmt
15	Mandl Josef	Svatobořitz	Mähren	1891	Theologie
16	Mautner Leo	Brünn	Mähren	1891	unbestimmt
17	Mokry Gottlieb	Bohumielitz	Mähren	1889	Beamtenlaufbahn
18	Schild Ignaz	Kobeřitz	Mähren	1889	Militär
19	Schwed Ernst	Proßnitz	Mähren	1891	Philosophie (human.)
20	Spieler Otto	Koritschan	Mähren	1889	Philosophie (human.)
21	Stern Ludwig	Triesch	Mähren	1891	Jus
22	Strebinger Rudolf	Gaya	Mähren	1889	Medizin
23	Winkler Emil	Neutitschein	Mähren	1891	Philosophie (human.)
24	Wuczkowski Josef	Müglitz	Mähren	1891	Philosophie (real.)
25	Zeilender Adolf	Andrichau	Galizien	1889	unbestimmt
26	Zerzawy Adalbert	U.-Tannowitz	Mähren	1890	Medizin
27	Ballács Valerie, Ext.	Weidenberg	Siebenbürgen	1885	Philosophie (human.)
28	Dynes Helene, Ext.	Olmütz	Mähren	1890	Philosophie (real.)
29	Hochstetter Alfred, Ext.	Brünn	Mähren	1890	Technik
30	Lampl Artur, Ext.	Königsfeld	Mähren	1889	unbestimmt
31	Thom Bernhard, Ext.	Jassy	Rumänien	1883	Chemie
32	Weiler Hedwig, Ext.	Wien	N.-Österreich	1888	Philosophie (human.)

Von den genannten öffentlichen Schülern haben 24 die Gymnasialstudien in 8, 2 in Jahren beendet.

Die schriftlichen Prüfungen wurden auf Grund des Erlasses des k. k. mähr. Landeschulrates vom 2. Mai 1909, Z. 11.343, vom 1. bis 3. Juni abgehalten. Die Aufgaben lauteten:

1. Aus der deutschen Sprache:
   a) Wie haben die großen Erfindungen der Neuzeit auf das Kulturleben der Gegenwart eingewirkt?
   b) Österreichs Anteil an den Kämpfen gegen Napoleon.
   c) Die Natur zeigt nicht nur, wie klein, sondern auch wie groß der Mensch ist.
2. Aus der lateinischen Sprache: Vergil, Aen. VIII 608—648.
3. Aus der griechischen Sprache: Platon, Protogoras c. XII.

Die mündlichen Prüfungen werden vom 30. Juni bis 3. Juli l. J. unter dem Vorsitze es k. k. Direktors des Ersten deutschen Staatsgymnasiums, des Herrn Regierungsrates arl Ritter von Reichenbach, abgehalten. Das Ergebnis wird im Berichte über das ichste Schuljahr bekanntgegeben werden.

VI. Unterstützungswesen.

1. Stipendien.

An Schüler der Anstalt waren folgende Stipendien verliehen:

Lauf. Nr.	Name der Stiftung:	Betrag K	Betrag h	Name des Stiftlings:
1	Johann Jorda'sche Kaiser Franz Josef-Jubiläumsstiftung Nr. 1	424	—	Mohler Friedrich, II.
2	Julie Gomperz'sches Handstipendium	100	—	Kornitzer Paul, III.
3	Johann Jorda'sche Kaiser Franz Josef-Jubiläumsstiftung Nr. 2	204	—	Waschak Josef, III.
4	Julie Gomperz'sches Handstipendium	100	—	Blum Karl, VI.
5	Georg Albel'sches Seminarstipendium Nr. 2	140	—	Mikschiczek Karl, VI.
6	Sparkassestipendium Nr. 2	200	—	Brief Otto, VII.
7	v. Kellner'sche Kaiser Franz Josef-Jubiläumsstiftung Nr. 1	133	34	Weger Friedrich, VII.
8	Sparkassestipendium Nr. 1	200	—	Wiesner Gustav, VII.
9	v. Kellner'sche Kaiser Franz Josef-Jubiläumsstiftung Nr. 2	133	33	Exel Heinrich, VIII.
10	v. Kellner'sche Kaiser Franz Josef-Jubiläumsstiftung Nr. 3	133	33	Schwed Ernst, VIII.
11	Adam Schwarz'sches Seminarstipendium Nr. 3	140	—	Wuczkowski Josef, VIII.
12	Josef Swoboda'sche Familienstiftung	320	—	Bailonj Adolf, VI.
13	Julie Gomperz'sches Handstipendium	100	—	Grünwald Armin, II.
14	Julie Gomperz'sches Handstipendium	100	—	Karpelis Artur, IV.
	Gesamtbetrag	2428	—	

Außerdem standen mehrere Schüler im Genusse von Privatstipendien.

2. Schülerlade.

Rechnungsabschluß für das Schuljahr 1908/09.

α) Einnahmen:

1.	Barrest aus dem Schuljahre 1907/08	K 1298·89
2.	Spende des Abiturienten Eduard Petříček	„ 20·—
3.	Anläßlich des Allerhöchsten Regierungsjubiläums spendeten:	
	1. Herr Heinrich Katscher, Fabrikant in Brünn	„ 15·—
	2. Herr Max Ornstein, Fabrikant in Brünn	„ 50·—
	3. Herr Professor Dr. Georg Burggraf	„ 30·—
	4. Herr Albert Morgenstern, Fabrikant in Brünn	„ 20·—
	5. Frau Fanni Gerstner in Brünn	„ 10·—
	Fürtrag . . .	K 1443·89

Übertrag	K 1443·89
6. Herr Alois Beran, Fabrikant in Brünn	„ 40·—
7. Herr Gabriel Graf von Gudenus, Gutsbesitzer in Morawetz	„ 200·—
8. Herr Jonas Löw-Beer, Fabrikant in Brünn	„ 20·—
9. Herr Felix Löw-Beer, Fabrikant in Elisental	„ 20·—
10. Herr Jacques Weiner, Gutsbesitzer in Brünn	„ 30·—
4. Für Lehrmittel	„ 222·70
5. Erträgnis der satzungsmäßigen Sammlung*)	
a) zu Weihnachten	„ 292·90
b) zu Ostern	„ 192·92
6. Zinsen der Wertpapiere	„ 518·40
Zusammen	K 2980·81

β) Ausgaben:

1. Ankauf von Schulbüchern	K 202·18
2. Für Turnschuhe	„ 27·40
3. Buchbinderarbeiten	„ 142·60
4. Eislaufkarten	„ 25·60
5. 20 Stück Zeichenblocks	„ 18·—
6. Unterstützungen in Bargeld	„ 50·—
7. Ankauf von Kleidern und Schuhen	„ 103·60
8. Anläßlich des Allerhöchsten Regierungsjubiläums Spenden von 100 K an 8 Schüler	„ 800·—
9. Kleinere Ausgaben	„ 35·61
10. Satzungsmäßige Einlage	„ 125·—
Zusammen	K 1529·99

Somit verbleibt mit 30. Juni im Entgegenhalte der Einnahmen mit 1681 K 92 h d der Ausgaben mit 1529 K 99 h ein Überschuß von 151 K 93 h, der mit dem Bar-nde von 1298 K 89 h aus dem Vorjahre die Summe von 1450 K 82 h ergibt.

---

*) Zu den satzungsmäßigen Sammlungen steuerten bei die Schüler:

I. Klasse: Bartl 2, Blum 0·4, Čihaček 0·5, Engel 2, Fischer 1, Fluger 14, Golliasch 1, rmann 3, Jarosch 1. Jung 0·2, Kohn 10, Kreuzinger 0·4, Löffler 2, Meinl 7, Munk 1, hammer 2, Neuwirth 8, Österreicher 7, Pawlik 1, Puttner 0·42, Schallinger 3, Theimer 4, ttmann 1, Wodak 0·4, Zellner 1 (zus. K 73·32).

II. Klasse: Altbach 1, Aschkenes 1, Blum 0·2, Bernatzik 1·6, Dvořak 1, Fleischer 5·4, nkl 4, Frey 4, Glaser 2, Hein 2, Hummer 2, Mohler 2, Matischek 2, Mödritzer 1·5, iß 0·1, Rischawy 1, Singer Otto 1, Schuh 1, Škarohlid 0·4, Srnec 2, Waller 1·4, esner 0·9, Winkler Josef 0·2, Wietrzny 0·6 (zus. K 38·3).

III. Klasse: Bass 1·6, Bermann 5, Bittermann 2, Dvorsky 4, Ellbogen 1, Frieß 1, esam 2, Kroczak 2, Meinl 7, Schallinger 4, Schwed 1, Swoboda 4, Uxa 4, Waschak 2, inreb 3, Wittmann 2 (zus. K 45·6).

IV. Klasse: Aberle 3, Back 6, Barth 1, Blum 2, Böhm 2, Deutscher 2, Dub 6, cha 7, Flögl 5, Freund 2, Gloger 4, Golliasch 2, Haas 4, Haftel 2, Heinisch 5, Heinke 8, nmer 3, Jellinek 1, Karpelis 2, Kuczera 3, Meinl 9, Müller 4, Obadalek 2, v. Offer-n 20, Rzehak 3, Schneider 2, Schönfeld 2, Silbiger 2, Stern 3, Stryer 3, Ungar 9, horsky 2 (zus. K 131).

V. Klasse: Bohla 1, Herisch 4, Hofer 2, Jellinek Helmar 1, Kantor 3, Kessler 7, mann 2, Löwenstein 3, Mahr 5, Rosenfeld 4, Spitz 5, Winkler 3 (zus. K 40).

VI. Klasse: Blum 0·6, Fleischer 2, Fuchs 1, Glaser 1, Haber 1, Habermann 1, inek 2, Klettenhofer 7, Knöpfelmacher 3, Loria 3, Marmorstein 2, Mühle 9, Prochaska 2, ec 2, Ungar 8 (zus. K 44·6).

VII. Klasse: Adler 1, Bachrich 1·5, Bader 5, Herisch 4, Kohn 1, Löffler 5, Macha-ek 4, Petřiček 16, Reich 2, Steinermayer 6, Wiesner 0·5, Wolf 11, Zenker 2 (zus. K 60).

VIII. Klasse: Bauer 2, Deutsch 3, Futter 3, Fürst Erwin 7, Fürst Leo 6, Herzel 8, tl 2, Kantor 3, Klappenbach 2, Lampl 3, Mandl 6, Mautner 2, Spitzer 1, Winkler 5 . K 53).

γ) Vermögensstand.

1.	Bar als Guthaben für das Schuljahr 1909/10		K 1450·
2.	Spareinlage Nr. 284.039 · mit der satzungsmäßigen Einlage und den bis 30. Juni 1909 berechneten Zinsen		„ 4434·
	Zusammen		K 5885·
3.	Wertpapiere:		
	a) vink. österr. Staatsrenten-Obligation Nr. 17.042	Nom. K	6100·
	b) „ Staatsschuldverschreibung Nr. 59.284 über 2000 fl. ö. W.	„ „	4000·
	c) „ „ „ 96.971 „ 500 „ „ „	„ „	1000·
	d) Staatsschuldverschreibung Nr. 396.401 über 100 fl. ö. W.	„ „	200·
	e) „ „ 37.705	„ „	100·
	f) „ „ 38.180	„ „	100·
	g) „ „ 80.923	„ „	200·
	h) Pfandbrief der I. mähr. Sparkasse in Brünn, Serie A, Nr. 1723 über 1000 K, und Serie A, Nr. 5566 über 200 K, aus dem Legate des Freiherrn Hirsch-Gereuth	„ „	1200·
	Summe	Nom. K	12.000·

Vinzenz Zatloukal,
k. k. Professor, Mitverwalter der Schülerlade.

Karl A. Schwertassek,
k. k. Direktor.

Unterstützungsbibliothek.

Die Bibliothek der Schülerlade wurde durch Ankauf um 87 Stück vermehrt; v[on] den löbl. Verlagshandlungen Tempsky, Hölder, Hölzel, Deuticke, Pichler, Braumüll[er], Gerold, Manz, Kleinmayr und Bamberg erhielt sie 137 Lehrbücher als Geschenk; dageg[en] wurde eine größere Zahl älterer, unbrauchbar gewordener Bücher ausgeschieden.

Im ganzen wurden an 141 Schüler 1206 Lehrbücher verliehen.

3. Studentenkrankenverein.

Auch im abgelaufenen Schuljahre entfaltete der unter dem Protektorate Sein[er] Exzellenz des Herrn Grafen Karl Zierotin stehende Verein zur Pflege und Unt[er]stützung unbemittelter kranker Schüler (gegründet am 26. November 1904) seine erfol[g]reiche Tätigkeit. Es wurden während des Schuljahres an Schüler dieser Anstalt 46 Anw[ei]sungen auf ärztliche Behandlung, darunter 7 auf zahnärztliche, ausgestellt; außerde[m] wurden 5 Anweisungen auf Ausfolgung von Brillen, ferner von Mineralwässern sowie a[uf] Benützung von Bädern ausgegeben.

Zu unterstützenden Mitgliedern zählt der Verein alle jene, die zur Förderung d[er] Vereinszwecke einen jährlichen Beitrag von mindestens zwei Kronen zahlen. Anspru[ch] auf die Wohltaten des Vereines erwerben unbemittelte Schüler der deutschen Mittelschul[en] und der ihnen gleichgestellten deutschen Anstalten in Brünn durch eine Bescheinigun[g], um welche sie binnen der ersten vier Wochen eines jeden Schuljahres beim Verein[s]ausschusse schriftlich anzusuchen haben; diese Bescheinigung wird nur für die Dauer ein[es] Schuljahres gegen Entrichtung des Betrages von einer Krone ausgestellt.

Die Direktion spricht allen p. t. Freunden und Gönnern der Anstalt und Woh[l]tätern der studierenden mittellosen Jugend für jede Art von Unterstützung u[nd] Förderung ihren innigsten Dank aus und bittet, den Bestrebungen zugunsten d[er] armen Schüler auch fernerhin ihren kräftigen Beistand zu leihen.

VII. Körperliche Ausbildung der Jugend.

1. Verfügbare Geldmittel.

Aus dem Vorjahre betrug der Aktivrest des Jugendspielfondes 128 K 51 h, d[ie] Spielbeiträge der aufgenommenen Schüler ergaben 269 K. Somit standen im abgelaufen[en] Schuljahre 397 K 51 h für die Zwecke des Jugendspieles zur Verfügung, eine leider z[u] geringfügige Summe, um die böswillig vernichtete Einfriedung des Jugendspielplatz[es] wiederherzustellen und damit den schönen Platz gemäß seiner stiftsbriefmäßigen Bestim[m]ung den Schülern der Anstalt zur alleinigen Benützung zu sichern.

2. Körperliche Übungen.

a) Dem J u g e n d s p i e l e wurde im Berichtsjahre die gebührende Aufmerksamkeit gewendet. Unter Leitung des Turnlehrers Professor Salzmann wurde an jedem schönen terrichtsfreien Nachmittage unter zahlreicher Beteiligung der Schüler eifrig gespielt.

Trotz der ungünstigen Witterung im Herbste des Vorjahres und im April des ufenden Jahres hat die Besuchsziffer die Zahl des Vorjahres erreicht.

Einen genauen Überblick über die Beteiligung an den Jugendspielen bietet die benstehende Tabelle.

I. Statistik der Jugendspiele.

Spieltage	Datum	Spielstunde	Es führte die Aufsicht	Teilnehmer aus I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Summe
	1908											
1.	23./IX.	4—5½	Prof. Salzmann	—	10	12	12	2	4	1	3	44
2.	25./IX.	„	„	—	8	10	14	2	5	—	4	43
3.	28./IX.	„	„	—	10	8	18	1	6	2	4	49
4.	29./IX.	„	„	—	14	10	16	3	6	3	5	57
5.	1./X.	3½—5	„	—	12	9	14	2	4	2	3	46
6.	3./X.	„	„	—	16	11	13	4	6	4	2	56
7.	5./X.	„	„	—	10	12	15	1	8	2	3	51
8.	6./X.	3—4½	„	—	10	14	18	4	6	3	1	56
9.	8./X.	„	„	—	12	11	20	5	4	2	2	56
10.	10./X.	„	„	—	13	9	17	3	3	1	1	47
11.	15./X.	„	„	—	15	7	10	2	2	1	1	38
	1909											
12.	14./IV.	4—5½	„	20	14	10	16	4	2	3	2	71
13.	16./IV.	„	„	22	15	12	18	7	3	4	3	84
14.	17./IV.	„	„	20	14	11	17	5	2	3	2	74
15.	20./IV.	„	„	23	18	15	12	4	1	4	1	78
16.	22./IV.	„	„	18	15	13	10	6	2	2	3	69
17.	24./IV.	„	„	16	14	20	32	4	2	1	2	91
18.	27./IV.	„	„	18	10	10	15	2	4	1	1	61
9.	29./IV.	„	„	15	12	8	10	2	5	1	2	55
20.	1./V.	5—6½	„	18	19	12	22	1	6	1	1	80
21.	4./V.	„	„	12	14	16	19	2	4	1	2	70
22.	6./V.	„	„	10	12	10	10	2	3	1	1	49
23.	8./V.	„	„	14	11	8	20	1	4	1	1	60
24.	11./V.	„	„	10	8	12	14	1	3	1	—	49
25.	13./V.	5½—7	„	12	23	20	16	2	4	1	—	78
26.	15./V.	„	„	14	10	8	14	1	3	—	—	50
7.	18./V.	„	„	12	15	13	18	1	4	—	2	65
8.	22./V.	„	„	14	11	10	14	1	3	1	—	54
9.	25./V.	„	„	16	14	8	13	—	4	—	—	55
0.	27./V.	„	„	10	14	6	19	2	4	—	—	55
1.	29./V.	„	„	14	16	9	14	1	4	—	—	58
2.	1./VI.	„	„	10	8	11	9	2	5	—	—	45
3.	3./VI.	„	„	8	14	7	10	—	4	—	—	43
4.	12./VI.	„	„	8	12	10	8	—	—	—	—	38
5.	15./VI.	„	„	10	10	12	15	—	—	—	—	47
6.	17./VI.	„	„	10	15	18	12	—	—	—	—	55
7.	19./VI.	„	„	5	8	10	6	—	—	—	—	29
				359	476	412	550	80	130	47	52	2106

b) Wanderungen in die Umgebung von Brünn (im ganzen 5) wurden mit d Jugend an freien Tagen unter Führung der Herren Professoren Spandl, Mendl, Maltertheine Polach und Derbeck unternommen.

c) Das Eislaufen wurde auch im vergangenen Winter dank den günstige Witterungsbedingungen eifrig gepflegt. Ärmeren Schülern wurden Schlittschuhe zur B nützung geliehen; aus der Schülerlade wurden 25 K 60 h zum Ankaufe von Eislaufkarte verwendet.

Auch der Sport des Rodelns wurde von einer größeren Anzahl von Schülern gepfleg

d) Baden und Schwimmen. Für diese Art der körperlichen Übungen wurde den Schülern von Seite der städtischen Badeanstalten, des Charlottenbades und des Zentra bades Ermäßigungen gewährt, die sich bezüglich der in Brünn verbleibenden Schüler auc über die Ferien erstrecken.

e) Auch das Radfahren wurde von einer größeren Zahl von Schülern gepfleg

2. Statistik der Teilnahme an den körperlichen Übungen.

Art der körperlichen Übung	Klasse und Schülerzahl									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen	In %
	38	43	30	40	22	28	28	27		
An den Jugendspielen beteiligten sich	30	38	25	32	7	15	7	8	162	63
Am Schlittschuhlaufen	15	24	19	31	16	16	15	10	146	57
Am Rodeln	8	11	11	17	3	6	11	6	73	28
Am Baden	13	24	21	32	21	21	24	27	183	71
Freischwimmer sind	6	8	8	16	13	14	18	19	102	39
Schwimmunterricht erhielten im Jahre 1909	1	4	1	—	1	1	—	—	8	3
Radfahrer sind	—	1	2	14	5	7	9	7	45	17
Zahl der Ferienkolonisten in Groß-Ullersdorf im Jahre 1909	1	2	1	2	—	—	—	—	6	—
Schülerherbergskarten für die Sudeten erhielten	—	—	—	—	3	2	5	4	14	—
In den Ferien leben auf dem Lande	21	28	20	21	31	18	19	15	173	67

Die statistischen Daten schließen mit 20. Juni ab.

VIII. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 28. Juni 1908, Z. 13.074: Provis rischer Lehrplan für den Unterricht in der böhmischen Sprache.

2. Verordnung des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 11. Juni 190 Z. 26.651, betreffend das Prüfen und Klassifizieren an Mittelschulen.

3. Verordnung des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 8. August 190 Z. 34.180, betreffend die Errichtung von achtklassigen Realgymnasien und Reform-Re gymnasien.

4. Erlaß des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 3. Dezember 190 Z. 45.823, auf Grund Allerhöchster Ermächtigung (intimiert mit dem Erlasse des k. mähr. Landesschulrates vom 22. Dezember 1908, Z. 33.717): Umwandlung der hierortig Anstalt in ein achtklassiges Realgymnasium vom Schuljahre 1909/10 angefangen.

5. Erlaß des Herrn Leiters des Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 2. Jänn 1909, Z. 51.190 ex 1908, betreffend die Prüfungen der Privatisten an Mittelschule Künftighin haben an Mittelschulen die Jahresprüfungen die Regel zu bilden; es unterlie

aber keinem Anstande, auf Wunsch der Eltern oder Vormünder die Privatisten allenfalls auch am Schlusse des ersten Semesters zu einer Prüfung über den Lehrstoff dieses Semesters zuzulassen. Über eine solche Prüfung ist ihnen ein Semestralausweis auszustellen. Die Taxe für eine Jahresprüfung beträgt wie bisher 48 K, für eine Prüfung über den Lehrstoff eines Semesters 24 K.

6. Erlaß des Herrn Leiters des Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 8. Jänner 1909, Z. 52.698 ex 1908 (intimiert mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 14. Jänner 1909, Z. 1073): Die Semestralausweise unterliegen wie die Jahreszeugnisse der Stempelgebühr von 30 h.

7. Verordnung des Herrn Leiters des Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 17. Jänner 1909, Z. 2010 (intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 27. Jänner 1909, Z. 2297):

1. Wenn die Konferenz des Lehrkörpers auf Grund des Ausweises über das I. Semester eine auffallende Vernachlässigung der Pflichten eines Stipendisten festzustellen in der Lage wäre, kann sie demselben die Würdigkeit zum Fortgenusse des Stipendiums absprechen.

   In diesem Falle hat die zuständige Stiftungsbehörde die Einstellung des Stipendiengenusses sofort zu veranlassen und dem Stipendisten zu eröffnen, daß ihm das Stipendium noch vorbehalten und im Falle der Erlangung eines Jahreszeugnisses, welches ihn zum Aufsteigen in die nächste Klasse berechtigt, wieder flüssig gemacht werden würde; im Falle eines neuerlichen Mißerfolges am Schlusse des Schuljahres, beziehungsweise im Falle des Nichtbestehens einer Wiederholungsprüfung, ist mit der sofortigen Entziehung des Stipendiums vorzugehen.

   In jedem Falle ist aber dem Stipendisten die auf das II. Semester entfallende Stipendienrate nachträglich zu erfolgen.

2. Erhält ein Stipendist am Ende des Schuljahres ein Jahreszeugnis, nach welchem er nicht geeignet ist, in die nächste Klasse aufzusteigen, so hat die zuständige Stiftungsbehörde den Stipendiengenuß sofort einzustellen und dem Stipendisten zu eröffnen, daß ihm bei Wiederholung der Klasse das Stipendium noch vorbehalten und dessen Wiederflüssigmachung davon abhängig gemacht wird, ob ihm am Schlusse des nächsten Semesters von der Konferenz des Lehrkörpers die Würdigkeit zum Fortgenusse zugesprochen wird. Trifft dies nicht zu, so ist mit der sofortigen Entziehung des Stipendiums vorzugehen.

   In jedem Falle ist aber dem Stipendisten die auf das I. Semester entfallende Stipendienrate nachträglich zu erfolgen.

3. Die Note „nicht entsprechend" bezüglich des „Betragens" im Ausweise über das I. Semester oder im Jahreszeugnisse hat den unmittelbaren Verlust des Stipendiums zur Folge.

4. Die sonstigen, mit den vorstehenden Normen nicht im Widerspruche stehenden Stipendienvorschriften bleiben aufrecht.

5. Diese Verordnung tritt vom Beginne des Schuljahres 1908/09 in Wirksamkeit.

8. Ministerialerlaß vom 22. Jänner 1909, Z. 47.619/1908 (intimiert mit Erlaß des k. k. Landesschulrates vom 3. Februar 1909, Z. 2662): Die Bescheinigungen, die den bei Reifeprüfungen an Mittelschulen reprobierten Kandidaten ausgefolgt werden, sind ebenso wie die Reifezeugnisse mit einem 2 Kronen-Stempel zu versehen. Betreffs der Zeugnisse über die Prüfung aus der zweiten Landessprache im Sinne des Ministerial-Schreibens vom 7. Dezember 1849, Z. 8432 (Marenzeller I, Nr. 548) erfährt die für solche Zeugnisse bisher übliche Stempelgebühr von 1 Krone keine Änderung.

9. Verordnung des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 7. März 1909, Z. 8890, betreffend das Schulgeld an den Staatsmittelschulen.

10. Verordnung des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 20. März 1909, Z. 11.662, betreffend einen neuen Lehrplan für die Gymnasien in Österreich.

11. Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 15. April 1909, Z. 8948 (int. mit dem Erlasse des k. k. mähr. Landesschulrates vom 24. April 1909, Z. 10.373): Künftig wird bei der ersten Wiederholung der Reifeprüfung im Februartermine nicht mehr eine Reprobation auf unbestimmte Zeit, sondern nur eine solche bis zum Sommer- oder Herbsttermine desselben Jahres auszusprechen sein.

12. Erlaß des Herrn Ministers für Kultus und Unterricht vom 25. April 1909, Z. 17.149 (intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 6. Mai 1909, Z. 11.388): Das Schuljahr 1908/09 ist an allen jenen Mittelschulen, an welchen es normalmäßig mit dem 15. Juli 1909 zu enden hätte, ausnahmsweise schon am 8. Juli 1909 zu schließen, wogegen der Samstag vor und der Dienstag nach dem Pfingstsonntag als Ferialtage zu entfallen haben.

13. Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 27. April 1909, Z. 7736: Einführung von freiwilligen Geldsammlungen in den Schulen für Zwecke des Kinderschutzes und der Jugendfürsorge.

14. Ministerialerlaß vom 27. Mai 1909, Z. 16.767 (intimiert mit Erlaß des k. k. mähr. Landesschulrates vom 4. Juni 1909, Z. 14.089): Von der III. Klasse angefangen wird an dem „Staats-Realgymnasium mit deutscher Unterrichtssprache in Brünn" als zweite lebende Sprache gemäß dem Normallehrplane das Französische eingeführt.

IX. Gottesdienstliche Übungen.

Die gottesdienstlichen Übungen wurden vorschriftsmäßig und in würdiger Weise abgehalten. Das Schuljahr wurde mit einem Festgottesdienste eröffnet und ebenso geschlossen. Im Laufe des Schuljahres empfingen die katholischen Schüler dreimal (am 5. und 6. Oktober, 5. und 6. April und 14. und 15. Juni) die heilige Beicht und die heilige Kommunion. Die österlichen Exerzizien fanden vom 4. bis 6. April statt.

An Sonn- und Feiertagen wohnten die katholischen Schüler der heiligen Messe in der Gymnasialkapelle sowie der Exhorte (für die I.—IV. Klasse und für die V.—VIII. Klasse getrennt) bei.

Am Fronleichnamsfeste (10. Juni) nahmen die katholischen Schüler unter Führung des Lehrkörpers an der feierlichen Prozession teil.

Die evangelischen Schüler besuchten den Gottesdienst ihrer Konfession in der hiesigen Christuskirche.

Für die israelitischen Schüler wurde alle 14 Tage (abwechselnd für das Ober- und Untergymnasium) ein Gottesdienst, verbunden mit einer Exhorte, abgehalten; ebenso fand an jenen Festtagen, welche in die Schulzeit fielen, ein Schülergottesdienst statt.

X. Chronik.

Veränderungen im Lehrkörper.

Mit Ende Oktober 1908 wurde Professor Karl Prokop über sein eigenes Ansuchen in den dauernden Ruhestand versetzt.

Karl Prokop wirkte seit dem Jahre 1870 an dem Gymnasium in Iglau, dem Gymnasium und dem Realgymnasium in Brünn (heute Erstes und Zweites Gymnasium) und am Unter-Gymnasium in Straßnitz. An der letzt genannten Anstalt wurde er nach $^3/_4$jähriger Dienstzeit als Supplent im Jahre 1879 zum wirklichen Lehrer ernannt. Wenige Jahre später wurde er als Professor an das Gymnasium in Mähr.-Weißkirchen und im Jahre 1892 an die hiesige Lehranstalt versetzt, an der er durch 16 Jahre verdienstvoll und ersprießlich wirkte. Ausgerüstet mit reichem philologischen Wissen verstand er es, den Unterricht anregend und fruchtbringend zu gestalten. Zunehmende Kränklichkeit zwang ihn, nachdem ihn sein Gesundheitszustand gegen seinen Willen schon früher zeitweilig der Schule entzogen hatte, um die Versetzung in den dauernden Ruhestand einzukommen, die ihm auch gewährt wurde. Aus diesem Anlasse wurde ihm vom k. k. Landesschulrate für seine vieljährige, eifrige und gewissenhafte Dienstleistung im Namen des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht der Dank und die Anerkennung ausgesprochen.

Die Direktion fühlt sich angenehm verpflichtet, dem verdienten Schulmanne für seine eifrige und gewissenhafte Berufstätigkeit auch an dieser Stelle den besten Dank auszusprechen und dem Wunsche Ausdruck zu verleihen, daß es ihm beschieden sei, den wohlverdienten Ruhestand noch recht lange sano corpore et integra mente zu genießen.

Mit Ende des Schuljahres schied auch Professor Bruno Krichenbauer aus dem Lehrkörper infolge seiner Versetzung an das Elisabeth-Gymnasium in Wien, nachdem er seit dem Schuljahre 1901/02 an der Anstalt mit hingebungsvollem Eifer gewirkt hatte. Auch ihm spricht die Direktion für sein sehr erfolgreiches Wirken und seinen unermüdlichen Pflichteifer den wohlverdienten Dank mit dem Wunsche aus, daß er auch in seinem neuen Wirkungskreis sich derselben Beliebtheit erfreuen möge wie bei uns.

Im Laufe des Schuljahres schied Professor Mattel, der seit dem Jahre 1896 an der hiesigen Anstalt wirkte, nachdem er schon früher an derselben Anstalt Supplent gewesen; er trat sein Amt als Direktor des deutschen Gymnasiums in Kremsier am 1. Dezember an. Mattel, ein Kind unserer Stadt, erfreute sich wegen seines humanen und zuvorkommenden Wesens allgemeiner Beliebtheit; seine eifrige und von befriedigenden Erfolgen begleitete Lehrtätigkeit fand die wiederholte Anerkennung des Landesschulrates. Indem die Direktion dem wohlverdienten Lehrer für seine sehr ersprießliche Tätigkeit den besten Dank ausspricht, schließt sie daran den Wunsch, daß es ihm in seiner neuen Stelle gelingen möge, ebenso ersprießlich zu wirken.

Ernennungen und Beförderungen.

Der wirkliche Lehrer Dr. Georg Burggraf wurde mit Erlaß des k. k. Landesschulrates vom 12. November 1908, Z. 30.024, unter Zuerkennung des Titels „Professor“ im Lehramte bestätigt.

Sonstige bemerkenswerte Angaben für das Gedenkbuch der Anstalt.

6. bis 8. Juli 1908: Mündliche Reifeprüfungen; am 6. und 7. Juli fanden gleichzeitig die Aufnahmeprüfungen in die I. Klasse statt.

18. August: Der Vertreter des Direktors beteiligte sich an dem feierlichen Hochamte anläßlich des Allerhöchsten Geburtsfestes.

10. September: Der Direktor wohnte dem für weiland Ihre Majestät die Kaiserin Elisabeth in der Domkirche abgehaltenen Hochamte bei.

16. und 17. September: Aufnahme- und Wiederholungsprüfungen.

18. September: Das Schuljahr wird durch einen feierlichen Gottesdienst eröffnet.

19. September: Beginn des regelmäßigen Unterrichts.

21. bis 23. September: Schriftliche Reifeprüfungen im Herbsttermine.

28. September: Mündliche Reifeprüfung im Herbsttermine.

4. Oktober: Der Direktor wohnte dem feierlichen Hochamte in der Domkirche anäßlich des Namensfestes Sr. k. u. k. Apostolischen Majestät des Kaisers Franz Josef I. bei; die Schule beging die Feier des Allerhöchsten Namensfestes auf Grund ministerieller Ermächtigung am folgenden Tage durch einen feierlichen Gottesdienst in der Anstaltskapelle. Für die israelitischen Schüler fand ein Festgottesdienst im Tempel statt.

21. Oktober: Erste Schülervorstellung im Theater: zur Aufführung gelangten chillers Räuber.

15. November: Der Direktor wohnte dem feierlichen Hochamte in der Domkirche nläßlich des Jubiläums Sr. Heiligkeit des Papstes Pius X. bei.

19. November: Die katholischen Schüler wohnten dem Gottesdienste anläßlich des amensfestes weiland Ihrer Majestät der Kaiserin Elisabeth in der Gymnasialapelle, die mosaischen einem Gedächtnisgottesdienste im Tempel bei.

2. Dezember: An diesem Tage feierten alle Völker unseres Vaterlandes das 60jährige egierungsjubiläum unseres vielgeliebten Friedenskaisers. In dem allgemeinen Festbel, der aus diesem Anlasse Österreichs Gaue durchbrauste und auch im Auslande ein Echo rzlicher Töne der Freundschaft weckte, ließ auch unsere Anstalt ihre bescheidene Stimme schallen. Wochen hindurch übten die Schüler an den Gesang-, Musikstücken und Deklaationen, die zur Verherrlichung des Festes dienen und den Ausdruck der jugendlichen aterlandsbegeisterung bilden sollten. Mit Freude und Eifer waren sie bei der Sache, die leinen und die Großen, um eine würdige Feier des großen österreichischen Festtages vorbereiten. Endlich kam er, der lang erwartete 2. Dezember, im ersten Grauen des Morgens hon begrüßt von dem Donnerton der Geschütze, die von der Höhe des Spielbergs ihren eckruf in die noch schlummernde Stadt entsandten. Und als der Glocken vielstimmiges töne eine unabsehbare, festlich gestimmte Menschenmenge in die Gotteshäuser lud zum mmen Dankgebet und heißer Bitte für des geliebten Landesvaters ferneres Wohlergehen, rief die Feststunde auch unsere Jugend zum feierlichen Festwerke. Die katholischen hüler wohnten dem in der Anstaltskapelle vom Religionsprofessor Dr. C. Kubanek ebrierten feierlichen Tedeum bei. Die evangelischen und mosaischen Schüler nahmen in en Gotteshäusern an dem Festgottesdienste teil.

Um 9 Uhr versammelten sich alle Schüler der Anstalt und alle Mitglieder des hrkörpers nebst deren Angehörigen im großen Festsaale, der mit Teppichen und Blattnzen stimmungsvoll geschmückt war und an der Stirnseite das lebensgroße, von Maler chan gemalte Vollbild des Kaisers hervortreten ließ. Die markigen Klänge des Mendelnschen Hochzeitsmarsches, den das Schülerorchester unter der Leitung des Professors Rinesch zum Vortrage brachte, leitete die Feier ein, die nach folgendem Plane ablief:

1. Mendelsohn, Hochzeitsmarsch, Instrumentalmusik.
2. Seidl, An mein Vaterland, Deklamation.
3. Prinz Eugen, Volkslied, Gesang.
4. H. Mayer, Zum 2. Dezember 1908, Deklamation.
5. Andante von Guido Papini. Geigenduett.
6. A. Grün, Hymne an Österreich, Gesang. Deklamation.
7. Festrede.
8. Volkshymne, 1. Strophe, Gesang.
9. Schlußwort.

Die rührend schlichten Verse des Gedichtes von Seidl, „An mein Vaterland“ sprach kindlich-frommem Gefühl der Primaner Österreicher.

Der Schüler der V. Klasse Löwenstein brachte das von Professor Hans Maye verfaßte Gedicht zum Vortrage:

Zum 2. Dezember 1908.

Sechzig Jahre! — Suchend eilen die Gedanken rasch zurück,
Bis an einem Bild voll Schöne endlich haften bleibt der Blick:
Wie sich eines Jünglings Stirne mit der Kaiserkrone schmückt,
Wie ein Sohn sich voller Rührung in der Eltern Arme drückt.

„Fahre wohl, du meine Jugend!“ so entringt sich's seinem Mund
Und ein feierlich Gelöbnis birgt er in des Herzens Grund:
Nie zu wanken in der Liebe, nie zu lassen von der Treu,
Daß er stets des Vaterlandes vielgeliebter Vater sei.

Stürme brausten durch die Lande und des Krieges Donnerton
Dröhnt' in Ungarn und in Mailand, wild bedrohend Reich und Thron;
Doch des jungen Kaisers Milde wandelt Sturm zu Frühlingswehn
Und begeistert sehn die Völker jugendfrisch das Reich erstehn.

Zwar entfuhr noch oft der Scheide, landbeschirmend, Österreichs Schwert,
Mehr doch als des Krieges Lorbeer hat Franz Josefs Herz begehrt,
Seine Schläfe zu umwinden mit der Palme grünem Reis:
Friedensfürst, so ist sein Name, seiner Friedensliebe Preis.

Unter seinem Friedenszepter drang zum Licht der Völker Kraft,
Emsig schaffend, freudig schöpfend aus dem Born der Wissenschaft;
Und der Musen hehrer Segen goß veredelnd sich ins Land,
Als die Kunst auf stolzem Throne einen hohen Schützer fand.

Und der Fluren goldne Gaben, des Gewerbes froher Fleiß
Und in hämmernden Gewerken schwielger Arbeitshände Schweiß
Und das enge Netz der Wege, das den Handel ließ erblühn:
Alles rühmt des Kaisers Sorge und sein väterlich Bemühn.

Doch mein Ohr hört Grabgesänge und der stille Totensaal
Bei den Kapuzinermönchen öffnet sich so manchesmal.
O welch düstres Bild des Schmerzes: Wie voll Weh der Kaiser steht
An den Särgen seiner Lieben: Rudolf, Max, Elisabeth!

Rasch hinweg von diesem Bilde und im Flug zur Gegenwart!
Seht ihr, wie in tausend Domen sich das Volk zusammenschart?
Hört ihr, wie Millionen Menschen sich vereinen im Gebet,
Das auf unsern greisen Kaiser Gottes Schutz herniederfleht?

Von Tirols beeisten Riesen bis ins ferne Buchenland,
Von des Erzgebirges Höhen bis nach Süd zum Meeresstrand
Jauchzt der Völker Jubelfreude, braust das Lied uns wohlbekannt:
Gott erhalte, Gott beschütze unsern Kaiser, unser Land!

Nach dem sehr präzis von den Schülern der VIII. Klasse Herzel und Hütt gespielten Duett von Papini trug die schwungvolle Hymne an Österreich der Oktavane Wuczkowski in wirkungsvoller Weise vor.

Hierauf ergriff der Direktor das Wort zur Festrede. Er entwarf in großen Züge ein Bild der glorreichen 60jährigen Regierungstätigkeit unseres erhabenen Kaisers, berührt die wichtigsten Ereignisse der äußeren Geschichte während dieser Zeit und zeichnet besonders ausführlich die großartige Umgestaltung unseres Vaterlandes auf dem Gebiet der materiellen und geistigen Kultur, eine Umwandlung, die auf dem politischen Gebiet vom Absolutismus bis zum allgemeinen Wahlrechte führte und alle Fesseln löste, die ei freie Entwicklung der mannigfachen Kräfte der vielen Völker Österreichs bisher gehemm hatten. Insbesondere wurde der zahlreichen Schulen gedacht, die unter Kaiser Franz Jose Regierung entstanden, in denen nicht bloß die reine Wissenschaft, sondern auch d praktischen Kenntnisse der verschiedensten technischen Fächer eine Heim- und Pfleg stätte fanden.

Auch die hervorragenden Eigenschaften unseres Jubelkaisers als Mensch fanden ei entsprechende Würdigung: seine selten hohe Auffassung von Pflicht, die jedem, auch de Schüler, das beste und leuchtendste Vorbild gibt, seine unendliche Güte und Milde, sei sorgende Arbeitskraft, die bis ins hohe Alter nicht erlahmt, sein Verantwortlichkeitsgefül das sich besonders in seinen Bemühungen um die Aufrechterhaltung des Friedens, d höchsten Gutes im Leben der Völker, so oft schon kundgab. Das Bild des Kaisers, das d Festrede vor den Schülern entwarf, wäre unvollständig geblieben, hätte nicht auch d Schmerzliche Erwähnung gefunden, das die unerforschliche Vorsehung in die lange Ket

der Lebensjahre unseres Landesvaters leider nicht allzu spärlich einflocht. Doch gerade der Schmerz schmiedet die festesten Bande und so sind auch Kaiser und Völker in heiliger, ewiger Liebe und felsenfester Treue geeint und kennen an dem großen Jubeltage nur ein Gefühl und ein Gebet und einen heißen, innigen Wunsch: Gott erhalte, Gott beschütze unsern Kaiser, unser Land. Chor und Orchester nahmen die Worte auf und ließen die herrlichen Klänge den Festsaal durchbrausen.

Hierauf sprach der Senior des Lehrkörpers, Professor Zatloukal, das Schlußwort. Er führte aus, daß der Kaiser auch dieses seltene Jubelfest zum Anlasse nahm, um Werke der Wohltätigkeit und Nächstenliebe zu fördern, indem er den wahrhaft landesväterlichen Wunsch aussprach, daß das Fest nicht durch prunkvolle und kostspielige Veranstaltungen, sondern durch die Betätigung des Wohltätigkeitssinnes, durch Linderung von Dürftigkeit und Not gefeiert werde. Dieser Appell sei im ganzen Reiche auf fruchtbaren Boden gefallen und besonders das Schlagwort des Jubeljahres „Für das Kind" habe eine großartige Opferwilligkeit ausgelöst. Indem sich auch der Lehrkörper den edlen Wunsch des Jubelkaisers vor Augen hielt, trug er Sorge, daß aus dem Unterstützungsvereine und freiwilligen Spenden zur Erinnerung an den Jubeltag acht dürftige und würdige Schüler der Anstalt — einer aus jeder Klasse — mit Einlagebüchern der Ersten mährischen Sparkasse zu je 100 K beteilt würden. Die Schüler, deren Namen nun verlesen wurden, und die nach der Feier ihre Bücher in der Direktionskanzlei ausgefolgt erhielten, sind:

I. Klasse: Aulehla Alois,
II. Klasse: Grünwald Armin,
III. Klasse: Kohn Hermann,
IV. Klasse: Diamant Arnold,
V. Klasse: Mayer Gustav,
VI. Klasse: Drapal Vinzenz,
VII. Klasse: Schafranek Viktor,
VIII. Klasse: Jarosch Ottokar.

So schloß die erhebende Feier, die in den empfänglichen Herzen der Jugend gewiß einen dauernden Eindruck hinterlassen hat.

5. Dezember: Zweite Schülervorstellung im Stadttheater; zur Aufführung gelangten: „Kaisers Freudentag", „Am Wörthersee" und der Schlußakt der „Meistersinger".

17. Dezember: Unter Führung des Professors Schüch besuchte eine Anzahl von Schülern die Ausstellung „Kind und Kunst".

24. Dezember bis 3. Jänner 1909: Weihnachtsferien.

27. Jänner: Dritte Schülervorstellung im Stadttheater; es wurden die „Piccolomini" von Schiller aufgeführt.

28. Jänner: Der israelitische Religionskommissär, Herr Rabbiner Dr. Ludwig Levy, besuchte den Religionsunterricht in mehreren Klassen.

29.—30. Jänner: Schriftliche Reifeprüfung im Februartermine.

6. Februar: Herr Landesschulinspektor Eduard Kučera inspizierte den Unterricht in mehreren Klassen.

13. Februar: Schluß des ersten Semesters; Verteilung der Semestralausweise.

14.—16. Februar: Semestralferien.

17. Februar: Mündliche Reifeprüfung.

17. März: Erster Schülervortrag des Herrn Direktors des Gewerbemuseums, Julius Leisching: Die Kunst des Altertums.

19. März: Die Anstalt wurde wegen eines infektiösen Krankheitsfalles in der Familie des Direktors geschlossen.

23. März: Wiederaufnahme des Unterrichtes über behördliche Genehmigung.

31. März: Zweiter Schülervortrag des Direktors des Gewerbemuseums, Herrn Architekten Julius Leisching: Kaiser Maximilian und seine Zeit.

7. April: Dritter Schülervortrag des Direktors des Gewerbemuseums, Herrn Architekten Julius Leisching: Maria Theresia und ihre Zeit.

7.—13. April: Osterferien.

21. April: Vierte Schülervorstellung im Stadttheater: „Wallensteins Tod".

2. Mai: 20 Schüler empfingen das Sakrament der heiligen Firmung.

20. Mai: Der hochwürdige Herr bischöfliche Ordinariats-Kommissär Professor P. Ernst Gřivnacky wohnte dem Schulgottesdienste bei.

23. Mai: Die amtliche „Wiener Zeitung" bringt die Verlautbarung, daß Se. k. u. k. Apostolische Majestät mit Allerhöchster Entschließung vom 12. Mai dem k. k. Landesschulinspektor Eduard Kučera aus Anlaß der von ihm erbetenen Versetzung in den dauernden Ruhestand taxfrei den Titel eines Hofrates allergnädigst verliehen haben. Der Lehrkörper entsandte eine aus dem Direktor und den Professoren Zatloukal und Spandl bestehende Deputation, welche dem Herrn Hofrate die Glückwünsche und den

Dank für das allezeit betätigte Wohlwollen zum Ausdruck brachte. Am 27. Mai erschien Herr Hofrat Kučera um 11 Uhr im Konferenzzimmer der Anstalt, um sich für diese Beglückwünschung zu bedanken und Abschied zu nehmen. In warmen Worten dankte er für die Unterstützung, die er während seiner Amtsführung in der Pflichttreue und dem Diensteifer aller Mitglieder des Lehrkörpers gefunden habe, und bat um ein freundliches Gedenken. Nachdem der Direktor hierauf nochmals den Dank des Lehrkörpers und dessen aufrichtige Wünsche für das fernere Wohlergehen des Herrn Hofrates ausgesprochen hatte, verabschiedete sich dieser mit herzlichen Worten von jedem einzelnen. An den zu Ehren des scheidenden Landesschulinspektors am 29. Mai veranstalteten Abschiedsbankett, das zahlreiche Vertreter fast aller deutsch-mährischen Gymnasien vereinigte, sprach der älteste der anwesenden Direktoren, Regierungsrat Ritter von Reichenbach, in schwungvoller, herzlicher Rede die Worte des Abschiedes, in denen er auch einen Überblick über den Lebensgang des Scheidenden gab und ein schönes Bild desselben als Mensch, Vorgesetzter und Schulmann zeichnete. In witzig-humoristischer Rede antwortete Hofrat Kučera und wünschte allen seinen bisherigen Untergebenen und deren Familien das beste Wohlergehen für die Zukunft.

Hofrat Kučera, 1848 zu Olmütz geboren, wurde nach Vollendung seiner Studien an der Universität in Wien im Jahre 1875 zum wirklichen Lehrer am Staats-Real- und Obergymnasium in Ungarisch-Hradisch ernannt. Nach wenigen Jahren wurde er an das deutsche Gymnasium seiner Vaterstadt versetzt. Von dieser Anstalt wurde er im Jahre 1889 zum Direktor des deutschen Staatsgymnasiums in Mährisch-Weißkirchen berufen und im Jahre 1895 mit Allerhöchster Entschließung vom 2. Dezember als Nachfolger P. Robert Christian Riedls zum Landesschulinspektor ernannt. In Anerkennung seiner in dieser Stellung erworbenen Verdienste wurde er von Seiner Majestät dem Kaiser im Jahre 1907 durch allergnädigste Verleihung des Ordens der Eisernen Krone ausgezeichnet. Den deutschen Gymnasien Mährens stand er als Landesschulinspektor seit dem 1. Jänner 1896 vor. Der Grundzug seines Wesens ist Güte, Wohlwollen und Milde. Von ihm darf man wohl sagen, daß er niemandem ein Unrecht zufügte. Wo die Entscheidung schwankte, da galt ihm der Spruch: In dubiis mitius. So manches Abiturienten Schicksal hat sich im Zeichen dieses Grundsatzes des Vorsitzenden noch glücklich gestaltet. Und wer auch immer von seinen Untergebenen sich mit berechtigten Wünschen an ihn wandte, der konnte einer wohlwollenden Prüfung seines Anliegens und, wenn es nicht unmöglich war, der Erfüllung derselben sicher sein. Die genaue Beachtung der bestehenden Vorschriften, die strenge Erfüllung der Pflicht konnte Landesschulinspektor Kučera mit umso größerem Rechte fordern, als er selbst seine Pflichten auf das gewissenhafteste erfüllte und gegen sich selbst wohl am strengsten war.

Solches Beispiel wirkt und macht die Pflichterfüllung auch unter schwierigen Umständen leicht. Die schwere und verantwortungsvolle Arbeit eines Landesschulinspektors in einem so großen Dienstbereiche wie Mähren, die sich aus Kanzleibetätigung, Schulinspektion und den physischen Anstrengungen häufiger Dienstreisen zusammensetzt, empfand er nicht etwa als Bürde, sondern sie bereitete ihm Freude. Diese Arbeitsfreude war für ihn, wie er selbst sagte, ein Wahrzeichen der Gesundheit und des Wohlbefindens.

So geht nun Hofrat Kučera in den im besten Sinne des Wortes wohlverdienten Ruhestand. Indem wir ihm alle ein herzliches Lebewohl zurufen, wünschen wir ihm nochmals eine lange, lange Reihe ruhig-schöner Tage in Olmütz, der Stadt, die er zum Ruheort sich auserkoren. Die Anstalt wird dem Herrn Hofrat Kučera eine dankbare Erinnerung bewahren.

24. und 25. Mai: Der hochwürdige Herr bischöfliche Ordinariatskommissär Professor P. Ernst Gřivnacky inspizierte den katholischen Religionsunterricht.

30. und 31. Mai: Pfingsferien.

1.—3. Juni: Schriftliche Reifeprüfung.

12. Juni: Acht Schüler des I. und drei Schüler des II. stenographischen Kurses beteiligten sich an dem vom Gabelsberger Stenographen-Zentralverein in Brünn veranstalteten Wettschreiben.

In der schönschriftlichen Abteilung erhielten Silbiger Benno (IV. Kl.) einen 1., Mayer Gustav (V.Kl.) einen 3., Dub Oskar einen 4. und Kuczera Paul einen 5. Vereinspreis. In der schnellschriftlichen Abteilung (Schnellschrift mit einer Geschwindigkeit bis zu 70 Worten in der Minute) erhielten Löwenstein Hermann (V. Kl.) einen 2 Vereinspreis, in der III. Abteilung (Schnellschrift mit einer Geschwindigkeit bis zu 90 Worten in der Minute) Blum Karl (VI. Kl.) und Bachrich Paul (VII. Kl.) belobende Anerkennungen.

13. Juli: Dieselben Schüler, die am Vortage in Wettbewerb traten, beteiligten sich auch an dem vom Ersten Gabelsberger Stenographen-Verein veranstalteten Wettschreiben. Es erhielten in der schönschriftlichen Abteilung Silbiger Benno (IV. Kl.) den 4. Vereinspreis, Mayer Gustav (V. Kl.) und Zekl Johann (IV. Kl.) belobende Anerkennungen. In der schnellschriftlichen Abteilung (Schnellschrift mit einer Geschwindigkeit bis zu 70 Worten in der Minute) erhielt Löwenstein Hermann den 1. Vereinspreis.

14.—21. Juni: Versetzungsprüfungen.

24. Juni: Dieser Tag wurde vom Direktor freigegeben.

29. Juni: Das Schuljahr wurde mit einem feierlichen Te Deum geschlossen, worauf die Schüler die Zeugnisse erhielten und in die Ferien entlassen wurden.

XI. Statistik der Schüler.

(Die kleinen Ziffern rechts oben gelten den Privatisten.)

	Klasse Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen	
I. Zahl.											
Zu Ende d. Schulj. 1907/08	24	29	35	46	32	28	29	29	27	279	
Zu Anfang d. Schulj. 1908/09	37		49	31	39	23	28	28	29	264	
Während des Schuljahres eingetreten	1		1	—	1	—	—	1	1	5	
m ganzen also aufgenommen	38		50	31	40	23	28	29	30	269	
Darunter:											
Neu aufgenommen, u. zw.:											
aufgestiegen	35		1	—	1	—	1	2	—	40	
wiederholend	—		—	—	2	1	1	1	1	6	
Wieder aufgenommen, u. zw.:											
aufgestiegen	—		46	27	37	20	24	26	29	209	
wiederholend	3		3	4	—	2	2	—	—	14	
Während des Schuljahres ausgetreten	—		7	1	—	1	—	1	3	13	
chülerzahl zu Ende 1908/09	38		43	30	40	22	28	28	27	256	
Darunter:											
ffentliche Schüler	38		43	30	40	22	28	28	27	256	
rivatisten	—		—	—	—	—	—	—	—	—	
2. Geburtsort. (Vaterland.)											
rünn	21		16	14	19	11	14	13	8	116	
ndere Orte in Mähren .	15		23	12	14	8	12	11	17	112	
ederösterreich	1		1	1	1	—	—	2	1	7	
eiermark	—		1	—	1	1	—	1	—	4	
hmen	—		1	3	2	—	—	—	—	6	
hlesien	—		—	—	1	—	—	—	—	1	
lizien	—		—	—	1	—	1	—	1	3	
garn	1		1	—	—	1	—	1	—	4	
utschland	—		—	—	—	—	1	—	—	1	
mänien	—		—	—	—	1	—	—	—	1	
lgarien	—		—	—	1	—	—	—	—	1	
Summe . . .	38		43	30	40	22	28	28	27	256	
3. Muttersprache.											
utsch	35		41	29	39	22	26	27	24	243	(94·9%)
hoslawisch	3		2	1	—	—	2	1	2	11	(4·3%)
lnisch	—		—	—	1	—	—	—	1	2	(6·8%)
Summe . . .	38		43	30	40	22	28	28	28	256	
Religionsbekenntnis.											
holisch des lat. Ritus	24		22	15	23	10	17	14	11	136	(53·1%)
ngelisch, Augsb. Bek.	—		—	—	2	—	—	—	1	3	(1·2%)
elitisch	14		21	15	15	12	11	14	15	117	(45·7%)
Summe . .	38		43	30	40	22	28	28	27	256	

	Klasse									Zusammen
	Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
5. Lebensalter.										
11 Jahre	11		—	—	—	—	—	—	—	11
12 „	23		13	—	—	—	—	—	—	36
13 „	2		21	7	—	—	—	—	—	30
14 „	1		8	18	7	—	—	—	—	34
15 „	1		—	5	23	5	—	—	—	34
16 „	—		1	—	9	9	9	—	—	28
17 „	—		—	—	1	5	8	9	—	23
18 „	—		—	—	—	3	10	11	13	37
19 „	—		—	—	—	—	1	8	7	16
20 „	—		—	—	—	—	—	—	7	7
Summe . .	38		43	30	40	22	28	28	27	256
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.										
Ortsangehörige	31		29	22	29	17	21	16	19	184
Auswärtige	7		14	8	11	5	7	12	8	72
Summe . .	38		43	30	40	22	28	28	27	256
7. Klassifikation.										
a) Zu Ende des Schuljahres 1908/09.										
Zum Aufsteigen in die nächste Klasse waren (bzw. haben die oberste Klasse beendet)										
vorzüglich geeignet: (mit vorzüglichem Erfolg)	7		7	2	6	4	2	7	3	38 (14·8%
geeignet: (mit gutem Erfolg)	25		28	18	21	14	18	14	17	155 (60·6%
im allgemeinen geeignet:	—		2	3	3	—	—	—	—	8 (3·1%
nicht geeignet: (mit nicht genügendem Erfolg)	4		3	5	7	1	3	2	2	27 (10·55%
Die Bewilligung zu einer Wiederholungsprüfung erhielten:	2		3	2	3	2	5	5	5	27 (10·55%
Nicht klassifiziert wurden:	—		—	—	—	1	—	—	—	1 (0·4%
Außerordentliche Schüler:	—		—	—	—	—	—	—	—	—
Summe . .	38		43	30	40	22	28	28	27	256
b) Nachtrag zum Schuljahre 1907/08.										
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt . . .	1	—	2	2	2	3	3	1	3	17
Entsprochen haben	1	—	2	2	2	3	3	1	3	17
Nicht entsprochen haben . (oder nicht erschienen sind)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nachtragsprüfungen waren bewilligt	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Entsprochen haben . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht entsprochen haben . (oder nicht erschienen sind)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

	Klasse									Zusammen	
	Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
nach ist das Ender- ebnis für 1907/08:											
Fortgangskl. m. Vorzug	5	2	4	5	2	2	6	5	2	33	(11·8%)
Fortgangsklasse . .	18	23	25	34	28	23	20	24	23	218	(78·2%)
„ . . .	1	4	5	7	1	3	3	—	1	25	(8·9%)
„ . . .	—	—	1	—	1	—	—	—	—	2	(0·7%)
geprüft blieben . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	(0·4%)
Summe . .	24	29	35	46	32	28	29	29	27	279	
Geldleistungen der Schüler.											
Schulgeld zu zahlen ren verpflichtet:											
1. Semester . . .	20		15	15	21	11	12	10	6	110	
2. Semester . . .	15		16	12	25	11	16	13	10	118	
Hälfte waren befreit:											
1. Semester . . .	—		—	—	1	—	1	—	—	2	
2. Semester . . .	—		—	—	1	—	1	—	—	2	
z befreit waren:											
1. Semester . . .	17		33	16	17	12	15	18	23	151	
2. Semester . . .	23		28	18	14	11	11	15	18	138	
Schulgeld betrug im zen:											
1. Semester . . *K*	800		600	600	860	440	500	400	240	4440	
2. Semester . . *K*	600		640	480	1020	440	660	520	400	4760	
Summe . *K*	1400		1240	1080	1880	880	1160	920	640	9200	
Aufnahmsgebüh- n betrugen . . . *K*	147		4·2	—	12·6	4·2	8·4	12·6	4·2	193·2	
Lehrmittelbeiträ- betrugen . . . *K*	76		100	62	80	46	56	58	60	538	
Gebühren f. Ersatz- gnisse (aus früheren ren) betrugen *K*	—		—	—	—	—	—	—	-	32	
Summe . *K*	223		104·2	62	92·6	50·2	64·4	70·6	64·2	763·2	
Jugendspielbeiträge ugen	38		50	31	40	23	28	29	30	269	

	Klasse								Zusammen
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
9. Besuch des Unterrichtes in den nicht obligaten Lehrgegenständen (im 2. Semester).									
Böhmisch I. Abt. A	24	—	—	—	—	—	—	—	24
„ I. „ B	—	22	—	—	—	—	—	—	22
„ II. „	—	—	13	15	—	—	—	—	28
„ III. „	—	—	—	—	4	4	1	—	9
„ IV. „	—	—	—	—	—	—	9	5	14
Französisch, I. Abt.	—	—	—	6	5	3	4	—	18
„ II. „	—	—	—	—	—	1	4	4	9
Freihandzeichnen	—	—	—	—	2	3	3	1	9
Stenographie, I. Abt.	—	—	—	25	10	8	1	—	44
„ II. „	—	—	—	—	8	4	4	—	16
Kalligraphie, I. Abt.	38	—	—	—	—	—	—	—	38
„ II. „	—	43	—	—	—	—	—	—	43
Gesang, I. Abt.	10	14	1	1	—	—	—	—	26
„ II. „	—	—	5	9	1	5	4	7	31
10. Stipendien.									
Anzahl der Stipendisten	—	2	2	1	—	3	3	3	14
Gesamtbetrag der Stipendien . . *K*	—	524	304	100	—	560	533·34	466·66	2428

XII. Namensverzeichnis der Schüler.

Die gesperrt gedruckten Namen bezeichnen Schüler, die ein Vorzugszeugnis erhielten; die mit ( ) bezeichneten sind im Laufe des Schuljahres abgegangen.

Wo hinter dem Geburtsort das Heimatland nicht näher bezeichnet wird, ist Mähren zu verstehen. Es bedeutet N.-Ö. = Niederösterreich, O.-Ö. = Oberösterreich, B. = Böhmen, Sch. = Schlesien, St. = Steiermark, G. = Galizien, U. = Ungarn, D. = Deutschland.

I. Klasse.

Aulehla Alois, Mödritz.
Bartl Franz, Czernowitz.
Barn Otto, Brünn.
Bednař Franz, Niemetzky.
Blum Ernst, Brünn.
Brunner Heinrich, Brünn.
Čihaček Erwin, Brünn.
Engel Isidor, Brünn.
Engelsrath Erwin, Austerlitz.
Fischer Franz, Austerlitz.
Fluger Karl, Bisenz.
Glattauer Rudolf, Wien, N.-Ö.
Hexmann Josef, Brünn.
Jarosch Karl, Brünn.
Jung Karl, Brodek.
Kohn Artur, Brünn.
Kocmann Alfred, Brünn.
Kreuzinger Otto, Gr.-Steurowitz.
Löffler Felix, Brünn.
Meinl Karl, Abrudbanya, U.
Munk Karl, Brünn.
Nehammer Gottfried, Brünn.
Neuwirth Emil, Brünn.
Österreicher Friedrich, Brünn.
Pawlik Alexander, Brünn.
Puttner Rudolf, Prahlitz.
Schallinger Walter, Eibenschitz.
Schusta Hermann, Mähr.-Schönberg.
Stoksa Walter, Bystritz a/H.
Stransky Johann, Lundenburg.
Theimer Hermann, Brünn.
Wittmann Bruno, Brünn.
Wodak Otto, Brünn.
Wolf Ernst, Brünn.
Wowesny Franz, Kunowitz-Louczka.
Zapomel Wilhelm, Brünn.
Zellner Wenzel, Pausram.

38 Schüler.

II. Klasse.

Altbach Artur, Lundenburg.
Aschkenes Otto, Brünn.
(Benda Leopold, Brünn.)
Bernatzik Bruno, Pausram.
Binder Erwin, Nikolsburg.
Blann Richard, Selenz, B.
Chladek Franz, Swonowitz.
Dukes Otto, Brünn.
Dvořák Ernst, Brünn.
(Œxel Wilhelm, Brünn.)
(Fassel Leo, Brünn.)
Fischer Ernst, Brünn.
Fleischer Wilhelm, Brumowitz.
Frankl Otto, Neu-Raußnitz.
Frey Franz, Groß-Meseritsch.
Fritz Karl, Unter-Gerspitz.
Glaser Ludwig, Proßnitz.
Grünwald Armin, Boskowitz.
Hein Karl, Brünn.
Hummer Otto, Mähr.-Budwitz.
Igl Gustav, Brünn.
Kolisch Paul, Koritschan.
Kornfeld Julius, Dambořitz.
Kulischek Josef, Unter-Gerspitz.
(Leixner Anton, Brünn.)
Matischek Wolfgang, Gurein.
Möditzer Josef, Prahlitz.
Mohler Friedrich, Wachtl.
Preiß Karl, Austerlitz.
Rischawy Ernst, Brünn.
Rosenberg Hugo, Wien, N.-Ö.
(Rutzki Karl, Lundenburg.)
(Schindler Ludwig, Zlin.)
Schmierer Johann, Mödritz.
Schuh Eduard, Graz, St.
Schwarz Josef, Brünn.
Singer Otto, Brünn.
Singer Viktor, Brünn.
Škarohlid Wilhelm, Brünn.
Smejkal Otto, Brünn.
Srnec Siegmund, Lodenitz.
Stiassný Julius, Schüttbořitz.

Waller Robert, Brünn.
Walt Egon, Proßnitz.
Wiesner Robert, Malaczka, U.
Wietrzny Karl, Brünn.
(Winkler Ernst, Wien, N.-Ö.)
Winkler Josef, Brünn.
Wolf Robert, Auspitz.
Zigarek Viktor, Brünn.

50 Schüler.

III. Klasse.

Bass Hans, Brünn.
Bermann Wilhelm, Brünn.
Bittermann Franz, Brünn.
Bohla Friedrich, Deutsch-Liebau.
(Brosch Franz, Wien, N.-Ö.)
Dworsky Arnold, Wischau.
Ellbogen Emil, Brünn.
Fried Wilhelm, Brünn.
Fries Richard, Lipuvka.
Gabesam Walter, Josefstadt, B.
Juhn Emil, Bisenz.
Jung Franz, Brodek.
Kohn Hermann, Wien, N.-Ö.
Körner Karl, Gundrum.
Kornitzer Paul, Pohrlitz.
Kroczak Ferdinand, Modřan, B.
Mayer Franz, Brünn.
Meinl Lothar, Josefstadt, B.
Reichner Hugo, Mähr.-Aussee.
Schallinger Gustav, Eibenschitz.
Schmidt Richard, Brünn.
Schober Alois, Brünn.
Schulz Oskar, Schwabenitz.
Schwed Alfred, Proßnitz.
Singer Siegfried, Brünn.
Swoboda Richard, Brünn.
Uxa Guido, Brünn.
Waschak Josef, Brünn.
Weichselbaum Artur, Uhřitz.
Weinreb Paul, Brünn.
Wittmann Erwin, Brünn.

31 Schüler.

IV. Klasse.

Aberle Eugen, Brünn.
Back René, Philippopel, Bulgarien.
Barth Julius, Schimitz.
Blum Heinrich, Brünn.
Böhm Ernst, Jägerndorf, Sch.
Charwat Wladimir, Brünn.
Dazin Wilhelm, Brünn.
Deutscher Leopold, Kolloredov.
Diamant Arnold, Schaffa.
Dub Oskar, Brünn.
Etzler Karl, Brünn.
Fischa Hans, Hajan.
Flögl Friedrich, Brünn.
Freund Julius, Saaz, B.
Fröhlich Rudolf, Wien, N.-Ö.
Gloger Anton, Littau.
Golliasch Anton, Brünn.
Haas Egon, Pohrlitz.
Haftel Otto, Brünn.
Heinisch Herbert, Brünn.
Heinke Ralph, Brünn.
Hummer Günter, Mähr.-Budwitz.
Jelinek Ludwig, Brünn.
Karpelis Artur, Pausram.
Kuczera Paul, Brünn.
Meinl Wilhelm, Josefstadt, B.
Müller Johann, Müglitz.
Obadalek Walter, Brünn.
Offermann Edwin, Freiherr von, Brünn.
Rzehak Johann, Brünn.
Schatral Johann, Unter-Gerspitz.
Schneider Ernst, Brünn.
Schönfeld Otto, Mähr.-Ostrau.
Silbiger Benno, Brünn.
Stern Heinrich, Brünn.
Stryer Josef, Brody, G.
Tragatsch Siegfried, Rohrbach.
Ungar Felix, Boskowitz.
Zeckl Johann, Odrowitz.
Zhorsky, Ritter von Zhorže, Ernst, Marburg, St.

40 Schüler.

V. Klasse.

Berkowitz Otto, Jassy, Rumänien.
(Blum Ludwig, Lösch.)
Bohla Alois, Deutsch-Liebau.
Frömel Josef, Brünn.
Herisch Karl, Eisgrub.
Hofer Walter, Groß-Seelowitz.
Jellinek Artur, Pohrlitz.
Jellinek Helmar, Eibenschitz.
Kantor Oskar, Butschowitz.
Kessler Ernst, Brünn.
Kneifel Hugo, Brünn.
Littmann Karl, Brünn.
Löwenstein Hermann, Brünn.
Mahr Bruno, Brünn.
Mayer Gustav, Brünn.
Rinesch Adalbert, Cilli, St.
Rosenfeld Alfred, Brünn.
Schmachtel Karl, Brünn.
Spitz Ernst, Kostel.
Stienitzka Alfred, Brünn.
Ungar Emil, Pohrlitz.
Wiesner Erwin, Malaczka, U.
Winkler Hermann, Brünn.

23 Schüler.

VI. Klasse.

Bailonj Adolf, Brünn.
Blum Karl, Brünn.
Christof Herbert, Nikolaj, Pr.-Sch.
Czurda Franz, Wischau.
Drapal Vinzenz, Brünn.
Fleischer Hugo, Brünn.
Fuchs Albert, Irritz.
Galla Heinrich, Mähr.-Ostrau.
Glaser Josef, Neu-Raußnitz.
Haber Moritz, Brünn.
Habermann Günter, Brünn.
Havlik Albin, Poleschowitz.
Jellenik Walter, Brünn.
Klettenhofer Viktor, Brünn.
Knöpfelmacher Wilhelm, Sokolnitz.
Loria Felix, Brünn.
Marmorstein Julius, Groß-Karlowitz.
Mikschiczek Karl, Plumenau.
Mühle Hans, Brünn.
Pařízek Johann, Brünn.
Pazofsky Wenzel, Brünn.
Prochaska Gustav, Brünn.
Sikora Josef, Biala, G.
Spieler Alfred, Koritschan.
Srnec Karl, Lodenitz.
Stanka Franz, Pausram.
Ungar Hermann, Boskowitz.
Wawrik Johann, Brünn.

28 Schüler.

VII. Klasse.

Adler Friedrich, Pohrlitz.
Bachrich Paul, Austerlitz.
Bader Edwin, Pohrlitz.
Brief Otto, Znorow.
Grosser Franz, Brünn.
Herisch Franz, Eisgrub.
Karpelis Egon, Pausram.
Kohn Hugo, Brünn.
Kolařík Richard, Brünn.
Löffler Leo, Mistelbach, N.-Ö.
Luze Wilhelm, Wien, N.-Ö.
Machatschek Bruno, Nikolsburg.
Macheck Viktor, Brünn.
Petřiček Hermann, Brünn.
(Podloučka Rudolf, Neustadtl.)
Prusenovský Ulrich, Napagedl.
Reich Bernhard, Prerau.
Schafranek Viktor, Brünn.
Schrottek Karl, Brünn.
Sersawy Richard, Brünn.
Steinermayr Franz, Stainz, St.
Wachsmann Bruno, Dambořitz.
Weczerza Armin, Brünn.
Weger Friedrich, Brünn.
Weißkopf Fritz, Kojetein.
Wiesner Gustav, Malaczka, U.
Wolf Helmut, Brünn.
Zenker Adolf, Brünn.
Ziffer Felix, Brünn.

29 Schüler.

VIII. Klasse.

Bauer Paul, Wien, N.-Ö.
Czerny Wilhelm, Brünn.
Deutsch Emil, Lissitz.
Exel Heinrich, Brünn.
Futter Hermann, Brünn.
Fürst Erwin, Austerlitz.
Fürst Leo, Austerlitz.
Herzel Franz, Brünn.
Hüttl Walter, Olmütz.
Japp Richard, Rzikowitz.
Jarosch Ottokar, Brünn.
Kantor Philipp, Butschowitz.
Klappenbach Adolf, Brünn.
Kolarž Richard, Brünn.
(Lampl Artur, Königsfeld.)
Lampl Viktor, Brünn.
Mandl Josef, Svatobořitz.
Mautner Leo, Brünn.
Mokry Gottlieb, Bohumielitz.
Schild Ignaz, Kobeřitz.
(Schuster Rudolf, Bogenneusiedel, N.-Ö.)
Schwed Ernst, Proßnitz.
Spieler Otto, Koritschan.
(Spitzer Nathan, Skotschau, Sch.)
Stern Ludwig, Triesch.
Strebinger Rudolf, Gaya.
Winkler Emil, Neutitschein.
Wuczkowski Josef, Müglitz.
Zeilender Adolf, Andrichau, G.
Zerzawy Adalbert, Unter-Tannowitz.

30 Schüler.

* * *

Für alle der Lehranstalt zugewendeten Spenden an Büchern, Lehr- und Barmitteln [u]nd für jegliche Unterstützung ihrer wissenschaftlichen und erziehlichen Aufgabe [sp]richt die Direktion hiemit den vorgesetzten hohen Schulbehörden, den verschiedenen [. . .]t. Körperschaften und Persönlichkeiten als bewährten Förderern und Gönnern der [S]chule den wärmsten Dank aus.

Voranzeige für das Schuljahr 1909/10.

I. Aufnahme in die I. Klasse.

Vom Schuljahre 1909/10 angefangen wird die hierortige Anstalt gemäß Ministerial-
rlaß vom 3. Dezember 1908, Z. 45.823, auf Grund Allerhöchster Entschließung sukzessive
n ein achtklassiges Realgymnasium umgewandelt und im bezeichneten Schuljahre in der
. Klasse nach dem durch die Ministerialverordnung vom 8. August 1908, Z. 34.180
M.-V.-Bl. Nr. 47) veröffentlichten Lehrplane unterrichtet.

Die Aufnahme in die I. Klasse des Realgymnasiums findet in zwei Terminen statt:
n Sommertermine am 9. und 10. Juli und im Herbsttermine am 16. und 17. Sep-
mber 1909 in der Direktionskanzlei von 8—10 Uhr vormittags.

Zu dieser Aufnahme, bei welcher die Aufnahmswerber in Begleitung ihrer
ltern oder deren Stellvertreter zu erscheinen haben, ist erforderlich:

1. Der Tauf- oder Geburtsschein, welcher nachweisen muß, daß der Aufnahmswerber
as 10. Lebensjahr bereits vollendet hat oder doch im Laufe des Jahres 1909
reicht haben wird;

2. Das Frequentationszeugnis oder als dessen Ersatz die vorschriftsmäßig aus-
efertigten Schulnachrichten, wenn er eine öffentliche Volks- oder Bürgerschule
esucht hat;

3. der Erlag einer Aufnahmstaxe von K 4·20, des Lehrmittelbeitrags K 2·— und
s Jugendspielbeitrages von K 1·—, zusammen also des Betrages von K 7·20;

4. zwei genau und vollständig ausgefertigte Nationale (2 Stück um 6 h beim
ymnasialdiener käuflich).

Die endgültige Aufnahme hängt von dem günstigen Erfolge einer Aufnahms-
üfung ab, welche am 9. und 10. Juli, beziehungsweise am 16. und 17. September
n 10—12 Uhr vormittags schriftlich und nachmittags von 3 Uhr (im Herbsttermine
hon von 2 Uhr) an mündlich abgehalten wird.

Bei derselben wird gefordert: Jenes Maß von Wissen in der Religion, welches
den ersten vier Klassen der Volksschule erworben werden kann. Fertigkeit im Lesen
d Schreiben der deutschen Sprache (Kenntnis der Biegung der Haupt-, Eigenschafts-
ir- und Zeitwörter; richtiges Erkennen und fertiges Bilden der Zeiten, Arten und Formen
s Zeitwortes); Gewandtheit im Zergliedern einfacher bekleideter Sätze; Bekanntschaft
t den Regeln der Rechtschreibung und richtige Anwendung derselben beim Diktando-
reiben. Übung in den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen.

Die Eltern jener Schüler, welche die Aufnahmsprüfung nicht bestanden haben,
nnen die bei der Aufnahme vorgelegten Zeugnisse und die eingezahlten Beträge sofort
eder in der Direktionskanzlei beheben.

Eine Wiederholung dieser Prüfung ist weder an dieser, noch an einer anderen
stalt im laufenden Schuljahre gesetzlich statthaft.

II. Aufnahme in die höheren Klassen.

Diese findet nur im Herbsttermine statt, und zwar vom 15. — 17. September 1909.

1. Solche Schüler, welche dieser Anstalt bereits im Vorjahre bis zum
huljahrsschlusse angehört haben, werden gegen Vorweis des letzten
nestralzeugnisses am 16. und 17. September von 8—11 Uhr vormittags im Zeichen-
ale aufgenommen. Dies gilt auch von den Repetenten der I. Klasse.

2. Jeder neu aufzunehmende Schüler eines höheren als des ersten Jahrganges
in Begleitung seiner Eltern oder deren Stellvertreter am 15. oder 16. September l. J.
der Zeit von 8—10 Uhr vormittags in der Direktionskanzlei zu erscheinen und sämt-
he Semestralzeugnisse, das letzte mit der vorgeschriebenen Abgangsklausel versehen,
er den Nachweis der ihm etwa verliehenen Schulgeldbefreiung oder Stipendienstiftung
zubringen; erforderlichen Falles muß er sich einer Aufnahmsprüfung unterziehen,
l zwar am 17. und 18. September zwischen 8—12 und 2—6 Uhr.

III. Die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen.

Beide werden am 16. und 17. September 1909 von 8—12 Uhr vormittags und vo 2—6 Uhr nachmittags vorgenommen. Anmeldungen hiezu vor 8 Uhr in der Direktion kanzlei.

IV. Geldleistungen der Schüler.

Gleich bei der Einschreibung hat jeder neu eintretende Schüler die Au nahmstaxe von K 4·20, den Lehrmittelbeitrag von K 2·— und den Jugendspielbeitrag vo K 1·—, jeder andere Schüler bloß den Lehrmittel- und Jugendspielbeitrag in der bezeich neten Höhe zu entrichten.

Die Taxe für die Aufnahmsprüfung in eine höhere Klasse als die erst beträgt K 24·—; die Taxe für jede Semestralprüfung der Privatisten ebenfalls K 24·— die für eine Jahresprüfung K 48·—.

Das Schulgeld beträgt für jedes Semester K 40·— und wird in den erste 6 Wochen des Semesters eingehoben; wer seiner Zahlungspflicht innerhalb der erste 6 Wochen nicht nachgekommen ist, dem ist der fernere Besuch der Schule nicht gestattet Schulgeldzahlungspflichtig sind auch die Privatisten, außerordentlichen Schüler un Hospitanten.

Schülern der I. Klasse kann gemäß Ministerialverordnung vom 7. März 1909, Z. 889 die Zahlung des Schulgeldes für das I. Semester gestundet werden, wenn ihnen bei nach gewiesener Dürftigkeit nach Verlauf der ersten zwei Monate in Bezug auf das Betrage eine der beiden ersten Noten und in Bezug auf die Leistungen in allen obligaten Leh gegenständen (mit Ausnahme des Turnens) mindestens die Note „genügend“ zuerkan wird. Entsprechen sie am Schlusse des I. Semesters den gesetzlichen Erfordernissen de Befreiung von der Schulgeldzahlung (bei erwiesener Mittellosigkeit ein Semestra ausweis, der eine der beiden ersten Noten bezüglich des „Betragens“ und in allen obligate Gegenständen mit Ausnahme des Turnens mindestens die Note „genügend“ aufweist so genießen sie schon vom I. Semester angefangen, und zwar für die Dauer de Mittellosigkeit und Würdigkeit die Begünstigung der Befreiung von der Schulgeld zahlung. Die Gesuche um die Stundung der Schulgeldzahlung sind binnen 8 Tagen nac erfolgter Aufnahme einzubringen.

Öffentlichen Schülern kann, wenn sie nicht schon auf Grund der ihnen gewährte Stundung von der Entrichtung des Schulgeldes befreit wurden, diese Befreiung gewährt werden wenn sie, beziehungsweise die zu ihrer Erhaltung Verpflichteten, wahrhaft bedürfti sind und wenn sie im letzten Semester in Beziehung auf das „Betragen“ eine der beide ersten Noten und bezüglich des Fortgangs in den Studien im letzten Semester eine günstigen Erfolg aufweisen, und zwar: wenn das I. Semester in Betracht kommt, in alle obligaten Lehrgegenständen (mit Ausnahme des Turnens) mindestens die Note „genügend“ wenn das II. Semester in Betracht kommt, die Eignung zum Aufsteigen in die nächst Klasse zuerkannt erhalten haben, wobei es auch genügt, wenn der Schüler für „im allge meinen“ zum Aufsteigen geeignet erklärt wurde.

V. Studentenwohnungen.

Auf die außerordentliche Wichtigkeit einer richtigen Wahl der Unterkunft fü den wissenschaftlichen Fortschritt und das sittliche sowie gesundheitliche Wohlbefinde der Studierenden werden die ortsfremden Eltern und Vormünder besonders auf merksam gemacht. Gemäß dem Landesschulrat-Erlasse vom 9. Mai 1887, Z. 3073, sol darauf gesehen werden, daß 1. in den Schlaf- und Arbeitsräumen die Studierenden vo den Familiengliedern des Quartiergebers getrennt seien; 2. daß die Studierenden diese Räume nicht bis zur Überfüllung bewohnen; 3. daß in denselben weder gekocht noch gewaschen werde. — Auch an die Quartiergeber, die unter einem die verantwort lichen Aufseher der Studierenden sind, sei die Mahnung gerichtet, daß sie sich ihre Verantwortlichkeit stets bewußt bleiben und daß sie sich auf das gewissenhafteste um den guten wissenschaftlichen Fortgang (durch Anhalten der Pflegebefohlenen zu geregelte Fleiße) und um eine tadellose sittliche Lebensführung (durch sorgfältige Überwachung derselben) zu kümmern haben. Um dieser Pflicht nachkommen zu können, ist die Kenntnis der Disziplinarvorschrift für die mährischen Mittelschulen, der Grundsätze fü die hygienischen Forderungen an das Kostzöglingswesen und der Beifügungen zu beiden unerläßlich. Die genannten Druckschriften können jederzeit von der Anstaltsdirektion bezogen werden.

VI. Schuljahrsbeginn.

Das Schuljahr 1909/10 wird Samstag, den 18. September 1909, mit einem feierlichen Veni Sancte Spiritus eröffnet, zu welchem sich die katholischen Schüler vor 8 Uhr in ihren Lehrsälen zu versammeln haben; die Schüler anderer Bekenntnisse haben daselbst vor $^3/_4$9 Uhr zu erscheinen. Um 9 Uhr werden in den Lehrsälen die Disziplinarvorschriften und die Stundenpläne bekannt gegeben.

Der regelmäßige Unterricht beginnt Montag, den 20. September, um 8 Uhr vormittags.

Brünn, am 29. Juni 1909.

K. k. Direktion des Zweiten deutschen Staatsgymnasiums in Brünn.

Karl A. Schwertassek,
k. k. Direktor.

1893—94. „Die Cimburg zur Schwedenzeit“ vom k. k. Professor Dr. Moritz Grolig.

„Die Schnellphotographie als Hilfsmittel zur Methodik des Turnunterrichtes“ vom Turnlehrer Leon Salzmann.

1894—95. „Die Toga der späteren Kaiserzeit“ vom k. k. suppl. Lehrer Dr. Eduard Hula.

„Über die Anlage und Einrichtung eines archäolog. Schulkabinettes“ vom k. k. Direktor Hugo Horak und vom k. k. suppl. Lehrer Dr. Eduard Hula.

1895—96. „Über die Alliteration bei den lateinischen Schulautoren und deren Übersetzung“ vom k. k. wirklichen Lehrer Franz Klein.

„Der Vesuvius von M. Opitz“ vom k. k. suppl. Lehrer Dr. Leo Langer.

1896—97. „Eine Sichtung der Streitschriften über die Gliederung der Hellenika von Xenophon“ vom k. k. suppl. Lehrer Dr. Leo Langer.

1897—98. „Katalog der Lehrer-Bibliothek“, verfaßt vom k. k. wirkl. Lehrer Dr. Karl Ertl.

1898—99. „Die Verwertung der hellenischen Philosophie im Gymnasial-Unterrichte“ vom k. k. suppl. Lehrer Dr. Alfred Nathansky.

1899—1900. „Satz und Vers im elegischen Distichon der Griechen“ vom k. k. wirklichen Lehrer Dr. Josef Mesk.

1900—01. „Austerlitz“, eine historische Studie vom k. k. wirklichen Lehrer Dr. Egid Filek von Wittinghausen.

1901—02. „Der Panathenaikos des Isokrates“ vom k. k. Professor Dr. Josef Mesk.

1902—03. „Eine Reise nach den Kykladen“ vom k. k. Professor Viktor Mattel.

1903—04. „Die Erziehungsideale des Platon und Aristoteles“ vom k. k. wirkl. Gymnasiallehrer Johann Polach.

1904—05. „Über die Beziehungen zwischen Ethik und Ästhetik in Schillers philosophischen Schriften“ vom k. k. Professor Benno Krichenbauer.

1905—06. „Die Eruptivgesteine der nordwestlichen Beskidenausläufer“ vom k. k. Professor Vinzenz Zatloukal.

1906—07. „Die Pflege des Jugendspieles in Deutschland“ vom k. k. Professor Leon Salzmann.

„Über veränderliche Sterne“ von Dr. August Mader.

1907—08. „Die Γ-Funktion für komplexe Argumente“ vom wirkl. Lehrer Dr. Georg Burggraf.
